

Séance de révisions

L3 Miage : Probabilités

A. Lentz

Formule des probabilités totales

Si $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ partition de l'univers, on a :

$$A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n) \text{ (union disjointe)}$$

Donc :

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[B_i] \mathbb{P}[A|B_i]$$

Formule de Bayes

- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[B] \mathbb{P}[A|B]$
- $\mathbb{P}[B \cap A] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B|A]$

Donc :

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B|A]}{\mathbb{P}[B]}$$

Formule de la variance

Par définition :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Or :

$$(X - \mathbb{E}[X])^2 = X^2 - 2 \cdot X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2 \cdot X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\end{aligned}$$

Exercice sur la formule de Bayes (Exercice 6 du TD 5)

Une pochette contient deux dés.

- l'un est parfaitement équilibré,
- mais le second donne un 6 une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées).

Questions

On tire au hasard un dé dans la pochette et on le lance.

- 1 On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré?
- 2 On a obtenu un 5. Même question.

Notations

On pose les notations suivantes :

- $E =$ "on a tiré le dé équilibré",
- $T =$ "on a tiré le dé truqué",
- pour $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $i =$ "le dé est tombé sur la face i ".

Notations

On pose les notations suivantes :

- E = "on a tiré le dé équilibré",
- T = "on a tiré le dé truqué",
- pour $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, i = "le dé est tombé sur la face i ".

Données de l'énoncé

L'énoncé nous donne :

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[T] = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \mathbb{P}[6|E] = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \mathbb{P}[5|E] = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \mathbb{P}[6|T] = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \mathbb{P}[5|T] = \frac{1}{5} \cdot \mathbb{P}[\bar{6}|T] = \frac{1}{10}$$

Question 1

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}[E|G] = \frac{\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[G]} \mathbb{P}[G|E]$$

Question 1

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}[E|6] = \frac{\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[6]} \mathbb{P}[6|E]$$

Calcul du dénominateur

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[6] &= \mathbb{P}[6 \cap E] + \mathbb{P}[6 \cap T] \\ &= \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[6|E] + \mathbb{P}[T] \cdot \mathbb{P}[6|T] \quad (\text{formule des probabilités totales}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Question 1

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}[E|6] = \frac{\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[6]} \mathbb{P}[6|E]$$

Calcul du dénominateur

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[6] &= \mathbb{P}[6 \cap E] + \mathbb{P}[6 \cap T] \\ &= \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[6|E] + \mathbb{P}[T] \cdot \mathbb{P}[6|T] \quad (\text{formule des probabilités totales}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}[E|6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

Question 2

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}[E|5] = \frac{\mathbb{P}[E]}{\mathbb{P}[5]} \mathbb{P}[5|E]$$

Calcul du dénominateur

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[5] &= \mathbb{P}[5 \cap E] + \mathbb{P}[5 \cap T] \\ &= \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[5|E] + \mathbb{P}[T] \cdot \mathbb{P}[5|T] \quad (\text{formule des probabilités totales}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}[E|5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{8}$$

Exercice sur les proba discrètes

Pour vous détendre après le devoir, vous allez vous promener à la réserve écologique des barails. L'absence d'entretien ne vous permet pas de voir où vous mettez les pieds. A chaque pas, vous avez une probabilité de $\frac{1}{2}$ de croiser un animal étrange. Si vous rencontrez un animal, il peut s'agir :

- soit d'un *Saquedeneu* avec une probabilité de $\frac{3}{10}$,
- soit d'un *Akwakwak* avec probabilité de $\frac{1}{2}$,
- soit d'un *Zarbi*.

Les pas sont indépendants.

Exercice sur les proba discrètes

Pour vous détendre après le devoir, vous allez vous promener à la réserve écologique des barails. L'absence d'entretien ne vous permet pas de voir où vous mettez les pieds. A chaque pas, vous avez une probabilité de $\frac{1}{2}$ de croiser un animal étrange. Si vous rencontrez un animal, il peut s'agir :

- soit d'un *Saquedeneu* avec une probabilité de $\frac{3}{10}$,
- soit d'un *Akwakwak* avec probabilité de $\frac{1}{2}$,
- soit d'un *Zarbi*.

Les pas sont indépendants.

Notations

C : croiser un animal,

S : croiser un Saquedeneu,

A : croiser un Akwakwak,

Z : croiser un Zarbi.

Question 1

Question

Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?

Question 1

Question

Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?

