

TD 7 : Majorations, loi exponentielle

L3 Miage : Probabilités

A. Lentz

Exercise 1, Question 1

$$\mathbb{E}[X] =$$

$$\geq \alpha \mathbb{P}[X \geq \alpha]$$

Exercise 1, Question 1

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\geq \alpha \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\geq \alpha \mathbb{P}[X \geq \alpha]$$

Exercise 1, Question 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^\alpha xf(x)dx + \int_\alpha^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \alpha \int_\alpha^{+\infty} f(x)dx \\ &\geq \alpha \mathbb{P}[X \geq \alpha]\end{aligned}$$

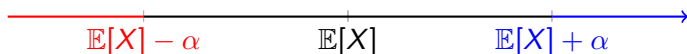
Exercise 1, Question 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{\alpha} xf(x)dx + \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \alpha \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \\ &\geq \alpha \mathbb{P}[X \geq \alpha]\end{aligned}$$

Exercise 1, Question 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{\alpha} xf(x)dx + \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_{\alpha}^{+\infty} \alpha f(x)dx \\ &\geq \alpha \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \\ &\geq \alpha \mathbb{P}[X \geq \alpha]\end{aligned}$$

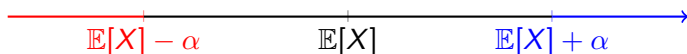
Exercice 1, Question 2



La question précédente est vraie pour toute variable aléatoire positive. Il suffit de l'appliquer à la variable aléatoire $|X - \mathbb{E}[X]|^2$. Pour tout $k > 1$:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha] = \mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]|^k \geq \alpha^k]$$

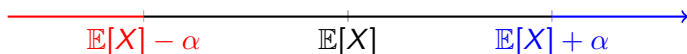
Exercice 1, Question 2



La question précédente est vraie pour toute variable aléatoire positive. Il suffit de l'appliquer à la variable aléatoire $|X - \mathbb{E}[X]|^2$. Pour tout $k > 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha] &= \mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]|^k \geq \alpha^k] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^k]}{\alpha^k}\end{aligned}$$

Exercice 1, Question 2



La question précédente est vraie pour toute variable aléatoire positive. Il suffit de l'appliquer à la variable aléatoire $|X - \mathbb{E}[X]|^2$. Pour tout $k > 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha] &= \mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]|^k \geq \alpha^k] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^k]}{\alpha^k}\end{aligned}$$

En particulier, c'est vrai pour $k = 2$ et $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$ par définition.

Exercice 2

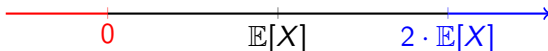
Il est tentant d'utiliser la question précédente pour trouver le même résultat que le PDG. Soit X le gain. D'après l'énoncé :

- $\mathbb{E}[X] = 5 \cdot 10^5$, c'est donc aussi l'écart nécessaire entre X et la moyenne pour être en déficit,
- $\text{Var}(X) = \sigma(X)^2 = 10^{10}$

Exercice 2

Il est tentant d'utiliser la question précédente pour trouver le même résultat que le PDG. Soit X le gain. D'après l'énoncé :

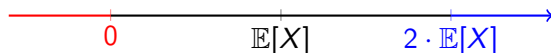
- $\mathbb{E}[X] = 5 \cdot 10^5$, c'est donc aussi l'écart nécessaire entre X et la moyenne pour être en déficit,
- $\text{Var}(X) = \sigma(X)^2 = 10^{10}$



Exercice 2

Il est tentant d'utiliser la question précédente pour trouver le même résultat que le PDG. Soit X le gain. D'après l'énoncé :

- $\mathbb{E}[X] = 5 \cdot 10^5$, c'est donc aussi l'écart nécessaire entre X et la moyenne pour être en déficit,
- $\text{Var}(X) = \sigma(X)^2 = 10^{10}$



$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]] &\leq \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \\ &\leq \frac{10^{10}}{(5 \cdot 10^5)^2} \leq \frac{1}{25} \\ &\leq 4\% > 1\%\end{aligned}$$

Exercice 2

On a seulement montré qu'on ne pouvait pas utiliser cette inégalité, pas que le PDG mentait. De plus, attention que $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]]$ contient la probabilité de faire faillite mais aussi celle de gagner plus qu'un million (écart de $5 \cdot 10^5$ de **chaque** côté).

