

TD 8 : Convergence

Exercice 1. On lance n fois un dé à 6 faces et on regarde la fréquence d'obtention de la face 6 (c'est-à-dire le nombre de fois qu'on obtient 6, divisé par n). Que peut-on dire de cette fréquence quand n devient grand ?

Exercice 2. Un pays compte 1004000 électeurs. Le vote est obligatoire. 4000 électeurs votent "OUI" par conviction, les autres votent au hasard entre "OUI" et "NON". Quelle est la probabilité que le "OUI" l'emporte ?

Exercice 3. On suppose que les erreurs liées à une expérience suivent la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ .

1. Déterminer σ sachant que l'erreur (en valeur absolue) est supérieure à 0,1 dans 10% des cas ?
2. Dans ce cas, quelle est la probabilité pour que l'erreur soit supérieure à 0,2 ?
3. Toujours dans le même cas, déterminer a de sorte que la probabilité pour que l'erreur soit supérieure à a soit de 5%.

Exercice 4. On considère comme acquise la propriété suivante :

Proposition. Si X loi de Poisson de paramètre λ , $\mathbb{P}[X \text{ pair}] = 1 - e^{-2\lambda}$.

Une ligne de transmission entre émetteur et récepteur transporte des données représentées par 1024 octets (soit 8192 bits). La probabilité que la transmission d'un bit soit erronée est estimée à 10^{-5} et on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres. On contrôle la qualité de la transmission avec un calcul de parité (checksum) sur le nombre de 1 envoyés :

- si il y a un nombre impair d'erreurs, un message d'erreur apparaît,
- sinon, c'est à dire si il y a un nombre pair d'erreurs, la transmission est acceptée.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sachant que la transmission est acceptée.

Exercice 5. Une banque accepte de ses clients des rouleaux de pièces de 2 € sans contrôler le nombre de pièces (en principe 25). On suppose que 3% des rouleaux contiennent 24 pièces, 96% contiennent 25 pièces et 1% contiennent 26 pièces.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces dans un rouleau. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$.
2. Calculer les probabilités pour que 400 rouleaux contiennent :
 - moins de 10000 pièces,
 - moins de 9900 pièces,
 - moins de 9980 pièces.

Exercice 6. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_i suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1.

1. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$?

2. Soit $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. En utilisant le théorème centrale limite et en considérant les événements $\{T_n \leq 0\}$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$