Interpolation de Newton

Polynômes de Schubert

Équations de Yang-Baxter

Alain Lascoux

28 septembre 2002

`http ://phalanstere.univ-mlv.fr/~al`

Interpolation en une variable

La loi de la gravitation universelle repose sur des calculs numériques. On a une fonction du temps, donnée en $t = b_1, b_2, \ldots$. Newton introduit une *dérivée discrète* $f \to f^{\partial}$ et développe f :

$$f(t) = f(b_1) + f^{\partial}(t-b_1) + \\ f^{\partial\partial}(t-b_1)(t-b_2) + f^{\partial\partial\partial}(t-b_1)(t-b_2)(t-b_3) + \cdots$$

Le cas limite ($b_i = b$) est la Formule de Taylor.

Problème : Cas multivarié ?

Les différences divisées ∂_i agissant à gauche sur les variables a_i sont

$$\begin{cases} \partial_i & = & (a_i - a_{i+1})^{-1}\,(1+s_i) & = & (1-s_i)\,(a_i - a_{i+1})^{-1} \\ \pi_i & = & (1 - a_{i+1}/a_i)^{-1}\,(1+s_i) & = & a_i\partial_i \end{cases}$$

Concrètement,

$$f\,\partial_i = \frac{f(\ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots) - f(\ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots)}{a_i - a_{i+1}}$$

$$f\,\pi_i = \frac{a_i f(\ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots) - a_{i+1} f(\ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots)}{a_i - a_{i+1}}$$

Elles satisfont les relations de tresse :

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \text{ if } |i-j| \geq 2 \ , \ \partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

On a donc, pour toute permutation σ, une différence divisée ∂_σ en prenant un produit de diff. élémentaires correspondant à une décomposition réduite.

Leibnitz : $fg\partial_i = f\,(g\partial_i) + f\partial_i\, g^{s_i} = g\,(f\partial_i) + g\partial_i\, f^{s_i}$

En particulier, commutation avec les fonctions symétriques :

$$g = g^{s_i} \Rightarrow f g\, \partial_i = f \partial_i\, g$$

Action sur les fonctions complètes $S^i()$, définies par la fonction génératrice :

$$\sum S^i(\mathbb{A}_n - \mathbb{B}) = \frac{\prod_{b\in\mathbb{B}}(1-b)}{\prod_{j=1}^{n}(1-a_j)} \xrightarrow{\partial_n} \sum S^i(\mathbb{A}_{n+1} - \mathbb{B})$$

parce que $\sum S^i(\mathbb{A}_n - \mathbb{B}) = (1-a_{n+1}) \sum S^i(\mathbb{A}_{n+1} - \mathbb{B})$ et l'image de $(1-a_{n+1})$ par ∂_n est 1.

Plus généralement, action sur les fonctions de Schur :

$$S_{ijk}(\mathbb{A}_7 - \mathbb{B}; \mathbb{A}_4 - \mathbb{B}'; \mathbb{A}_2) = \begin{vmatrix} S^i(\mathbb{A}_7 - \mathbb{B}) & S^{j+1}(\mathbb{A}_4 - \mathbb{B}') & S^{k+2}(\mathbb{A}_2) \\ S^{i-1}(\mathbb{A}_7 - \mathbb{B}) & S^{j}(\mathbb{A}_4 - \mathbb{B}') & S^{k+1}(\mathbb{A}_2) \\ S^{i-2}(\mathbb{A}_7 - \mathbb{B}) & S^{j-1}(\mathbb{A}_4 - \mathbb{B}') & S^{k}(\mathbb{A}_2) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\partial_4} \quad S_{i\,j-1\,k}(\mathbb{A}_7 - \mathbb{B}; \mathbb{A}_5 - \mathbb{B}'; \mathbb{A}_2)$$

