Titre : Énumération de matrices à signes alternants

Résumé :
Il s'agit d'un sujet de combinatoire.

Les matrices à signe alternants (MSA) sont des matrices carrées dont les coefficients sont 0, 1 ou -1, telles que dans chaque ligne et chaque colonne la somme des entrées vaut 1 et les entrées non nulles ont des signes qui alternent.
Ces matrices apparaissent, sous différentes incarnations, dans plusieurs problèmes de physique statistique, en particulier dans l'étude du modèle de glace carrée appelé "6-vertex model".

Les MSA ont été introduites par Mills, Robbins et Rumsey [5] qui ont conjecturé une formule donnant le nombre A_n de MSA. Après des années d'efforts, cette conjecture a été établie par Zeilberger [9], avant que Kuperberg [3] n'en donne une preuve plus courte. Son idée est d'étudier la fonction de partition du modèle de glace carrée déjà cité, afin d'en tirer la formule d'énumération recherchée. Cette preuve s'est de plus avérée adaptée à l'énumération de classes de symétrie de MSA [4,6,1].

Malgré celà , de nombreuses questions concernant l'énumération de ces objets restent ouvertes, et constituent le coeur de ce sujet : énumération des MSA invariantes par réflexion sous les deux diagonales du carré, étude du "1/N phonomenon" sur certaines classes de MSA de taille impaire [8], lien avec les partitions planes,...

Les approches pour attaquer ces questions sont variées. Citons entre autre la méthode de Kuperberg (étude de la fonction de partition d'un modèle de glace carrée) qui a déjà permis de nombreux succès dans ce domaine, l'approche par opérateurs introduite dans [2], ou en termes d'ensembles partiellement ordonnés [7].

Références :

[1] J.-C. Aval, P. Duchon, Enumeration of alternating sign matrices of even size (quasi-)nvariant under a quarter-turn rotation, FPSAC'09, DMTCS proceedings, [hal-00424488].

[2] I. Fischer, The operator formula for monotone triangles -- simplified proof and three generalizations, [arXiv:0903.4628].

[3] G. Kuperberg, Another proof of the alternating sign matrix conjecture, International Mathematics Research Notes (1996), 139-150.

[4] G. Kuperberg, Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof, Ann. of Math. (2) 156 (2002), no. 3, 835-866.

[5] W. Mills, D. Robbins, H. Rumsey, Alternating sign matrices and descending plane partitions, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 34 (1983), 340-359.

[6] A. V. Razumov, Y. G. Stroganov, Enumeration of quarter-turn symmetric alternatingsign matrices of odd order, Theoret. Math. Phys. 149 (2006) 1639â€1650.

[7] J. Striker, The poset perspective on alternating sign matrices, FPSAC'09, DMTCS proceedings, [arXiv:0905.4495v1].

[8] Y. Stroganov, 1/N phenomenon for some symmetry classes of the odd alternating sign matrices, [arXiv:0807.2520v1].

[9] D. Zeilberger, Proof of the alternating sign matrix conjecture, Electronic Journal of Combinatorics 3 (1996), R13.