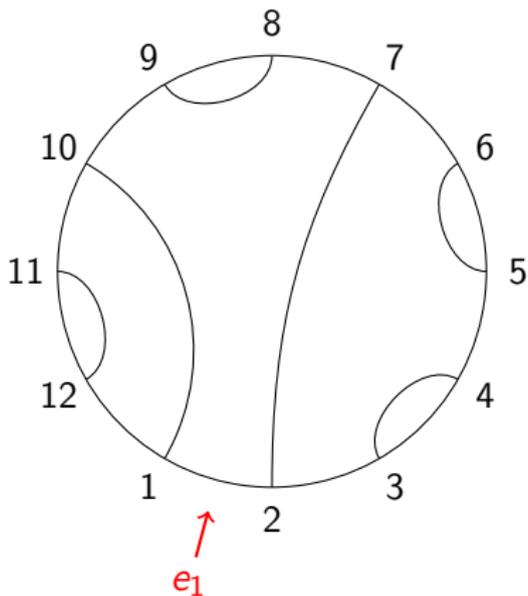


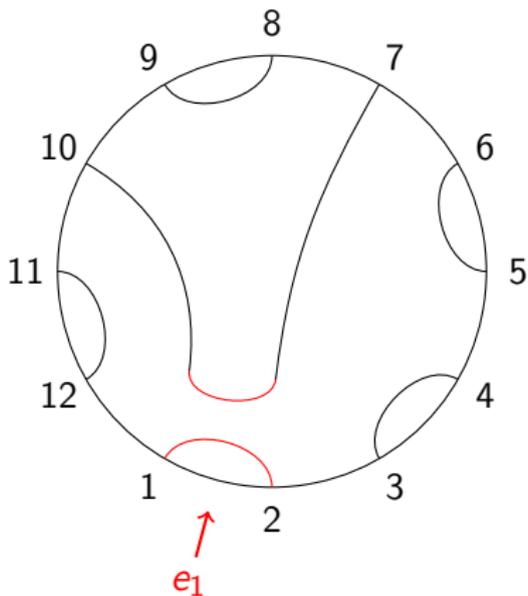
# Opérateur $e_1$

Un couplage de taille 6 (six cordes — *links*) :



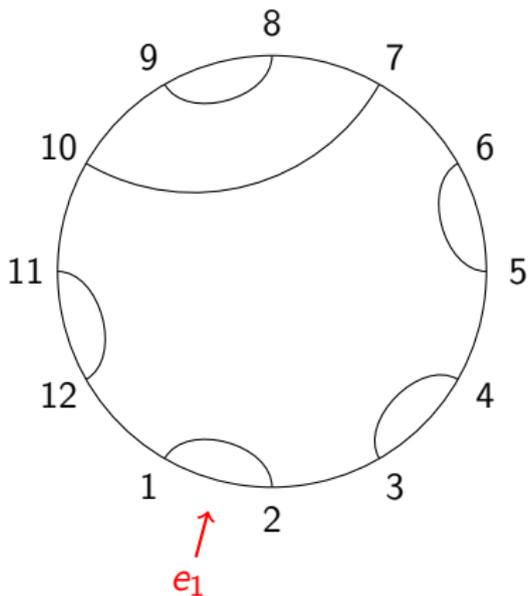
# Opérateur $e_1$

Un couplage de taille 6 (six cordes — *links*) :



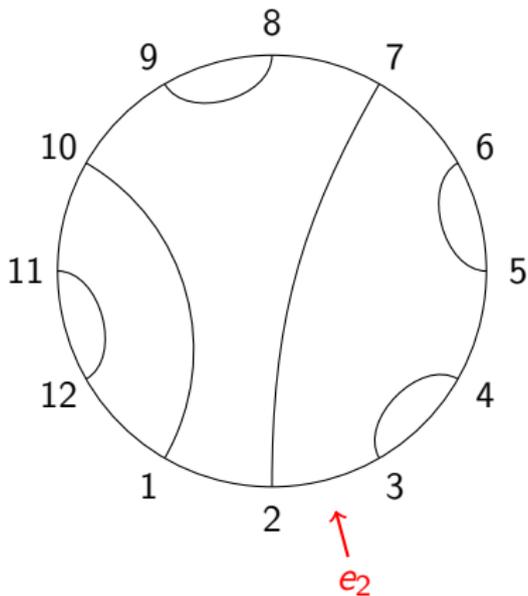
## Opérateur $e_1$

Un couplage de taille 6 (six cordes — *links*) :



