

TD 1 : Ensembles

1 Parties d'un ensemble

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$ deux sous ensembles. On rappelle que :

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \in \Omega | x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \in \Omega | x \in A \text{ et } x \in B\},$$

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{x \in A | x \notin B\},$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega | x \notin A\}.$$

Exercice 1. Dans une fabrique de processeurs, on prélève toutes les heures les trois derniers processeurs produits. Ceux-ci sont classés dans deux catégories : *fonctionnel*, codé 1 et *défectueux*, codé 0.

1. Décrivez l'espace Ω associé à cette expérience aléatoire,
2. écrivez les évènements suivants :
 - A : le premier processeur est fonctionnel,
 - B : le dernier est défectueux,
 - C : deux processeurs sont fonctionnels,
 - D : au moins deux processeurs sont défectueux.

Exercice 2. Soit un univers de probabilités Ω , sur lequel sont définis des évènements A, B et C . Exprimer, au moyen d'unions, d'intersections, et d'exclusions (\setminus), les évènements suivants. Puis, si possible, exprimer ces mêmes évènements comme *unions disjointes* (unions d'ensembles qui sont garantis être deux à deux disjoints).

1. D : A et B se produisent,
2. E : A se produit, mais pas B ,
3. F : A et B se produit, mais pas C ,
4. G : Au moins deux évènements parmi A, B et C se produisent,
5. H : Exactement un des trois évènements A, B, C se produit.

Exercice 3. Soient Ω un ensemble, A, B, C trois parties de Ω . Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
2. $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

Exercice 4. Soient Ω un ensemble, A, B, C trois parties de Ω . Montrer les assertions suivantes :

1. $(A \cup B = \Omega) \Leftrightarrow (\bar{B} \subseteq A)$
2. $(A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subseteq \bar{B})$
3. $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$
4. $(A \cup B \subseteq A \cup C \text{ et } A \cap B \subseteq A \cap C) \Rightarrow (B \subseteq C)$
5. $(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (B = C)$

Exercice 5. Soient Ω un ensemble, A, B, X trois parties de Ω . Que dire de X si $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = \emptyset$

Exercice 6. Soient Ω un ensemble, A, B deux parties de Ω . La *différence symétrique* de A et B est le sous ensemble de Ω contenant les éléments de $A \cup B$ qui ne sont pas dans $A \cap B$, noté :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B | x \notin A \cap B\}$$

TD 1 : Ensembles

1. Montrer que $A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
2. Que valent les différences symétriques suivantes : $A \triangle A$, $A \triangle \Omega$ et $A \triangle \emptyset$?
3. Montrer que $A \triangle B = A$ si et seulement si $B = \emptyset$.
4. Montrer que $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. On appelle cette propriété la *distributivité* de l'intersection par rapport à la différence symétrique.

2 Dénombrement

Exercice 7. Un octet est une séquence de 8 bits $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]$ avec $\forall i, a_i \in \{0; 1\}$.

1. Combien y a-t'il d'octets différents?
2. Combien d'octets finissent par 1?
3. Combien d'octets ont un nombre impair de 0?
4. Combien d'octets ont strictement plus de 0 que de 1?

Exercice 8. Soit Ω un ensemble à n éléments et $A \subseteq \Omega$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le nombre de parties de Ω ?
2. Quel est le nombre de parties de Ω qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 9. Vous avez n bouteilles de vin que vous voulez les trier par ordre de préférence. Combien d'ordre sont possibles?

Qu'en est-il si la première est fixée? Et si c'est la 10ème qui est fixée?

Exercice 10. Vous avez un échiquier de taille $n \times n$ (i.e. une grille carrée dont chaque côté fait n cases). On rappelle qu'aux échecs, une *tour* peut manger n'importe quelle pièce sur la même ligne ou sur la même colonne qu'elle.

1. De combien de façon peut-on placer n *tours* indiscernables sur l'échiquier, de façon à ce qu'aucune ne puisse en manger une autre?
2. Même question si les *tours* sont discernables.
3. Plus difficile, reprendre la question 1) avec des *fous* cette fois. On rappelle que les *fous* mangent en diagonale seulement.

Exercice 11. On se donne un jeu de 52 cartes classique : 13 cartes (2 à 10, valet, dame, roi et as) dans les quatre couleurs (coeur, carreau, pique et trèfle).

1. Combien y a-t-il de mains de 4 cartes différentes? Et de mains de k cartes différentes pour $0 \leq k \leq 52$
2. Combien y a-t-il de mains de 3 cartes comprenant exactement un roi?
3. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes comprenant au plus un as?
4. Combien y a-t-il de mains de 6 cartes comprenant, à la fois, au moins un roi et au moins une dame?