On fixe $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Une puissance modifiée $a^{<r>} = (a - b_1) \cdots (a - b_r)$ peut s'écrire $S^r(a - \mathbb{B}_r)$, un produit $a_3^{<i>} a_2^{<j>} a_1^{<k>}$ est égal à la fonction de Schur $S_{ijk}(\mathbb{A}_3 - \mathbb{B}_i, \mathbb{A}_2 - \mathbb{B}_j, \mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_k)$. Donc les images par les ∂_i sont simples à calculer, tant que les indices des $\mathbb{A}_r$ sont différents :

$$a_3^{<4>} a_2^{<4>} a_1^{<7>} = S_{447}(\mathbb{A}_3 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_2 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_7) \xrightarrow{\partial_3}$$

$$S_{347}(\mathbb{A}_4 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_2 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_7) \xrightarrow{\partial_2}$$

$$S_{337}(\mathbb{A}_4 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_3 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_7) \xrightarrow{\partial_1} S_{336}(\mathbb{A}_4 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_3 - \mathbb{B}_4, \mathbb{A}_2 - \mathbb{B}_7)$$

Polynômes de Schubert

$\mathbb{A}, \mathbb{B}$ infinis. Polynômes Y_v indicés par les $v \in \mathbb{N}^\infty$.

Axiomes • Famille stable par différences divisées.

• v dominant $\Rightarrow Y_v = \mathcal{D}_v := \prod_{(i,j)\in Diagr(v)} (a_i - b_j)$

• $Y_{\ldots v_i\, v_{i+1} \ldots} \xrightarrow{\partial_i} Y_{\ldots v_{i+1},\, v_i - 1 \ldots}$, $v_i > v_{i+1}$

Problèmes : On peut passer de v à v' par plusieurs chaînes de différences divisées. Les relations de tresses assurent la cohérence.

On obtient des polynômes dominants comme image d'autres polynômes, alors que leur valeur doit être un $\mathcal{D}_v$. Il faut contrôler leur valeur dans ce cas.

Exemple de polynôme dominant : Y_{5543}.

Le facteur contenu dans une boîte décrit les coordonnées : a_i dans ligne i, b_j dans colonne j.

a_4—b_1	a_4—b_2	a_4—b_3		
a_3—b_1	a_3—b_2	a_3—b_3	a_3—b_4	
a_2—b_1	a_2—b_2	a_2—b_3	a_2—b_4	a_2—b_5
a_1—b_1	a_1—b_2	a_1—b_3	a_1—b_4	a_1—b_5

Il faut tout d'abord décrire l'action de ∂_i sur un $\mathcal{D}_v$.

Cas élémentaire : deux lignes de longueur $k+1$, k (localement, c'est un escalier).

$$\begin{array}{|c|c|c|c} \hline a_4 - b_1 & a_4 - b_2 & a_4 - b_3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 & \multicolumn{1}{c|}{a_3 - b_4} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\partial_3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_4 - b_1 & a_4 - b_2 & a_4 - b_3 \\ \hline a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \\ \hline \end{array}$$

Graphiquement, l'action de ∂_i a consisté à effaçer une boîte, parce que les longueurs des lignes différaient de 1.

Cas général : il faut montrer que si un dominant s'obtient à partir d'un autre, il est bien égal à un produit décrit par un diagramme.

Il suffit de prendre une paire consistant en un escalier, et une partition contenue dans icelui.

Partition $[6, 6, 6, 2, 2]$. On part de l'escalier $\rho = [8, 7, \ldots, 1]$ et du polynôme $\mathcal{D}_\rho$. Alors, si l'on prend la suite de différences divisées indiquée par les hauteurs des boîtes, leur action consiste à effacer les boites, car la condition de longueur est satisfaite à chaque étape.

7							
12	6						
14	11	5					
		10	4				
		13	9	3			
						2	
						8	1

La définition des polynômes de Schubert est donc consistante.

De ces polynômes, nous n'aurons besoin que de quelques propriétés d'annulation. Notons l' incrément des indices dans les alphabets ou vecteurs $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^+ = \{a_2, a_3, \ldots\}$.

Lemme Lorsque l'on spécialise a_1 en b_1, alors Y_v spécialise en $Y_{v^+}(\mathbb{A}^+, \mathbb{B}^+)$ si $v_1 = 0$, et s'annule sinon.

