

# TD 8 : Convergence

L3 Miage : Probabilités

A. Lentz

# Convergence

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v. a. et  $X$  une v.a. Plusieurs convergences :  
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow X$ .

## Convergence presque sûre

$$\mathbb{P} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right] = 1$$

## Convergence en probabilité

$$\forall \varepsilon, \mathbb{P} [ |X_n - X| \geq \varepsilon ] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

## Convergence en loi

$$\forall x, F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_X(x)$$

CV presque sûre  $\Rightarrow$  CV en proba  $\Rightarrow$  CV en loi

## Loi des grands nombres

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance  $\mu$ .

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en probabilité (faible)} \\ \text{presque sûre (forte)} \end{array} \right.$$

## Théorème central limite

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ .

$$\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

## Vers une loi Normale (Théorème de Moivre Laplace)

Si  $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ ,

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

En général, on considère qu'on suit une loi Normale pour  $n \geq 23$ .

## Vers une loi de Poisson

Si  $X_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ ,

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{Pois}(0, 1)$$

En général, on considère qu'on suit une loi de Poisson pour  $n \geq 50$  et  $p < 0, 1$ .

## Exercice 1 : Loi des grands nombres

Soit  $X_i$  v. a. représentant le nombre de 6 obtenu au  $i$ -ème lancer, la fréquence en  $n$  lancers est :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

## Exercice 1 : Loi des grands nombres

Soit  $X_i$  v. a. représentant le nombre de 6 obtenu au  $i$ -ème lancer, la fréquence en  $n$  lancers est :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

### Loi des grands nombres

Les  $X_i$  sont i.i.d. et d'espérance  $\frac{1}{6}$  donc :

$$F_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[X_1] = \boxed{\frac{1}{6}}$$

# Exercice 1 : Bienaymé-Tchebychev

Idée : majoration sur la vitesse de convergence.

# Exercice 1 : Bienaymé-Tchebychev

Idée : majoration sur la vitesse de convergence.

## Calcul de l'espérance et de la variance

- $\mathbb{E}[F_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

- $$\begin{aligned} \text{Var}(F_n) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{5}{36} = \frac{5}{36n} \end{aligned}$$



# Exercice 1 : Bienaymé-Tchebychev

Idée : majoration sur la vitesse de convergence.

## Calcul de l'espérance et de la variance

$$\bullet \mathbb{E}[F_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Var}(F_n) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{5}{36} = \frac{5}{36n} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}\left[\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq \alpha\right] = \mathbb{P}[|F_n - \mathbb{E}[F_n]| \geq \alpha] \leq \frac{\text{Var}(F_n)}{\alpha^2} = \boxed{\frac{5}{36n\alpha^2}}$$

### Notations

- $n = 10^6$  votants aléatoires,
- $k = 4 \cdot 10^3$  qui votent *oui*.
- $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  v.a. nombre de *oui* chaque votant aléatoire (Bernouilli),
- $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  nombre de *oui* pour l'ensemble des aléatoires (Binomiale)

### Notations

- $n = 10^6$  votants aléatoires,
- $k = 4.10^3$  qui votent *oui*.
- $(X_i)_{1 \leq n}$  v.a. nombre de *oui* chaque votant aléatoire (Bernouilli),
- $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  nombre de *oui* pour l'ensemble des aléatoires (Binomiale)

Il y a  $n + k$  votants parmi lesquelles :

- $k$  personnes votent toujours *oui*,
- $S_n$  personnes votent *oui* parmi les personnes aléa.

## Exercice 2 : Traduction de l'énoncé

### Notations

- $n = 10^6$  votants aléatoires,
- $k = 4 \cdot 10^3$  qui votent *oui*.
- $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  v.a. nombre de *oui* chaque votant aléatoire (Bernouilli),
- $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  nombre de *oui* pour l'ensemble des aléatoires (Binomiale)

Il y a  $n + k$  votants parmi lesquelles :

- $k$  personnes votent toujours *oui*,
- $S_n$  personnes votent *oui* parmi les personnes aléa.

↪ Donc il faut  $\frac{n+k}{2} + 1$  votes *oui* pour qu'il l'emporte.