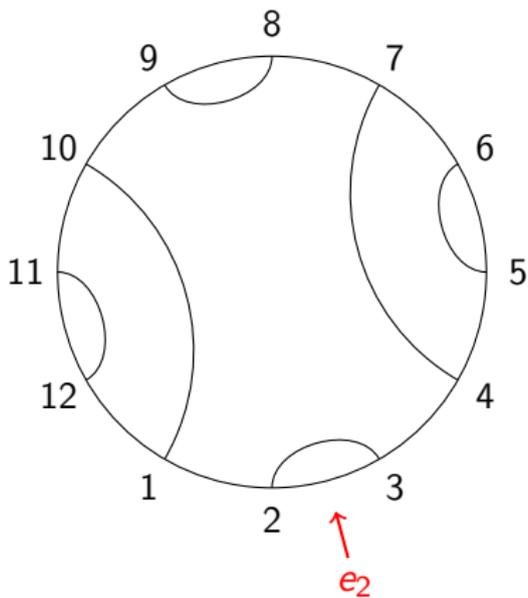
# Opérateurs $e_i$

$2n = 12$  opérateurs :



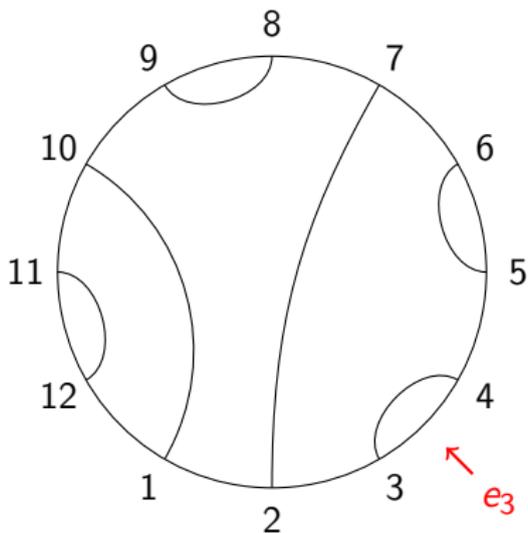
# Opérateurs $e_i$

$2n = 12$  opérateurs :



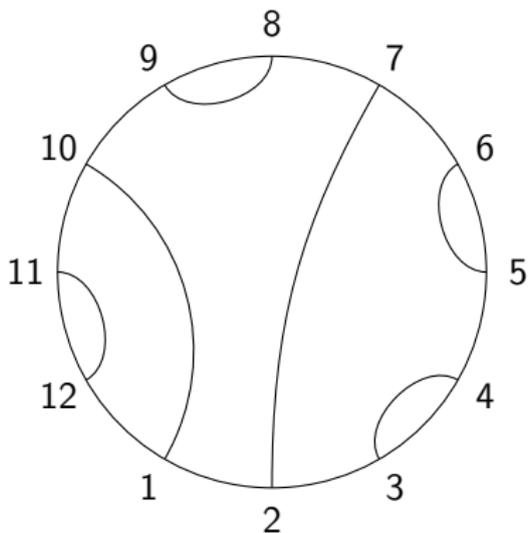
# Opérateurs $e_i$

$2n = 12$  opérateurs :



# Opérateurs $e_j$

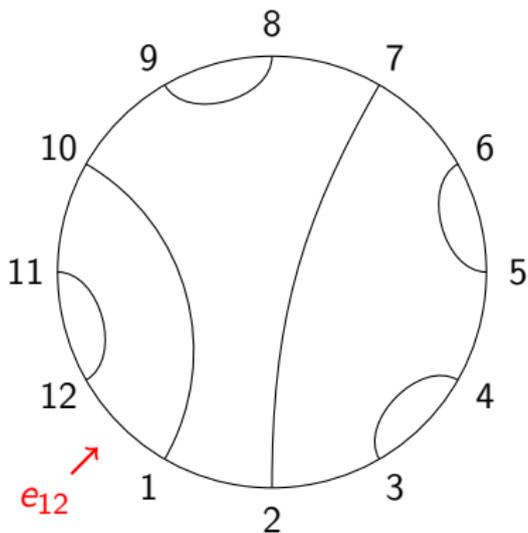
$2n = 12$  opérateurs :



etc.