Il suffit de traiter le cas $v_2 \geq v_3 \geq v_4 \geq \cdots$. Par exemple $Y_{355\,32}$ qui provient de $Y_{663\,32}$ par $\partial_2\partial_1$. Mais $Y_{663\,32} = (a_1 - b_1) \cdots (a_5 - b_1) Y_{55221}$. Le facteur est symétrique en a_1, a_2, a_3, et donc se retrouve dans $Y_{355\,32}$ qui s'annule donc. Dans le cas Y_{0552}, qui provient de $Y_{663} = S_{366}(\mathbb{A}_3 - \mathbb{B}_3, \mathbb{A}_2 - \mathbb{B}_6, \mathbb{A}_1 - \mathbb{B}_6)$, on trouve $Y_{0552} = S_{255}(\mathbb{A}_4 - \mathbb{B}_3, \mathbb{A}_3 - \mathbb{B}_6, \mathbb{A}_2 - \mathbb{B}_6)$, qui spécialise bien en le polynôme dominant $Y_{552}(\mathbb{A}^+, \mathbb{B}^+)$.

Conséquence : Tout polynôme de Schubert s'annule sous la spécialisation $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, sauf $Y_0 = 1$. Notation pour les produits de ∂_i :
Pour $K = [k_1, k_2, \ldots] \in \mathbb{N}^n$, soit

$$\partial^K := \cdots (\partial_3 \cdots \partial_{k_3+2})(\partial_2 \cdots \partial_{k_2+1})(\partial_1 \cdots \partial_{k_1})$$

Ce produit est choisi pour que $Y_K \partial^K = Y_0$. Par exemple, pour $K = [2, 0, 4, 1]$, on a $\partial^{2041} = (\partial_4)(\partial_3\partial_4\partial_5\partial_6)(\ )(\partial_1\partial_2)$
et $Y_{2041} \xrightarrow{\partial_4} Y_{204} \xrightarrow{\partial_3\partial_4\partial_5\partial_6} Y_{20} \xrightarrow{\partial_1\partial_2} Y_0$. Chaque différence divisée translate vers la droite une composante non nulle, en la décrémentant.

On vérifie aisément que $Y_J\, \partial^K \neq Y_0$ si $J \neq K$.

Théorème Pour tout polynôme en $\mathbb{A}$, on a

$$f(\mathbb{A}) = \sum_{K \in \mathbb{N}^\infty} f\partial^K(\mathbb{B})\, Y_K(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \ .$$

C'est une propriété linéaire en f. On peut la tester sur une base, par exemple la base Schubert. L'image d'un polynôme de Schubert par un ∂^K est soit 0, soit un autre polynôme de Schubert, qui s'annule en $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, sauf s'il est égal à Y_0. Donc dans le cas $f(A) = Y_J(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, il ne reste dans la somme de droite que le terme $Y_J\partial^J(\mathbb{B}, \mathbb{B})\, Y_J(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.
QED

Dans la cas de $f = a_1^3 a_2$, on aura par exemple le développement

$$f = f\,Y_{00} + f\partial_2\,Y_{01} + f\partial_1\,Y_{10} + f\partial_1\partial_2\,Y_{20} + f\partial_2\partial_1\,Y_{11} \\ + f\partial_1\partial_2\partial_3\,Y_{30} + f\partial_2\partial_1\partial_2\,Y_{21} f\partial_2\partial_1\partial_2\partial_3\,Y_{31}\ ,$$

$$a_1^3 a_2 = b_1^3 b_2\,Y_{00} + b_1^3\,Y_{01} + (b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2)\,Y_{10} + (b_1^2 + b_1 b_2 + b_1 b_3)\,Y_{20} \\ + (b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2)\,Y_{11} + b_1\,Y_{30} + (b_1 + b_2 + b_3)\,Y_{21} + Y_{31}\ .$$

Dans le cas des fonctions d'une variable, on retrouve bien la formule de Newton. Les seuls $f(a_1)\,\partial^K$ ayant une chance d'être non nuls sont $f(a_1)\,\partial^n = f(a_1)\,\partial_1 \cdots \partial_n$, et leurs facteurs sont les $Y_{n,0,\ldots} = (a_1 - b_1)\,(a_1 - b_2) \cdots (a_1 - b_n)$. Ainsi donc

$$f(a_1) = f(b_1) + f\partial_1(b_1, b_2)\, Y_1(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + \cdots + \\ f\partial_1 \cdots \partial_n(b_1, \ldots, b_n)\, Y_n(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + \cdots$$

Le cas des fonctions symétriques a été étudié indépendamment. Le théorème implique $f(\mathbb{A}_n) = \sum_I \; c_I Y_I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$. Si f symétrique, alors tous les I dans le développement sont du type $I = [i_1 \leq \cdots \leq i_n, 0, \ldots]$ (grassmannien). S'il y avait au moins un terme qui ne soit pas de ce type, en prenant le maximum et la différence divisée qui l'envoie sur Y_0, on aurait une contradiction.