Si vous croisez un *Zarbi*, c'est qu'en particulier, vous croisez un animal.

Question 1

Question

Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?

Si vous croisez un *Zarbi*, c'est qu'en particulier, vous croisez un animal.

$$\mathbb{P}[Z] = \mathbb{P}[C \cap Z]$$

Question 1

Question

Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?

Si vous croisez un *Zarbi*, c'est qu'en particulier, vous croisez un animal.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z] &= \mathbb{P}[C \cap Z] \\ &= \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[Z|C]\end{aligned}$$

Question 1

Question

Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?

Si vous croisez un *Zarbi*, c'est qu'en particulier, vous croisez un animal.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z] &= \mathbb{P}[C \cap Z] \\ &= \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[Z|C] \\ &= \mathbb{P}[C] (1 - \mathbb{P}[S|C] - \mathbb{P}[A|C])\end{aligned}$$

Question 1

Question

Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?

Si vous croisez un *Zarbi*, c'est qu'en particulier, vous croisez un animal.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z] &= \mathbb{P}[C \cap Z] \\ &= \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[Z|C] \\ &= \mathbb{P}[C] (1 - \mathbb{P}[S|C] - \mathbb{P}[A|C]) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Question 1

Question

Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?

Si vous croisez un *Zarbi*, c'est qu'en particulier, vous croisez un animal.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z] &= \mathbb{P}[C \cap Z] \\ &= \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[Z|C] \\ &= \mathbb{P}[C] (1 - \mathbb{P}[S|C] - \mathbb{P}[A|C]) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{10}}\end{aligned}$$

Question 2

Question

Vous faites 4 pas. Quel est l'univers des possibilités ?

Question 2

Question

Vous faites 4 pas. Quel est l'univers des possibilités ?

Pour chaque pas, on peut :

- ne rien voir (noté \bar{C}),
- voir un *Saquedeneu* (noté S),
- voir un *Akwakwak* (noté A),
- voir un *Zarbi* (noté Z).

Question 2

Question

Vous faites 4 pas. Quel est l'univers des possibilités ?

Pour chaque pas, on peut :

- ne rien voir (noté \bar{C}),
- voir un *Saquedeneu* (noté S),
- voir un *Akwakwak* (noté A),
- voir un *Zarbi* (noté Z).

L'univers est donc l'ensemble des quadruplets donc chaque élément est une des ces quatre possibilités.

$$\Omega = \left\{ (a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \{\bar{C}, S, A, Z\} \right\} = \{\bar{C}, S, A, Z\}^4$$

Question 3

Question

Quelle est la probabilité d'avoir croisé au moins un *Akwakwak* durant ces 4 pas ?

Question 3

Question

Quelle est la probabilité d'avoir croisé au moins un *Akwakwak* durant ces 4 pas ?

Passage au complémentaire :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - \mathbb{P}[\text{pas d'Akwakwak}]$$

Question 3

Question

Quelle est la probabilité d'avoir croisé au moins un *Akwakwak* durant ces 4 pas ?

Passage au complémentaire :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - \mathbb{P}[\text{pas d'Akwakwak}]$$

Les pas sont indépendants :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - (1 - \mathbb{P}[A])^4$$

Question 3

Question

Quelle est la probabilité d'avoir croisé au moins un *Akwakwak* durant ces 4 pas ?

Passage au complémentaire :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - \mathbb{P}[\text{pas d'Akwakwak}]$$

Les pas sont indépendants :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - (1 - \mathbb{P}[A])^4$$

Comme à la question 1 : $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[A|C] = \frac{1}{4}$.

Question 3

Question

Quelle est la probabilité d'avoir croisé au moins un *Akwakwak* durant ces 4 pas ?

Passage au complémentaire :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - \mathbb{P}[\text{pas d'Akwakwak}]$$

Les pas sont indépendants :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - (1 - \mathbb{P}[A])^4$$

Comme à la question 1 : $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[A|C] = \frac{1}{4}$.

Ainsi :

$$\mathbb{P}[\text{au moins un Akwakwak}] = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = 1 - \frac{3}{4^4} = 1 - \frac{81}{256} = \boxed{\frac{175}{256}}$$

Question 4

Question

Il y a 28 types de *Zarbi*, chacun ayant la forme d'une lettre de l'alphabet (ou des caractères ? et !). La distribution des types est uniforme. Montrer que la probabilité de croiser un *Zarbi* ayant la forme d'un "F" en 4 pas est de $1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4$.

