Combinatoire de déformations du centre de l'algèbre du groupe symétrique

Thèse encadrée par
Jean-Christophe Aval, Philippe Duchon, Valentin Féray

L'ensemble des permutations sur n lettres forme un groupe pour la composition, appelé groupe symétrique, et noté S_n. Le produit de S_n peut être étendu à l'espace vectoriel des combinaisons linéaires d'éléments de S_n, formant l'algèbre du groupe symétrique. Cette algèbre est le sujet de nombreux articles de recherche, tant d'un point de vue algébrique que combinatoire (les problèmes de dénombrement de cartes peuvent être formulés dans cette algèbre). Le fait que les groupes symétriques $S_n, n \in \mathbb{N}$ soient inclus les uns dans les autres est primordial : ainsi, Farahat et Higman [FH59] ont montré en 1959 que les coefficients de structure étaient des polynômes en n. Kerov et Ivanov [IK01] ont ensuite proposé une construction donnant une interprétation combinatoire des coefficients de ces polynômes (écrits dans la base des binomiaux).

Il existe de nombreuses déformations intéressantes du centre de l'algèbre du groupe symétrique : par exemple l'algèbre de Hecke du couple (S_{2n}, H_n) (H_n est le groupe hyperoctahédral, qui peut être vu comme le groupe des permutations signées), où apparaissent les dénombrements de cartes sur des surfaces non nécessairement orientables (voir [GJ96]). Un travail récent de Aker et Can établit un analogue du résultat de Farahat et Higman [AC10].

Comprendre cela de manière combinatoire en établissant un analogue du résultat de Kerov et Ivanov serait le premier objectif de la thèse.

La thèse pourrait ensuite être poursuivie dans plusieurs directions selon les choix et/ou la formation de l'étudiant :

- implémentation de ces objets (*a priori* en python *via* sage) et exploration numérique extensive dans cette algèbre.
- dénombrement de cartes non orientables (par des méthodes combinatoires ou algébriques) éventuellement en prenant en compte le paramètre de Jack.
- généralisations à d'autres algèbres, en particulier des algèbres de groupes : groupes de Coxeter de type B et D, produits en couronne, groupes symétriques à spin.
- application à des problèmes de partitions aléatoires en utilisant des méthodes de matrices aléatoires.

Références

[AC10] K. Aker and M.B. Can. Hecke Ring of (S_{2n}, H_n) : Generators and the Farahat-Higman Ring. *Arxiv preprint arXiv :1009.5373*, 2010.

[FH59] H. Farahat and G. Higman. The centres of symmetric group rings. *Proc. Roy. Soc. (A)*, 250 :212–221, 1959.

[GJ96] IP Goulden and DM Jackson. Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 48(3) :569–584, 1996.

[IK01] VN Ivanov and SV Kerov. The algebra of conjugacy classes in symmetric groups and partial permutations. *Journal of Mathematical Sciences*, 107(5) :4212–4230, 2001.