

TD 4 : Indépendance

Exercice 1. On suppose que dans un restaurant universitaire on propose deux desserts à chaque repas. La probabilité que l'un des deux soit un yaourt est $0,4$, une orange $0,8$. La probabilité que les deux soient un yaourt et une orange est $0,3$. Calculer la probabilité que l'on propose :

- un yaourt et pas d'orange ?
- une orange et pas de yaourt ?
- ni yaourt ni orange ?

Exercice 2.

1. Soient A et B deux événements indépendants sur un espace de probabilité Ω .
 - Montrer que les événements \bar{A} et B sont indépendants.
 - De même montrer que \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.
2. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes sur l'espace Ω .
 - Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
 - Montrer que pour deux ensembles quelconques $E = x_1, \dots, x_k, F = y_1, \dots, y_l$ on a l'égalité $\mathbb{P}(X \in E, Y \in F) = \mathbb{P}(X \in E)\mathbb{P}(Y \in F)$. En déduire la probabilité de l'événement " $X \in E$ ou $Y \in F$ ".
 - Montrer que si f est une fonction quelconque et que l'on note $Z = f(Y)$ alors les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Exercice 3. Soit A, B, C des événements.

1. On suppose que A, B sont indépendants, A, C aussi et B, C de même. A-t-on A, B, C indépendants, i.e. $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C]$. Si oui, le prouver. Sinon, exhiber un contre-exemple.
2. On suppose que A est indépendant avec B et avec C . A-t-on toujours A indépendant avec $B \cup C$. Si oui, le prouver. Sinon, donnez une condition suffisante non triviale et prouver l'indépendance en supposant cette condition.

Exercice 4. On considère le jeu qui consiste à lancer simultanément 2 dés. À cette expérience, on associe la variable aléatoire X qui correspond à la somme des valeurs indiquées par les dés.

- Calculez l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ pour une partie, puis pour n parties,
- De même, calculez la variance pour une partie, puis pour n parties.

Exercice 5. On fait deux "pile ou face" successifs. Au premier lancé, on gagne 1 si on fait pile, rien si on fait face. Au deuxième, on gagne 2 si on fait pile, rien sinon.

1. Quelles sont l'espérance et la variance du gain.
2. On généralise à n lancés : si on obtient pile au i -ème lancé, on gagne i , sinon rien ne se passe (aucun gain, aucune perte). Quelles sont l'espérance et la variance du gain de n lancés ?

Exercice 6. On jette deux dés et on note respectivement X, Y les variables aléatoires correspondantes à chaque dé. Soit $Z = \max(X, Y)$. Déterminer la loi de Z , puis calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$.

Exercice 7. Julien Lepers vous pose une série de 4 questions indépendantes : soit vous répondez correctement (V), soit incorrectement (F). Pour chaque question, la probabilité de répondre bien est $\mathbb{P}[V] = p$.

1. Décrire l'univers Ω .
2. Décrire l'événement A où l'on répond correctement deux fois.

TD 4 : Indépendance

3. Quelle est la probabilité de se tromper au moins une fois.
4. On pose maintenant 8 questions. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 bonnes réponses consécutives ?
5. On pose maintenant n questions. A chaque bonne réponse, on gagne 5 encyclopédies. On note X la variable aléatoire du nombre d'encyclopédies gagnées pour l'ensemble des questions. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 8. Au casino, une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 2 euros et trois roues tournent ; chaque roue s'arrête sur un chiffre de 0 à 9 aléatoirement. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise, s'il y a un "double", celui-ci gagne 4 euros et enfin s'il obtient un "triple", il gagne x euros.

- Calculer l'espérance mathématique, en fonction de x , du gain pour le joueur.
- De même calculer la variance.
- En déduire la valeur limite de x pour laquelle le jeu est favorable à la banque.