Question 4

Question

Il y a 28 types de *Zarbi*, chacun ayant la forme d'une lettre de l'alphabet (ou des caractères ? et !). La distribution des types est uniforme. Montrer que la probabilité de croiser un *Zarbi* ayant la forme d'un "F" en 4 pas est de $1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4$.

Z_F : croiser un *Zarbi* de type F en un pas.

$$\mathbb{P}[Z_F] = \mathbb{P}[Z]\mathbb{P}[F|Z] = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{280} \quad (28 \text{ types possibles})$$

Question 4

Question

Il y a 28 types de *Zarbi*, chacun ayant la forme d'une lettre de l'alphabet (ou des caractères ? et !). La distribution des types est uniforme. Montrer que la probabilité de croiser un *Zarbi* ayant la forme d'un "F" en 4 pas est de $1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4$.

Z_F : croiser un *Zarbi* de type F en un pas.

$$\mathbb{P}[Z_F] = \mathbb{P}[Z]\mathbb{P}[F|Z] = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{280} \quad (28 \text{ types possibles})$$

$\mathbb{P}[\text{au moins un } \textit{Zarbi} \text{ de type } F \text{ en 4 pas}]$

Question 4

Question

Il y a 28 types de *Zarbi*, chacun ayant la forme d'une lettre de l'alphabet (ou des caractères ? et !). La distribution des types est uniforme. Montrer que la probabilité de croiser un *Zarbi* ayant la forme d'un "F" en 4 pas est de $1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4$.

Z_F : croiser un *Zarbi* de type F en un pas.

$$\mathbb{P}[Z_F] = \mathbb{P}[Z]\mathbb{P}[F|Z] = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{280} \quad (28 \text{ types possibles})$$

$\mathbb{P}[\text{au moins un } \textit{Zarbi} \text{ de type } F \text{ en 4 pas}]$

$$= 1 - \mathbb{P}[\text{pas de } \textit{Zarbi} \text{ de type } F \text{ en 4 pas}]$$

Question 4

Question

Il y a 28 types de *Zarbi*, chacun ayant la forme d'une lettre de l'alphabet (ou des caractères ? et !). La distribution des types est uniforme. Montrer que la probabilité de croiser un *Zarbi* ayant la forme d'un "F" en 4 pas est de $1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4$.

Z_F : croiser un *Zarbi* de type F en un pas.

$$\mathbb{P}[Z_F] = \mathbb{P}[Z]\mathbb{P}[F|Z] = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{280} \quad (28 \text{ types possibles})$$

$\mathbb{P}[\text{au moins un } \textit{Zarbi} \text{ de type } F \text{ en 4 pas}]$

$$\begin{aligned} &= 1 - \mathbb{P}[\text{pas de } \textit{Zarbi} \text{ de type } F \text{ en 4 pas}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\bar{Z}_F]^4 = 1 - (1 - \mathbb{P}[Z_F])^4 \end{aligned}$$

Question 4

Question

Il y a 28 types de *Zarbi*, chacun ayant la forme d'une lettre de l'alphabet (ou des caractères ? et !). La distribution des types est uniforme. Montrer que la probabilité de croiser un *Zarbi* ayant la forme d'un "F" en 4 pas est de $1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4$.

Z_F : croiser un *Zarbi* de type F en un pas.

$$\mathbb{P}[Z_F] = \mathbb{P}[Z]\mathbb{P}[F|Z] = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{280} \quad (28 \text{ types possibles})$$

$\mathbb{P}[\text{au moins un } \textit{Zarbi} \text{ de type } F \text{ en 4 pas}]$

$$= 1 - \mathbb{P}[\text{pas de } \textit{Zarbi} \text{ de type } F \text{ en 4 pas}]$$

$$= 1 - \mathbb{P}[\bar{Z}_F]^4 = 1 - (1 - \mathbb{P}[Z_F])^4$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{280}\right)^4 = \boxed{1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4} \simeq 0.014$$

Question 5

Question

Vous faites 1000 pas. Quelle est l'espérance du nombre de *Saquedeneu* que vous croiserez ?

Question 5

Question

Vous faites 1000 pas. Quelle est l'espérance du nombre de *Saquedeneu* que vous croiserez ?

- N le nombre de *Saquedeneu* rencontrés en 1000 pas.
- N_i le nombre de *Saquedeneu* rencontrés au i -ème pas.

Question 5

Question

Vous faites 1000 pas. Quelle est l'espérance du nombre de *Saquedeneu* que vous croiserez ?