# Opérateurs $e_i$

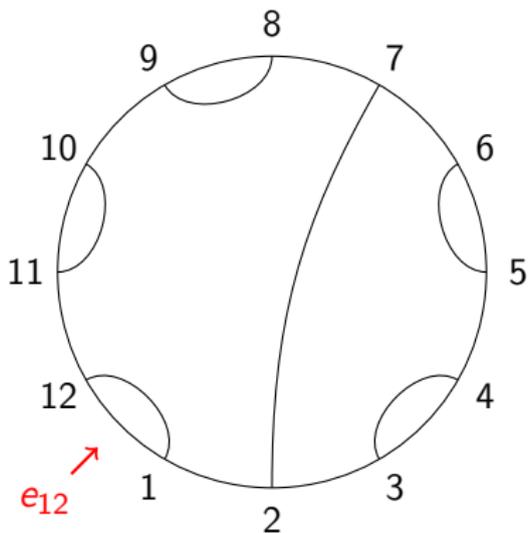
$2n = 12$  opérateurs :



etc.

# Opérateurs $e_i$

$2n = 12$  opérateurs :



etc.

# Relations

$2n$  opérateurs  $e_i$  sur un couplage de taille  $n$  :

- Relations de tresses

# Relations

$2n$  opérateurs  $e_i$  sur un couplage de taille  $n$  :

- Relations de tresses
- $e_i^2 = e_i$

# Relations

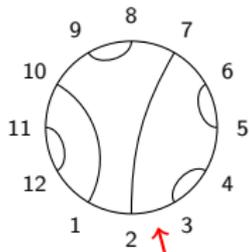
$2n$  opérateurs  $e_i$  sur un couplage de taille  $n$  :

- Relations de tresses
- $e_i^2 = e_i$
- $e_{i+1} = R e_i R^{-1}$  où  $R$  désigne la rotation d'angle  $\pi/n$

# Relations

$2n$  opérateurs  $e_i$  sur un couplage de taille  $n$  :

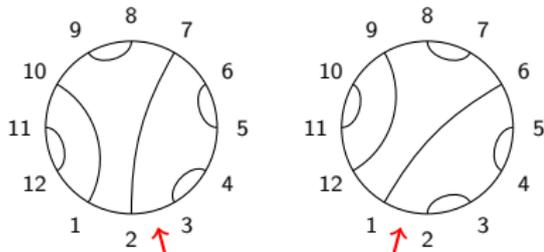
- Relations de tresses
- $e_i^2 = e_i$
- $e_{i+1} = R e_i R^{-1}$  où  $R$  désigne la rotation d'angle  $\pi/n$



# Relations

$2n$  opérateurs  $e_i$  sur un couplage de taille  $n$  :

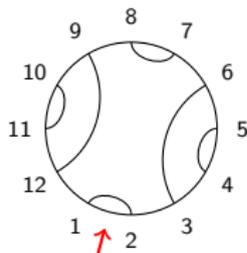
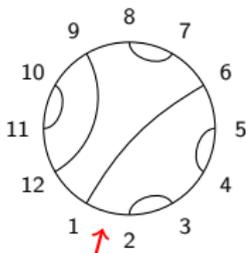
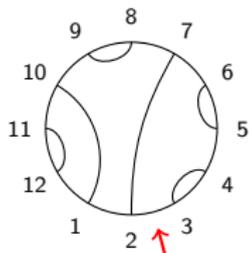
- Relations de tresses
- $e_i^2 = e_i$
- $e_{i+1} = R e_i R^{-1}$  où  $R$  désigne la rotation d'angle  $\pi/n$