Pour ces I, $Y_I(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ est symétrique en $a_1, \ldots, a_n$, mais pas en les b_i. Quand $\mathbb{B}$ est spécialisé en $\{0, 1, 2, \ldots\}$, ce sont les Fonctions de Schur factorielles de Biedenharn et Louck.

On peut les retrouver, ainsi que leur interprétation en terme de tableaux, en utilisant uniquement la formule de Leibnitz.

On code des produits de $(a_i - b_j)$ par des diagrammes :

$$\square\square \bullet \bullet\square \bullet \; \square = (a_1 - b_1)(a_1 - b_2) \bullet \bullet (a_3 - b_5) \bullet \; (a_4 - b_7)$$

L'action de ∂_1 sur $Y_4 = \square\square\square\square$ se visualise :
$Y_{03} = \square\square\square\bullet + \square\square\bullet\square + \square\bullet\square\square + \bullet\square\square\square$.

Par ∂_2, on remplace de toutes les manières une boîte par $\bullet$:
$Y_{02} = \square\square\bullet\bullet + \square\bullet\square\bullet + \bullet\square\square\bullet + \square\bullet\bullet\square + \bullet\square\bullet\square + \bullet\bullet\square\square$,

parce que $(a_i - b_j)\partial_i = 1 + \partial_i\,(a_{i+1} - b_j)$, i.e. $\square\,\partial_i = \bullet + \partial_i\,\square$.

Plus généralement, on obtiendra la fonction de Schur factorielle d'indice une partition λ comme la somme de tous les tableaux de Young de forme λ, l'entree i dans la diagonale c devant être interprétée comme un facteur $(a_i - b_{i+c})$.

Par exemple, le tableau $\begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$ dans le développement de S_{123}

sera remplacé par

$$\begin{array}{lll} a_4 - b_{4-2} & & \\ a_2 - b_{2-1} & a_4 - b_{4-0} & \\ a_1 - b_{1-0} & a_3 - b_{3+1} & a_3 - b_{3+2} \end{array}$$

Polynômes de Schubert et Anneau des polynômes

On veut étudier l'anneau des polynômes en $\mathbb{A}$, en bénéficiant de la combinatoire des fonctions symétriques.Pour $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\mathfrak{Pol}(\mathbb{A})$ est un module sur $\mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$. Il est connu depuis un siècle que c'est un module libre de base $\{a^I,\, I \le \rho := [n{-}1, \ldots, 0]\}$.

Plus judicieux d'utiliser un second alphabet $\mathbb{B}$ et d'identifier les fonctions symétriques de $\mathbb{A}$ à celles de $\mathbb{B}$.

$$\mathfrak{Pol}(\mathbb{A}) = \mathbb{Q}[\mathbb{A}, \mathbb{B}]/\big(f(\mathbb{A}) = f(\mathbb{B}) : f \in \mathfrak{Sym}\big)$$

Pour définir une forme quadratique, on utilise l' antisymétriseur de Cauchy-Jacobi : $f \to \frac{1}{\Delta(\mathbb{A})} \sum_{\sigma} (-1)^{\ell(\sigma)} f^{\sigma}$. Il est en fait égal à la différence divisée maximale ∂_{ω}.

Preuve : on teste sur la base $\{a^I,\, I \le \rho\}$. Tous les monômes sont envoyés sur 0, sauf a^{ρ} qui est envoyé sur une constante (qui est 1 pour les deux opérateurs).

Forme quadratique :

$$\mathfrak{Pol}(\mathbb{A}) \ni f, g \Rightarrow (f\,,\, g) = (fg\,,\, 1) := f g\, \partial_\omega \in \mathfrak{Sym}(\mathbb{A})$$

Lemme 1 *Les ∂_i, $i = 1, \ldots, n-1$ sont auto-adjoints. Donc $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{A})$, ∂_σ est adjoint à $\partial_{\sigma^{-1}}$. De plus σ est adjoint de $(-1)^{\ell(\sigma)}\sigma^{-1}$*

Preuve : Pour tout i, on factorise $\partial_\omega = \partial_i \partial_\sigma$.

$$(f\partial_i, g) = \big((f\partial_i)g\big)\partial_i\partial_\sigma = \big((f\partial_i)(g\partial_i)\big)\partial_\sigma$$

La symétrie f, g conclut.

