

TD 1 : Ensembles

1 Parties d'un ensemble

Exercice 1. Dans une fabrique de processeurs, on prélève toutes les heures les trois derniers processeurs produits. Ceux-ci sont classés dans deux catégories : *fonctionnel*, codé 1 et *défectueux*, codé 0.

- Décrivez l'espace Ω associé à cette expérience aléatoire,
- écrivez les événements suivants :
 - A : le premier processeur est défectueux,
 - B : le dernier est fonctionnel,
 - C : deux processeurs sont défectueux,
 - D : au moins deux processeurs sont fonctionnels.

Exercice 2. Soit un univers de probabilités Ω , sur lequel sont définis des événements A , B et C . Exprimer, au moyen d'unions, d'intersections, et d'exclusions (\setminus), les événements suivants ; puis, si possible, exprimer ces mêmes événements comme *unions disjointes* (unions d'ensembles qui sont garantis être deux à deux disjoints). On pourra aussi utiliser la notation \bar{A} pour le complémentaire de A , i.e. $\Omega \setminus A$.

1. D : A et B se produisent,
2. E : A se produit, mais pas B ,
3. F : A et B se produisent, mais pas C ,
4. G : Au moins deux événements parmi A , B et C se produisent,
5. H : Exactement un des trois événements A , B , C se produit.

Exercice 3. Soient E un ensemble, A, B, C trois parties de E . Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
2. $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

Exercice 4. Soient E un ensemble, A, B, C trois parties de E . Montrer les assertions suivantes :

1. $(A \cup B = E) \Leftrightarrow (\bar{B} \subseteq A)$
2. $(A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subseteq \bar{B})$
3. $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$
4. $(A \cup B \subseteq A \cup C \text{ et } A \cap B \subseteq A \cap C) \Rightarrow (B \subseteq C)$
5. $(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (B = C)$

Exercice 5. Soient E un ensemble, A, B, X trois parties de E . Que dire de X si $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = \emptyset$

2 Dénombrement

Exercice 6. Un octet est une séquence de 8 bits $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]$ avec $\forall i, a_i \in \{0; 1\}$.

1. Combien y a-t'il d'octets différents ?
2. Combien d'octets finissent par 1 ?
3. Combien d'octets ont un nombre impair de 0 ?
4. Combien d'octets ont strictement plus de 0 que de 1 ?

TD 1 : Ensembles

Exercice 7. Soit E un ensemble à n éléments et $A \subseteq E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le nombre de parties de E ?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 8. Vous avez n bouteilles de vin que vous voulez les trier par ordre de préférence. Combien d'ordre sont possibles ?

Qu'en est-il si la première est fixée ? Et si c'est la 10ème qui est fixée ?

Exercice 9. On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?