## Exercice 2 : Traduction de l'énoncé

### Notations

- $n = 10^6$  votants aléatoires,
- $k = 4 \cdot 10^3$  qui votent *oui*.
- $(X_i)_{1 \leq n}$  v.a. nombre de *oui* chaque votant aléatoire (Bernouilli),
- $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  nombre de *oui* pour l'ensemble des aléatoires (Binomiale)

Il y a  $n + k$  votants parmi lesquelles :

- $k$  personnes votent toujours *oui*,
- $S_n$  personnes votent *oui* parmi les personnes aléa.

↔ Donc il faut  $\frac{n+k}{2} + 1$  votes *oui* pour qu'il l'emporte.

Question de l'énoncé : calculer

$$\mathbb{P}[\text{oui gagne}] = \mathbb{P}\left[S_n + k > \frac{n+k}{2}\right] = \mathbb{P}\left[S_n > \frac{n-k}{2}\right]$$

## Exercice 2 : Loi Binomiale et Loi des grands nombres

### Loi Binomiale

$X_i$  v.a. de Bernouilli de paramètre  $\frac{1}{2}$ . Donc  $S_n \sim \mathcal{Bin}(n, \frac{1}{2})$  et :

$$\mathbb{P}\left[S_n > \frac{n-k}{2}\right] = \sum_{i=\frac{n-k}{2}+1}^n \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^{n-i}} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=\frac{n-k}{2}+1}^n \binom{n}{i}$$

Problème : on ne sait pas calculer cette somme.

## Exercice 2 : Loi Binomiale et Loi des grands nombres

### Loi Binomiale

$X_i$  v.a. de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ . Donc  $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$  et :

$$\mathbb{P}\left[S_n > \frac{n-k}{2}\right] = \sum_{i=\frac{n-k}{2}+1}^n \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^{n-i}} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=\frac{n-k}{2}+1}^n \binom{n}{i}$$

Problème : on ne sait pas calculer cette somme.

### Loi des grands nombres

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{k}{2n}\right] = 0$$

Problème : pas de vitesse de convergence.

→ Par Bienaymé-Tchebychev,  $\mathbb{P}[\text{non gagne}] \leq \frac{1}{16}$

## Exercice 2 : Se ramener à une loi Normale

### Données

- $S_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$
- $n \gg 23$
- $\mathbb{E}[S_n] = \frac{n}{2}$
- $\sigma(S_n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$

$$\Leftrightarrow S_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right).$$

On veut donc calculer

$$\mathbb{P}\left[\frac{n-k}{2} < \mathcal{N}\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \leq n\right]$$

Problème : on ne sait pas non plus calculer l'intégrale correspondante.

→ On se ramène à la loi Normale centrée réduite, pour laquelle nous avons une table de valeur.



## Exercice 2 : Loi Normale, Rappel

Question : comment se ramener à une loi centrée réduite ?

Soient  $a, b$  deux réels tels que  $a \leq b$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathcal{N}(\mu, \sigma) \in [a, b]] &= \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{avec : } \begin{cases} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dy = \frac{dx}{\sigma} \end{cases} \\ &= \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \in \left[\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma}\right]\right]\end{aligned}$$

On peut alors utiliser la table de valeur de la loi centrée réduite.

### Conclusion

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma) \sim \sigma\mathcal{N}(0, 1) + \mu \quad \mathcal{N}(0, 1) \sim \frac{\mathcal{N}(\mu, \sigma) - \mu}{\sigma}$$