- N le nombre de *Saquedeneu* rencontrés en 1000 pas.
- N_i le nombre de *Saquedeneu* rencontrés au i -ème pas.

$$\hookrightarrow N = \sum_{i=1}^{1000} N_i.$$

Question 5

Question

Vous faites 1000 pas. Quelle est l'espérance du nombre de *Saquedeneu* que vous croiserez ?

- N le nombre de *Saquedeneu* rencontrés en 1000 pas.
- N_i le nombre de *Saquedeneu* rencontrés au i -ème pas.

$$\Leftrightarrow N = \sum_{i=1}^{1000} N_i.$$

$$P[S] = P[C \cap S] = P[C]P[S|C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

Question 5

Question

Vous faites 1000 pas. Quelle est l'espérance du nombre de *Saquedeneu* que vous croiserez ?

- N le nombre de *Saquedeneu* rencontrés en 1000 pas.
- N_i le nombre de *Saquedeneu* rencontrés au i -ème pas.

$$\Leftrightarrow N = \sum_{i=1}^{1000} N_i.$$

$$P[S] = P[C \cap S] = P[C]P[S|C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}[N_i] = 0 \cdot \mathbb{P}[\bar{S}] + 1 \cdot \mathbb{P}[S] = \frac{3}{20}$$

Question 5

Question

Vous faites 1000 pas. Quelle est l'espérance du nombre de *Saquedeneu* que vous croiserez ?

- N le nombre de *Saquedeneu* rencontrés en 1000 pas.
- N_i le nombre de *Saquedeneu* rencontrés au i -ème pas.

$$\Leftrightarrow N = \sum_{i=1}^{1000} N_i.$$

$$P[S] = P[C \cap S] = P[C]P[S|C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}[N_i] = 0 \cdot \mathbb{P}[\bar{S}] + 1 \cdot \mathbb{P}[S] = \frac{3}{20}$$

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{1000} N_i\right] = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{E}[N_i] = \sum_{i=1}^{1000} \frac{3}{20} = 1000 \cdot \frac{3}{20} = \boxed{150}$$

Exercice 3 : Question 1

Traduire l'énoncé

On cherche σ sachant que :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0, 1] = 0, 1$$

Se ramener à la loi normale centrée réduite

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0, 1] = \mathbb{P}[|\sigma\mathcal{N}(0, 1)| > 0, 1] = \mathbb{P}\left[|\mathcal{N}(0, 1)| > \frac{1}{10\sigma}\right]$$

Soit $x = \frac{1}{10\sigma}$. On a :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x] = 0, 1$$

Exercice 3 : Question 1

Traduire l'énoncé

On cherche σ sachant que :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x] = 0,1 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{10\sigma}$$

Symétrie en 0 donc :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x] = 2 \cdot \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) > x]$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq x] &= 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) > x] = 1 - \frac{\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, 1)| > x]}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0.95 \end{aligned}$$

Pour quel x , $\mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq x] \simeq 0.95$? La table donne : $x \simeq 1.64$.

$$\sigma \simeq \frac{0,1}{1,64} \simeq \boxed{0,06}$$

Exercice 1 : Question 2

Traduction de l'énoncé

On cherche :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0, 2]$$

Avec les mêmes raisonnements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0, 2] &= \mathbb{P}\left[|\mathcal{N}(0, 1)| > \frac{1}{20\sigma}\right] = 2 \cdot \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) > \frac{1}{20\sigma}\right] \\ &= 2 \left(1 - \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{1}{20\sigma}\right]\right) \\ &\simeq 2(1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq 0, 83])\end{aligned}$$

D'après la table :

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}(0, 1) \leq 0, 83] \simeq 0, 79673$$

Donc :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > 0, 2] \simeq 0, 20327$$

Exercice 1 : Question 3

Traduction de l'énoncé

Similairement à la question 1, on cherche a de sorte que :

$$\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > a] = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[|\mathcal{N}(0, \sigma)| > a] &= \mathbb{P}\left[|\mathcal{N}(0, 1)| > \frac{a}{\sigma}\right] = 2 \cdot \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) > \frac{a}{\sigma}\right] \\ &= 2 \left(1 - \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{a}{\sigma}\right]\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{a}{\sigma}\right] = \frac{39}{40} = 0,975$$

D'après la table, $\frac{a}{\sigma} \simeq 1,96$. Donc :

$$a \simeq 0,12$$