# Relations

$2n$  opérateurs  $e_i$  sur un couplage de taille  $n$  :

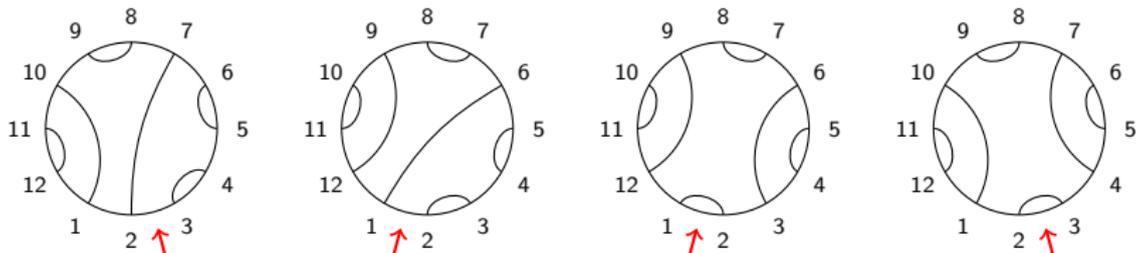
- Relations de tresses
- $e_i^2 = e_i$
- $e_{i+1} = R e_i R^{-1}$  où  $R$  désigne la rotation d'angle  $\pi/n$



# Relations

$2n$  opérateurs  $e_i$  sur un couplage de taille  $n$  :

- Relations de tresses
- $e_i^2 = e_i$
- $e_{i+1} = R e_i R^{-1}$  où  $R$  désigne la rotation d'angle  $\pi/n$



# Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{2n} e_i$$

# Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{2n} e_i$$

Exemple de calcul :

$$H \left| \begin{array}{c} \text{circle with 4 dots} \end{array} \right\rangle = 4 \left| \begin{array}{c} \text{circle with 4 dots} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{circle with 4 dots and 1 diagonal line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{circle with 4 dots and 2 diagonal lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{circle with 4 dots and 3 diagonal lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{circle with 4 dots and 4 diagonal lines} \end{array} \right\rangle$$

# Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{2n} e_i$$

Exemple de calcul :

$$H \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 circles} \end{array} \right\rangle = 4 \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 circles} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 circles and 1 line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 circles and 1 line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 circles and 1 line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 circles and 1 line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 circles and 1 line} \end{array} \right\rangle$$

Mathématicien ringard :  $H(\pi)$

# Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{2n} e_i$$

Exemple de calcul :

$$H \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes} \end{array} \right\rangle = 4 \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 1 line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 2 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 3 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 4 lines} \end{array} \right\rangle$$

Mathématicien ringard :  $H(\pi)$     Physicien branché :  $H|\pi\rangle$

# Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{2n} e_i$$

Exemple de calcul :

$$H \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes} \end{array} \right\rangle = 4 \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 1 handle} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 1 handle} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 1 handle} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere} \\ \text{with 4 holes and 1 handle} \end{array} \right\rangle$$

Mathématicien ringard :  $H(\pi)$     Physicien branché :  $H|\pi\rangle$

$\lambda$ -Informaticien :  $H\pi$

# Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^{2n} e_i$$

Exemple de calcul :

$$H \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots} \end{array} \right\rangle = 4 \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 1 line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 2 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 3 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 4 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 5 lines} \end{array} \right\rangle$$

et bien sûr par rotation :

$$H \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots} \end{array} \right\rangle = 4 \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 1 line} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 2 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 3 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 4 lines} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{Sphere with 4 dots and 5 lines} \end{array} \right\rangle$$

## Exemple de calcul (suite)

En numérotant les couplages :

$$H|\pi_1\rangle = 4|\pi_1\rangle + |\pi_4\rangle + |\pi_6\rangle + |\pi_8\rangle + |\pi_{10}\rangle$$

$$H|\pi_2\rangle = 4|\pi_2\rangle + |\pi_3\rangle + |\pi_5\rangle + |\pi_7\rangle + |\pi_9\rangle$$