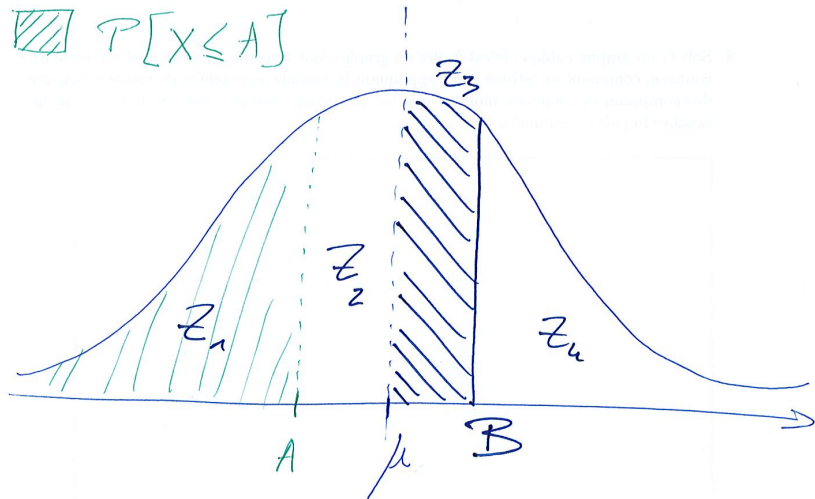
## Exercice 2 : Loi Normale, Résolution

On cherche donc :

$$\mathbb{P}[\text{oui gagne}] = \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \in \left[-\frac{k}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}\right]\right]$$

avec :  $k = 4.10^3$  et  $n = 10^6$

## Exercice 2 : Loi Normale, Résolution



## Exercice 2 : Loi Normale, Résolution

On cherche donc :

$$\mathbb{P}[\text{oui gagne}] = \mathbb{P} \left[ \mathcal{N}(0, 1) \in \left[ -\frac{k}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} \right] \right]$$

avec :  $k = 4 \cdot 10^3$  et  $n = 10^6$

En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{oui gagne}] &= \mathbb{P} [\mathcal{N}(0, 1) \in [-4, 10^3]] \\ &= \mathbb{P} [\mathcal{N}(0, 1) \in [-\infty; 10^3]] - \mathbb{P} [\mathcal{N}(0, 1) \in [-\infty; -4]] \\ &= 1 - \mathbb{P} [\mathcal{N}(0, 1) \in [4; +\infty]] \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P} [\mathcal{N}(0, 1) \in [-\infty; 4]]) \\ &= 1 - (1 - 1) = \boxed{1} \end{aligned}$$

## Exercice 3 : Question 1

### Traduire l'énoncé

On cherche  $\sigma$  sachant que :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0, 1] = 0, 1$$

### Se ramener à la loi normale centrée réduite

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0, 1] = \mathbb{P}[|\sigma\mathcal{N}(0, 1)| > 0, 1] = \mathbb{P}\left[|\mathcal{N}(0, 1)| > \frac{1}{10\sigma}\right]$$

Soit  $x = \frac{1}{10\sigma}$ . On a :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x] = 0, 1$$

## Exercice 3 : Question 1

### Traduire l'énoncé

On cherche  $\sigma$  sachant que :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x] = 0,1 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{10\sigma}$$

Symétrie en 0 donc :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x] = 2 \cdot \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) > x]$$

Et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq x] &= 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) > x] = 1 - \frac{\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x]}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0.95\end{aligned}$$

Pour quel  $x$ ,  $\mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq x] \simeq 0.95$  ? La table donne :  $x \simeq 1.64$ .

$$\sigma \simeq \frac{0,1}{1,64} \simeq \boxed{0,06}$$

## Exercice 1 : Question 2

### Traduction de l'énoncé

On cherche :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0,2]$$

Avec les mêmes raisonnements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0,2] &= \mathbb{P}\left[|\mathcal{N}(0, 1)| > \frac{1}{20\sigma}\right] = 2 \cdot \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) > \frac{1}{20\sigma}\right] \\ &= 2 \left(1 - \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{1}{20\sigma}\right]\right) \\ &\simeq 2(1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq 0,83])\end{aligned}$$

D'après la table :

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq 0,83] \simeq 0,79673$$

Donc :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0,2] \simeq 0,20327$$

## Exercice 1 : Question 3

### Traduction de l'énoncé

Similairement à la question 1, on cherche  $a$  de sorte que :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > a] = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > a] &= \mathbb{P}\left[|\mathcal{N}(0, 1)| > \frac{a}{\sigma}\right] = 2 \cdot \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) > \frac{a}{\sigma}\right] \\ &= 2 \left(1 - \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{a}{\sigma}\right]\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{a}{\sigma}\right] = \frac{39}{40} = 0,975$$

D'après la table,  $\frac{a}{\sigma} \simeq 1,96$ . Donc :

$$a \simeq 0,12$$