Noyau : $K_n(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \prod_{n \geq i > j \geq 1}(a_i - b_j)$

Propriété essentielle : $K_n(\mathbb{A}^{\sigma}, \mathbb{B})\Big|_{\mathbb{A}=\mathbb{B}} = 0$, $\sigma \neq 1$ et $K_n(\mathbb{B}, \mathbb{B}) = \Delta(\mathbb{B})$.

Proposition 1 *Pour tout* $f \in \mathfrak{Pol}(\mathbb{A})$, $\big(f(\mathbb{A})\,,\, K_n(\mathbb{A}, \mathbb{B})\big) \equiv f(\mathbb{B})$

Preuve : Il suffit de tester sur $f = a^I, I \leq \rho$. Dans ce cas fK est une somme de monômes d'exposant $\leq [n{-}1, \ldots, n{-}1]$, qui sont envoyés sur $0, \pm 1$ par ∂_ω, donc l' image ne dépend pas de $\mathbb{A}$. On peut donc spécialiser $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ dans la somme $\sum \pm (fK)^{\sigma}$, il ne reste que le terme $f(\mathbb{B})K(\mathbb{B}, \mathbb{B})$.

On change l'indexation des polynômes de Schubert, en n'utilisant que les $Y_I : I \leq \rho$. On préfère les indexer par les permutations dans $\mathfrak{S}_n$, en les notant $\mathbb{X}_\sigma$ (correspondance code $\leftrightarrow$ permutation).

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \prod_{1 \leq i,j \leq n,\, i+j \leq n} (a_i - b_j) \\ \mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, \mathbb{B})\, \partial_{\omega\sigma} \end{aligned} \right.$$

Tous les polynômes proviennent du même polynôme dominant $\mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.

Les polynômes de Schubert permettent d' exprimer les différences divisées par produit scalaire.

Théorème 1 *Pour tout f, toute σ,*

$$\big(f(\mathbb{A})\,,\ \mathbb{X}_{\sigma\omega}(\mathbb{A}^{\omega},\mathbb{B})\big) \equiv f\,\partial_{\sigma^{-1}}\,(\mathbb{B})\ \ .$$

Preuve : $\mathbb{X}_{\sigma\omega}(\mathbb{A}^{\omega},\mathbb{B}) = \mathbb{X}_{\omega}(\mathbb{A},\mathbb{B})\,\partial_{\omega\sigma\omega}\,\omega = \mathbb{X}_{\omega}(\mathbb{A},\mathbb{B})\omega\,\big(\omega\partial_{\omega\sigma\omega}\,\omega\big) =$ $\mathbb{X}_{\omega}(\mathbb{A},\mathbb{B})\,\omega\,\partial_{\sigma}$. On peut faire passer à gauche ∂_{σ} dans $\big(f(\mathbb{A})\,,\ \mathbb{X}_{\omega}(\mathbb{A}^{\omega},\mathbb{B})\partial_{\sigma}\big)$, on est ramené au cas de la proposition : $K(\mathbb{A},\mathbb{B})$ est un noyau reproducteur.

Les produits scalaires avec les polynômes de Schubert permettent donc d'évaluer des expressions dans l'algèbre des différences divisées. Le théorème permet d'expliciter le module $\mathfrak{Pol}(\mathbb{A})$.

Corollaire 1 *La forme quadratique est non dégénérée. $\mathfrak{Pol}(\mathbb{A})$ est un module libre de base $\mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A},\mathbb{B})$ et base adjointe les $\mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A}^\omega,\mathbb{B})$:*

$$\big(\mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A},\mathbb{B})\,,\,\mathbb{X}_{\nu\omega}(\mathbb{A}^\omega,\mathbb{B})\big) = \delta_{\sigma,\nu}\ .$$

Tout $f \in \mathfrak{Pol}$ se décompose

$$f(\mathbb{A}) \equiv \sum_\sigma \big(f\,,\,\mathbb{X}_{\sigma\omega}(\mathbb{A}^\omega,\mathbb{B})\big)\mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A},\mathbb{B})$$
$$\equiv \sum_\sigma f\partial_{\sigma^{-1}}(\mathbb{B})\,\mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A},\mathbb{B})$$

La décomposition fait intervenir des fonctions symétriques de $\mathbb{A}$ en coefficient, ce n'est pas la même que dans l'interpolation de Newton quand les coefficients ne sont pas seulement des scalaires.

