

TD 5 : Probabilités conditionnelles

Exercice 1. On lance un dé non pipé à 6 faces suffisamment de fois pour obtenir au moins une fois chaque face. On définit les événements suivants :

- A** : l'évènement "le 5 apparaît avant le 2",
- E** : l'évènement "le 5 sort au premier lancer",
- F** : l'évènement "le 2 sort au premier lancer",
- G** : l'évènement $\bar{E} \cap \bar{F}$

1. Calculer $\mathbb{P}[A|E]$ et $\mathbb{P}[A|F]$.
2. Exprimer sans preuve $\mathbb{P}[A|G]$ en fonction de $\mathbb{P}[A]$.
3. En déduire $\mathbb{P}[A]$.

Exercice 2. On lance quatre fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : on obtient pile aux trois premiers lancers.
- B : le dernier lancer donne face.
- C : on obtient pile au moins trois fois.

Calculer également $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_C(B)$.

Exercice 3. Une population étudiée comporte 60% de femmes et 40% d'hommes. On sait par ailleurs que 30% des femmes portent les cheveux courts et que 10% des hommes portent les cheveux longs.

1. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard porte des cheveux courts.
2. Calculer la probabilité qu'une personne portant des cheveux longs soit une femme.

Exercice 4. Une population est composée de familles de 0, 1, 2 ou 3 enfants. Il y a trois fois plus de familles avec 1 que sans enfant, quatre fois plus ayant 2 enfants que 0 et deux fois plus avec 3 enfants. On suppose qu'il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon et que le sexe des enfants sont indépendants.

1. Donner les probabilités de nombres d'enfants par famille p_0, p_1, p_2, p_3 .
2. On choisit une famille au hasard : quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun garçon ?
3. Toujours pour une famille choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle ait 2 enfants sachant qu'elle n'a aucun garçon ?

Exercice 5. Un nouveau test de dépistage est développé. On prend un échantillon de 400 personnes, dont 100 sont malades. On observe que parmi les malades, 95% obtiennent un test positif. De plus, parmi les non malades, seulement les trois quart obtiennent un test négatif.

Calculer les probabilités :

1. d'être malade sachant que le test est négatif,
2. d'être sain sachant que le test est positif.

Exercice 6. On vérifie l'efficacité d'un éthylo-test sur un groupe de personnes. Parmi elles, 64% sont sobres. On observe que dans 15% des cas, la personne est sobre et le test est positif (faux positif), tandis que dans seulement 1% des cas, la personne est ivre et le test est négatif (faux négatif).

Calculer les probabilités :

TD 5 : Probabilités conditionnelles

1. d'être ivre sachant qu'on est négatif,
2. d'être sobre sachant qu'on est positif.

Exercice 7. Un gardien de nuit a 10 clés, dont une seule marche, pour ouvrir une porte. Il emploie deux méthodes. Méthode A : sobre, il retire du trousseau les clés déjà essayées ; méthode B : ivre, il remet la clé dans le trousseau après chaque essai.

1. Méthode A : on appelle p_n la probabilité qu'il faille n essais pour ouvrir la porte. Déterminer p_n .
2. Méthode B : on appelle q_n la probabilité qu'il faille n essais pour ouvrir la porte. Déterminer q_n .
3. Le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice 8. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant (avec a et b inconnues) :

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/5$	0	a
0	b	$1/15$	$1/15$
1	$1/5$	0	$1/5$

De plus, on nous donne que $\mathbb{P}[X = -1|Y = 1] = \frac{3}{7}$ et $\mathbb{P}[Y = -1|X = 0] = \frac{1}{3}$

1. Donner les lois marginales de X et de Y .
2. Montrer que $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.
3. Que dire de l'indépendance de X et Y ?

Exercice 9. On lance un dé équilibré, puis une pièce de monnaie non biaisée un nombre de fois égal au résultat du dé. Soit X le résultat du dé et Y le nombre de "Pile" amenés par la pièce de monnaie.

1. Déterminer la loi jointe du couple (X, Y) .
2. Soit $n \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Quelle est la loi de Y sachant $X = n$?
3. En déduire $\mathbb{E}[Y|X = n]$, puis $\mathbb{E}[Y|X]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.