## Exemple de calcul (suite)

En numérotant les couplages :

$$H|\pi_1\rangle = 4|\pi_1\rangle + |\pi_4\rangle + |\pi_6\rangle + |\pi_8\rangle + |\pi_{10}\rangle$$

$$H|\pi_2\rangle = 4|\pi_2\rangle + |\pi_3\rangle + |\pi_5\rangle + |\pi_7\rangle + |\pi_9\rangle$$

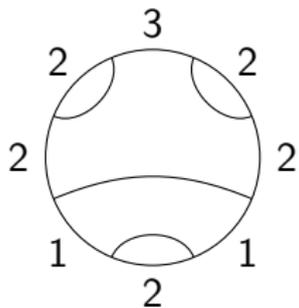
En posant :

$$|\Pi_1\rangle = |\pi_1\rangle + |\pi_2\rangle, \quad |\Pi_2\rangle = |\pi_3\rangle + \dots + |\pi_{10}\rangle$$

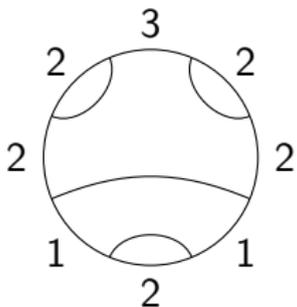
on obtient simplement :

$$H|\Pi_1\rangle = 4|\Pi_1\rangle + |\Pi_2\rangle$$

## Exemple de calcul (fin)

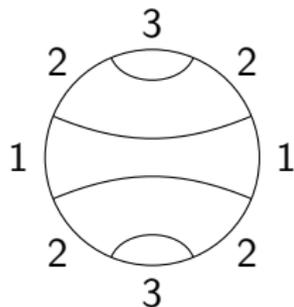
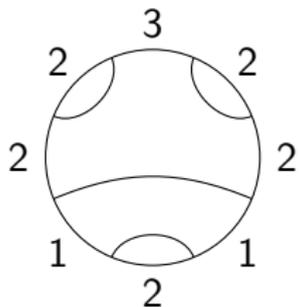


## Exemple de calcul (fin)



$$\begin{aligned} H|\Pi_2\rangle &= \frac{8 \times 2}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 5}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle \\ &= 8|\Pi_1\rangle + 5|\Pi_2\rangle + 2|\Pi_3\rangle \end{aligned}$$

## Exemple de calcul (fin)



$$\begin{aligned} H|\Pi_2\rangle &= \frac{8 \times 2}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{8 \times 5}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{8 \times 1}{4} |\Pi_3\rangle \\ &= 8|\Pi_1\rangle + 5|\Pi_2\rangle + 2|\Pi_3\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H|\Pi_3\rangle &= \frac{4 \times 2}{2} |\Pi_1\rangle + \frac{4 \times 4}{8} |\Pi_2\rangle + \frac{4 \times 2}{4} |\Pi_3\rangle \\ &= 4|\Pi_1\rangle + 2|\Pi_2\rangle + 2|\Pi_3\rangle \end{aligned}$$

# Les FPL attaquent

Soit  $\Psi(\pi)$  le nombre de FPL de couplage  $\pi$  :

$$|s\rangle = \sum_{|\pi|=n} \Psi(\pi) |\pi\rangle$$

## Les FPL attaquent

Soit  $\Psi(\pi)$  le nombre de FPL de couplage  $\pi$  :

$$|s\rangle = \sum_{|\pi|=n} \Psi(\pi) |\pi\rangle$$

Ce vecteur est la *projection* (par couplage) de :

$$||s\rangle\rangle = \sum_{|\Phi|=n} ||\Phi\rangle\rangle$$

où  $\Phi$  désigne un FPL.