L'alphabet $\mathbb{B}$ est arbitraire ; chaque $\mathbb{B}$ donne une base de Schubert différente. Les matrices de changement de base sont encore données par les polynômes de Schubert.

Théorème 2 *Soient* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ *trois alphabets, et* $\zeta \in \mathfrak{S}(n)$. *Alors*

$$\mathbb{X}_{\zeta}(\mathbb{A}, \mathbb{C}) = \sum_{\sigma, \eta} \mathbb{X}_{\eta}(\mathbb{B}, \mathbb{C})\, \mathbb{X}_{\sigma}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \ ,$$

somme sur toutes les factorisations réduites $\zeta = \eta\sigma$.

Preuve : on applique le corollaire à la fonction $f(\mathbb{A}) = \mathbb{X}_{\zeta}(\mathbb{A}, \mathbb{C})$.

Par exemple, pour $\zeta = [2,4,1,3]$, le développement est

$$\mathbb{X}_{2413}(\mathbb{A},\mathbb{C}) = \begin{array}{c} \mathbb{X}_{2413}(\mathbb{B},\mathbb{C})\mathbb{X}_{1234}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \\ -\mathbb{X}_{2143}(\mathbb{B},\mathbb{C})\mathbb{X}_{1324}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \\ +\mathbb{X}_{1243}(\mathbb{B},\mathbb{C})\mathbb{X}_{2314}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \ + \ \mathbb{X}_{2134}(\mathbb{B},\mathbb{C})\mathbb{X}_{1423}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \\ -\mathbb{X}_{1234}(\mathbb{B},\mathbb{C})\mathbb{X}_{2413}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \end{array} .$$

Le plongement $\mathfrak{S}_{n-1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n-1} \times \mathfrak{S}_1$ préserve les polynômes. Par contre $\mathfrak{S}_{n-1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{n-1}$ n'est pas trivial. On note '+' les shifts $\sigma \to \sigma^+ = [1, \sigma_1+1, \ldots, \sigma_{n-1}+1]$, $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^+ = \{a_2, a_3, \ldots\}$.

Proposition 2 *Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_{\sigma^+}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{B}^+)\,(a_1 - b_1)\cdots(a_n - b_1)\,\partial_n \cdots \partial_1 \ , \\ &= \mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{B}^+)\,\big(1 + \partial_n(a_{n+1} - b_1)\big)\cdots\big(1 + \partial_1(a_2 - b_1)\big) \ . \end{aligned}$$

Preuve : Il sufft de traiter le cas $\sigma = \omega = [n, \ldots, 1]$.

$$\mathbb{X}_{\omega^+}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \mathbb{X}_{n+1,\ldots,1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})\,\partial_n \cdots \partial_1 = \\ \mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, \mathbb{B}^+)(a_1 - b_1)\cdots(a_n - b_1)\partial_n \cdots \partial_1 \ ,$$

la première formule est vérifiée. Avec Leibnitz,

$$(a_1 - b_1)\cdots(a_n - b_1)\,\partial_n = \Big(1 + \partial_n(a_{n+1} - b_1)\Big)(a_1 - b_1)\cdots(a_{n-1} - b_1) \ ,$$

on obtient la seconde.

Le résultat précédent peut être traduit en fonction génératrice. L'algèbre NilCoxeter $\mathfrak{NC}_n$ est l'algèbre engendrée par $u_1, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant les relations de tresse, ainsi que $u_i^2 = 0$.

