

# Rappels de maths

## Probabilités, L3 MIAGE

### 1 Notions de base

#### 1.1 Notations

Soit  $u_1, u_2, \dots, u_n$  des réels. On note :

**Somme :** 
$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

**Produit :** 
$$\prod_{i=1}^n u_i = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

**Autre écriture :** 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

**Factorielle :** 
$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

**Coefficient binomial :** 
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Il s'agit du nombre de parties à  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

On peut réindicer une somme finie : par exemple

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_{n-k}$$

NB : si les sommes sont infinies (séries), il faut vérifier certaines hypothèses. Dans le cadre de ce cours, on considèrera que c'est toujours vrai.

#### 1.2 Fractions

Au vu des copies des années précédentes, il semble important de rappeler le programme de 4ème : soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0$ .

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Pour éviter d'avoir des calculs trop complexes lors de l'addition de fractions, on peut, lorsque l'on met les deux fractions sous le même dénominateur, prendre n'importe quel multiple commun de  $b$  et  $d$  (le plus petit par exemple, i.e. le ppcm).

Par exemple : 
$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$

#### 1.3 Théorie des ensembles

##### Ensembles

Un ensemble est une collection d'objet distincts. Si  $E$  un ensemble contenant deux éléments  $a$  et  $b$  avec  $a \neq b$ , on note  $E = \{a, b\} = \{b, a\}$  (l'ordre n'a aucune importance).

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B \subseteq E$  deux sous-ensembles. On rappelle que :

- l'union de deux ensembles  $A$  et  $B$  est :  
 $A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- l'intersection de deux ensembles  $A$  et  $B$  est :  
 $A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\}$

##### Exemples d'ensembles du TD

- $\{Pile, Face\}$  pour un lancer de pièce,
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  pour un lancer de dé,
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, \dots\}$  l'ensemble des entiers relatifs,
- $\mathbb{Q}$  l'ensemble des rationnels (des fractions),
- $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels. Note : les réels ne sont pas tous rationnels, par exemple :  $\pi$  ou encore  $e = \exp(1)$ .

##### Méthodes de preuves Pour montrer que :

- $A \subseteq B$ , on montre que pour tout élément  $x$  de  $A$ , on a bien :  $x \in B$ .
- $A = B$ , on montre que  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$ .
- $A \cup B = C$ , on montre que pour tout élément  $x$  de  $C$ , on a bien :  $x \in A$  ou  $x \in B$ .
- $A \cap B = C$ , on montre que pour tout élément  $x$  de  $C$ , on a bien :  $x \in A$  et  $x \in B$ .

##### Distributivité :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

##### Loi de De Morgan :

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

##### Séquence ou $n$ -uplet

Un  $n$ -uplet est une séquence de  $n$  éléments que l'on note  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Si  $n = 2$ , on parle d'un couple ; si  $n = 3$ , c'est un triplet. Attention à ne pas confondre ensemble et séquence :

- l'ordre est important pour les séquences et non pour les ensembles : si  $a \neq b$ , alors  $(a, b) \neq (b, a)$  mais  $\{a, b\} = \{b, a\}$ ,
- un élément peut être plusieurs fois présent dans une séquence :  $(a, a) \neq (a)$  mais  $\{a, a\} = \{a\}$ .

Exemple : si vous lancez une pièce 3 fois de suite, le triplet  $(Pile, Face, Pile)$  vous permet de représenter que vous avez obtenu pile puis face et enfin pile. Ce qui est différent de  $(Face, Pile, Pile)$ , où l'on commence par faire face.

## 1.4 Dérivée

Soient  $f, g$  fonctions,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ .

Fonction	Dérivée
$\lambda f(x)$	$\lambda f'(x)$
$\lambda$	0
$x^n$	$nx^{n-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'(g(x))$

## 1.5 Intégrale

Soit  $f, F, g$  fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $F' = f$  :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Si  $f, g$  dérivables : [Intégration par parties]

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Dans le cadre de ce cours, on considèrera que la propriété suivante est toujours vraie :

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b g(x) \implies f = g$$

(le vrai énoncé, disant que  $f$  et  $g$  sont égales "presque partout", n'est pas à connaître)

## 2 Outils pour les lois classiques

### 2.1 Somme arithmétique

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

### 2.2 Binôme de Newton

Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

### 2.3 Exponentielle

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\exp(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

### 2.4 Série géométrique

Pour tout  $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$  :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Si  $|x| < 1$ ,

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$