Il suffit donc de trouver une loi qui contredit le PDG. Les lois uniforme et Normale ne fonctionnent pas.

Contre exemple

97% de chance de gagner $5 \cdot 10^5$, 1.5% de chance de perdre ε et 1.5% de gagner $10^6 + \varepsilon$. On choisit un bon ε tel que $\text{Var}(X) = 10^{10}$ et on aura bien 1.5% de chance d'être en déficit.

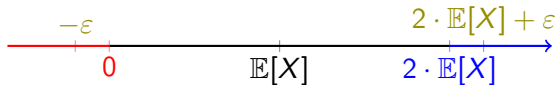
Exercice 2

On a seulement montré qu'on ne pouvait pas utiliser cette inégalité, pas que le PDG mentait. De plus, attention que $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]]$ contient la probabilité de faire faillite mais aussi celle de gagner plus qu'un million (écart de $5 \cdot 10^5$ de **chaque** côté).

Il suffit donc de trouver une loi qui contredit le PDG. Les lois uniforme et Normale ne fonctionnent pas.

Contre exemple

97% de chance de gagner $5 \cdot 10^5$, 1.5% de chance de perdre ε et 1.5% de chance de gagner $10^6 + \varepsilon$. On choisit un bon ε tel que $\text{Var}(X) = 10^{10}$ et on aura bien 1.5% de chance d'être en déficit.



Exercice 5, Question 1

$$\begin{aligned}F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}[Z_n \leq x] \\&= \mathbb{P}[X_1 \leq x \text{ et } X_2 \leq x \text{ et } \dots \text{ et } X_n \leq x] \\&= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[X_i \leq x] \\&= \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$F_{Z_n} = \prod_{i=1}^n F_{X_i}$$

Exercice 5, Question 2

$$\begin{aligned}F_{W_n}(x) &= \mathbb{P}[W_n \leq x] \\&= 1 - \mathbb{P}[W_n \geq x] \\&= 1 - \mathbb{P}[X_1 \geq x \text{ et } X_2 \geq x \text{ et } \dots \text{ et } X_n \geq x] \\&= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[X_i \geq x] \\&= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x))\end{aligned}$$

Donc :

$$F_{W_n} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i})$$

Cours

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dx \\ &= [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - e^{-\lambda x})) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x} \\ &= 1 - e^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

Cours

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors

$$\begin{cases} E[X] = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Exercice 6, Question 1

Cours

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors

$$\begin{cases} E[X] = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$$

D'après l'énoncé $\mathbb{E}[X] = 4$. Donc $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\text{Var}(X) = 16$.

Exercice 6, Question 1

Cours

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors
$$\begin{cases} E[X] = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$$

D'après l'énoncé $\mathbb{E}[X] = 4$. Donc $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\text{Var}(X) = 16$.

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{4} e^{-t/4} dt$$

Exercice 6, Question 1

Cours

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors
$$\begin{cases} E[X] = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$$

D'après l'énoncé $\mathbb{E}[X] = 4$. Donc $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\text{Var}(X) = 16$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x \frac{1}{4} e^{-t/4} dt \\ &= [-e^{-t/4}]_0^x \end{aligned}$$

Exercice 6, Question 1

Cours

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors
$$\begin{cases} E[X] = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$$

D'après l'énoncé $\mathbb{E}[X] = 4$. Donc $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\text{Var}(X) = 16$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x \frac{1}{4} e^{-t/4} dt \\ &= [-e^{-t/4}]_0^x \\ &\geq 1 - e^{-x/4} \end{aligned}$$

Exercice 6, Question 2

$$\mathbb{P}[X > 4] = \int_4^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-t/4} dx$$

Exercice 6, Question 2

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 4] &= \int_4^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-t/4} dx \\ &= [-e^{-t/4}]_4^{+\infty}\end{aligned}$$

Exercise 6, Question 2

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 4] &= \int_4^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-t/4} dx \\ &= [-e^{-t/4}]_4^{+\infty} \\ &\geq e^{-1}\end{aligned}$$