# Razumov Stroganov

Enoncé :

$$H|s\rangle = 2n|s\rangle$$

# Razumov Stroganov

Enoncé :

$$H|s\rangle = 2n|s\rangle$$

Wieland :

$$R|s\rangle = |s\rangle$$

# Razumov Stroganov

Enoncé :

$$H|s\rangle = 2n|s\rangle$$

Wieland :

$$R|s\rangle = |s\rangle$$

Formule condensée pour  $n = 4$  :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# RS : Rotations et Symétrisation

Définition :

$$S = 1 + R + R^2 + \dots + R^{2n-1}$$

# RS : Rotations et Symétrisation

Définition :

$$S = 1 + R + R^2 + \dots + R^{2n-1}$$

d'où, en utilisant Wieland :

$$\begin{aligned} H|s\rangle &= \sum_{k=0}^{2n-1} R^k e_1 R^{-k} |s\rangle \\ &= S e_1 |s\rangle \\ S|s\rangle &= 2n |s\rangle \end{aligned}$$

# RS : Rotations et Symétrisation

Définition :

$$S = 1 + R + R^2 + \dots + R^{2n-1}$$

d'où, en utilisant Wieland :

$$\begin{aligned} H|s\rangle &= \sum_{k=0}^{2n-1} R^k e_1 R^{-k} |s\rangle \\ &= S e_1 |s\rangle \\ S|s\rangle &= 2n |s\rangle \end{aligned}$$

et la formule de Razumov Stroganov devient :

$$S e_1 |s\rangle = S |s\rangle$$

# RS : Rotations et Symétrisation

Définition :

$$S = 1 + R + R^2 + \dots + R^{2n-1}$$

d'où, en utilisant Wieland :

$$\begin{aligned} H|s\rangle &= \sum_{k=0}^{2n-1} R^k e_1 R^{-k} |s\rangle \\ &= S e_1 |s\rangle \\ S|s\rangle &= 2n |s\rangle \end{aligned}$$

et la formule de Razumov Stroganov devient :

$$S e_1 |s\rangle = S |s\rangle$$

On peut bien sûr remplacer  $e_1$  par n'importe quel  $e_i$  pour  $i$  fixé.

## RS : exemple

Comparer :

$$H|\pi_1\rangle = 4|\pi_1\rangle + |\pi_4\rangle + |\pi_6\rangle + |\pi_8\rangle + |\pi_{10}\rangle$$

$$H|\pi_2\rangle = 4|\pi_2\rangle + |\pi_3\rangle + |\pi_5\rangle + |\pi_7\rangle + |\pi_9\rangle$$

## RS : exemple

Comparer :

$$H|\pi_1\rangle = 4|\pi_1\rangle + |\pi_4\rangle + |\pi_6\rangle + |\pi_8\rangle + |\pi_{10}\rangle$$

$$H|\pi_2\rangle = 4|\pi_2\rangle + |\pi_3\rangle + |\pi_5\rangle + |\pi_7\rangle + |\pi_9\rangle$$

avec :

$$e_1|\pi_1\rangle = |\pi_1\rangle, \quad S e_1|\pi_1\rangle = 4|\pi_1\rangle + 4|\pi_2\rangle$$

$$e_1|\pi_2\rangle = |\pi_3\rangle, \quad S e_1|\pi_2\rangle = |\pi_3\rangle + |\pi_4\rangle + \dots + |\pi_{10}\rangle$$

## RS : exemple

Comparer :

$$H|\pi_1\rangle = 4|\pi_1\rangle + |\pi_4\rangle + |\pi_6\rangle + |\pi_8\rangle + |\pi_{10}\rangle$$

$$H|\pi_2\rangle = 4|\pi_2\rangle + |\pi_3\rangle + |\pi_5\rangle + |\pi_7\rangle + |\pi_9\rangle$$

avec :

$$e_1|\pi_1\rangle = |\pi_1\rangle, \quad S e_1|\pi_1\rangle = 4|\pi_1\rangle + 4|\pi_2\rangle$$

$$e_1|\pi_2\rangle = |\pi_3\rangle, \quad S e_1|\pi_2\rangle = |\pi_3\rangle + |\pi_4\rangle + \dots + |\pi_{10}\rangle$$

d'où en ajoutant :

$$H|\Pi_1\rangle = S e_1|\Pi_1\rangle$$

et ainsi de suite.

# Action de $e_1$ sur les couplages de taille 4

