

**TD 6 : Probabilités continues**

**Exercice 1.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $[x]$  sa partie entière, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Par exemple,  $[3,5] = 3$  et  $[3] = 3$ . Calculer  $\int_a^b [x] dx$  pour  $a < b$  deux entiers.

**Exercice 2.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 (x+3)dx & I_2 &= \int_2^5 (x^2 + \frac{1}{x^3})dx & I_3 &= \int_1^3 (\sqrt{x})dx \\
 I_4 &= \int_0^2 |x^2 - 1|dx & I_5 &= \int_0^1 (x+8)^2 dx & I_6 &= \int_0^2 (2x^4 + 4x^3 + x + 3)dx \\
 I_7 &= \int_0^1 (x^2 - 3)^7 dx & I_8 &= \int_0^4 t^4 \cdot e^{5x^5} dx & I_9 &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-3x} dx
 \end{aligned}$$

**Exercice 3.** La densité  $f$  de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ a & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ -ax + 4a & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement  $f$  et calculer la constante  $a$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(|X - 1,5| \leq 1)$  et  $\mathbb{P}(X \geq 3)$ .

**Exercice 4.** Soit la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Calculer  $\int_{-3}^{-1} g$ ,  $\int_{-1}^0 g$ ,  $\int_0^1 g$ ,  $\int_{-2}^5 g$ . Vérifier vos résultats à l'aide de calculs d'aires.

**Exercice 5.** Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une densité  $f$  et  $a > 0$ . Montrer que  $Y = a \cdot X$  admet pour densité  $g(x) = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{x}{a}\right)$ .

**Exercice 6.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On pose  $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  et  $W_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ .

1. Calculer la fonction de répartition de  $Z_n$  en fonction de celles de  $X_n$ .
2. Même question pour  $W_n$ .
3. On suppose que  $X_n$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  pour tout  $n$ . Quelle est la loi de  $W_n$  ?

**Exercice 7.** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[0; 1]$ . On pose  $Y = -2 \ln(1 - X)$ .

1. Rappeler la valeur de  $\mathbb{P}[X \leq a]$  suivant les valeurs de  $a$ .
2. Quelles valeurs peut prendre  $Y$  ?

## TD 6 : Probabilités continues

---

3. Calculer  $\mathbb{P}[Y \leq t]$  en fonction de  $t$ .
4. Soit  $h$  la fonction de densité de  $Y$ . Calculer  $h$ .

**Exercice 8.** Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire  $X$  de densité  $f(x) = c(1 - x)^4$  pour  $x \in [0, 1]$ , 0 sinon.

1. Déterminer  $c$ .
2. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à  $10^{-5}$  ?