Exercise 6, Question 2

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 4] &= \int_4^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-t/4} dx \\ &= [-e^{-t/4}]_4^{+\infty} \\ &\geq e^{-1} \\ &\geq \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Exercice 6, Question 3

$$\mathbb{P}[X > 6 | X > 5] = \frac{\mathbb{P}[X > 6 \text{ et } X > 5]}{\mathbb{P}[X > 5]}$$

Exercice 6, Question 3

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 6 | X > 5] &= \frac{\mathbb{P}[X > 6 \text{ et } X > 5]}{\mathbb{P}[X > 5]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X > 6]}{\mathbb{P}[X > 5]}\end{aligned}$$

Exercice 6, Question 3

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 6 | X > 5] &= \frac{\mathbb{P}[X > 6 \text{ et } X > 5]}{\mathbb{P}[X > 5]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X > 6]}{\mathbb{P}[X > 5]} \\ &= \frac{e^{-6/4}}{e^{-5/4}}\end{aligned}$$

Exercice 6, Question 3

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 6 | X > 5] &= \frac{\mathbb{P}[X > 6 \text{ et } X > 5]}{\mathbb{P}[X > 5]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X > 6]}{\mathbb{P}[X > 5]} \\ &= \frac{e^{-6/4}}{e^{-5/4}} \\ &= e^{-1/4}\end{aligned}$$

Exercise 6, Question 3

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > 6 | X > 5] &= \frac{\mathbb{P}[X > 6 \text{ et } X > 5]}{\mathbb{P}[X > 5]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X > 6]}{\mathbb{P}[X > 5]} \\ &= \frac{e^{-6/4}}{e^{-5/4}} \\ &= e^{-1/4} \\ &= \mathbb{P}[X > 1]\end{aligned}$$

Exercice 6, Question 4

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \leq \sigma(X)] = \int_{\mathbb{E}[X] - \sigma(X)}^{\mathbb{E}[X] + \sigma(X)} \frac{1}{4} e^{-t/4} dt$$

Exercise 6, Question 4

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \leq \sigma(X)] &= \int_{\mathbb{E}[X] - \sigma(X)}^{\mathbb{E}[X] + \sigma(X)} \frac{1}{4} e^{-t/4} dt \\ &= \left[-e^{-t/4} \right]_{\mathbb{E}[X] - \sigma(X)}^{\mathbb{E}[X] + \sigma(X)}\end{aligned}$$

Exercise 6, Question 4

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \leq \sigma(X)] &= \int_{\mathbb{E}[X] - \sigma(X)}^{\mathbb{E}[X] + \sigma(X)} \frac{1}{4} e^{-t/4} dt \\ &= \left[-e^{-t/4} \right]_{\mathbb{E}[X] - \sigma(X)}^{\mathbb{E}[X] + \sigma(X)} \\ &= \left[-e^{-t/4} \right]_0^8\end{aligned}$$

Exercise 6, Question 4

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \leq \sigma(X)] &= \int_{\mathbb{E}[X] - \sigma(X)}^{\mathbb{E}[X] + \sigma(X)} \frac{1}{4} e^{-t/4} dt \\ &= \left[-e^{-t/4} \right]_{\mathbb{E}[X] - \sigma(X)}^{\mathbb{E}[X] + \sigma(X)} \\ &= \left[-e^{-t/4} \right]_0^8 \\ &= 1 - e^{-2}\end{aligned}$$

Exercice 6, Question 5

Soit A le temps demandé. On a donc $F_X(A) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6, Question 5

Soit A le temps demandé. On a donc $F_X(A) = \frac{1}{2}$.

En remplaçant avec la première question :

$$1 - e^{-A/4} = \frac{1}{2}$$

i.e.

$$e^{-A/4} = \frac{1}{2}$$

i.e.

$$e^{A/4} = 2$$

i.e.

$$A = 4 \ln(2)$$

Exercice 6, Question 6

Soit B le temps demandé. On a donc $F_X(B) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.

Exercice 6, Question 6

Soit B le temps demandé. On a donc $F_X(B) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.

Donc en remplaçant avec la première question :

$$1 - e^{-B/4} = \frac{3}{20}$$

i.e.

$$e^{-B/4} = \frac{17}{20}$$

i.e.

$$B = 4 \ln \left(\frac{20}{17} \right)$$