

TD 7 : Majorations, loi exponentielle

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et $\alpha > 0$.

1. On suppose que X est positive. Montrer l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}[X \geq \alpha] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}$
2. Montrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha] \leq \frac{\text{Var}(X)}{\alpha^2}$

Exercice 2. Le bénéfice annuel d'une compagnie d'assurance est une variable aléatoire d'espérance 500000 € et d'écart type 100000 €. Son PDG déclare à son conseil d'administration qu'il est sûr à 99% d'avoir un bénéfice positif. Que pensez-vous de cette affirmation ?

Exercice 3. Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt . Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3 . On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10^2$. Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3 .

Exercice 4. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$
 - a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - b) Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y .
5. Reprendre la question 4 avec $Y = X^2$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On pose $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ et $W_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z_n en fonction de celles de X_n .
2. Même question pour W_n .
3. On suppose que X_n suit une loi exponentielle de paramètre λ pour tout n . Quelle est la loi de W_n ?

Exercice 6. Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre suffisamment faible de retours de ce composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montré que la loi suivie par la durée de vie de ce composant, en années, suit la loi exponentielle de moyenne 4.

1. Préciser la fonction de répartition de cette loi ainsi que son espérance et son écart-type.
2. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance plus de quatre ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne au moins six ans sans défaillance, sachant qu'il a déjà fonctionné cinq ans.
4. Quelle est la probabilité que la durée de vie appartienne à l'intervalle : $[\mathbb{E}(X) - \sigma(X), \mathbb{E}(X) + \sigma(X)]$?
5. Pendant combien de temps 50% des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance ?
6. Donner la période de garantie optimal pour remplacer moins de 15% des disques durs sous garantie.