Le NilNoyau de Cauchy est $\mathfrak{NK}_n(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{B})\, u_\sigma$. Par itération de la décomposition $\mathbb{A} = \{a_1\} \cup \mathbb{A}^+$, on obtient

Théorème 3

$$\mathfrak{NK}_n(\mathbb{A}, \mathbb{C}) = \mathfrak{NK}_n(\mathbb{B}, \mathbb{C})\, \mathfrak{NK}_n(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \ .$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathfrak{NK}_n(\mathbb{A}, \mathbb{C}) &= \mathfrak{NK}_n(0, \mathbb{C})\, \mathfrak{NK}_n(\mathbb{A}, 0) \ , \\ 1 &= \mathfrak{NK}_n(0, \mathbb{A})\, \mathfrak{NK}_n(\mathbb{A}, 0) \ . \end{aligned}$$

Cette décomposition peut elle même se traduire par une factorisation :

Proposition 3

$$\mathfrak{N}\mathfrak{K}_n(\mathbb{A},0) = (1 + a_1 u_{n-1}) \cdots (1 + a_1 u_1) \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{n-1}} X_\nu(\mathbb{A}^+)\, u_\nu^+$$

Preuve : traduction du cas $\mathbb{B} = \{a_1, 0, 0, \ldots\}$, $\mathbb{C} = \{0, 0, \ldots\}$.

En itérant, on trouve les factorisations de Fomin-Stanley et Fomin-Kirillov

$$\mathfrak{N}\mathfrak{K}_n(\mathbb{A},0) = \Big((1{+}a_1 u_{n-1}) \cdots (1{+}a_1 u_1)\Big)\Big((1{+}a_2 u_{n-1}) \cdots (1{+}a_2 u_2)\Big) \cdots \Big((1{+}a_{n-1} u_{n-1})\Big)$$

En représentant les facteurs planairement (lire par colonnes successives ; on peut aussi lire par lignes) :

$$\begin{array}{lll}
(1{+}(a_1{-}b_3)u_3) & & \\
(1{+}(a_1{-}b_2)u_2) & (1{+}(a_2{-}b_2)u_3) & \\
(1{+}(a_1{-}b_1)u_1) & (1{+}(a_2{-}b_1)u_2) & (1{+}(a_3{-}b_1)u_3)
\end{array}$$

Le développement fait intervenir tous les sous-mots de $(u_3u_2u_1)(u_3u_2)(u_3)$, mais la pondération choisie donne des coefficients signifiants, au lieu de multiplicités inutilisables quand on prend la définition de Bourbaki de l'ordre de Bruhat.

L'escalier précédent ne vérifie pas les conditions de Yang-Baxter qui sont des conditions locales sur les paramètres contenus dans un tableau planaire :

$$\begin{array}{cc} \alpha & \\ \alpha+\beta & \beta \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{cc} \alpha & \alpha+\beta \\ & \beta \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{cc} \alpha & \gamma \\ \alpha+\beta-\gamma & \beta \end{array}$$

Néanmoins, Fomin-Kirillow-Stanley se servent des relations de Yang-Baxter pour montrer que $\mathfrak{N}\mathfrak{K}_n$ est la fonction génératrice des polynômes de Schubert.

On a des développements plus fins en remplaçant les relations de Coxeter par les relations nilplaxiques :

$$\begin{array}{cc} u_i & u_{i+1} \\ & u_i \end{array} \equiv \begin{array}{cc} u_{i+1} & \\ u_i & u_{i+1} \end{array}$$

et, pour $i < j < k$,

$$\begin{array}{cc} u_j & \\ u_i & u_k \end{array} \equiv \begin{array}{cc} u_j & u_k \\ & u_i \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{cc} u_k & \\ u_i & u_j \end{array} \equiv \begin{array}{cc} u_i & u_k \\ & u_j \end{array}$$

On embraye alors sur une combinatoire des tableaux de Young, algorithme de Schensted, jeu de taquin fort commune en théorie des fonctions symétriques et des représentations du groupe symétrique.

Le développement du noyau de Cauchy fait apparaître maintenant les caractères de Demazure (définis en faisant agir les différences divisées isobares π_σ sur les monômes dominants).

Cela implique que les polynômes de Schubert sont des sommes positives de caractères de Demazure, et montre un lien des polynômes de Schubert avec la théorie des représentations (qui étend l'interprétation des fonctions de Schur comme caractères irréductibles).

Yang-Baxter et Différences Divisées

On a vu que les polynômes de Schubert ont une fonction génératrice dans $\mathfrak{NC}_n$. Je l'ai déduit de la "décomposition de Hopf"

$$\mathbb{A} = \{a_1\} \cup \mathbb{A}^+ \text{ de } \mathbb{X}_\sigma .$$

Fomin-Kirillov-Stanley utilisent l' équation de Yang-Baxter

$$(1+\alpha\partial_2)(1+(\alpha+\beta)\partial_1)(1+\beta\partial_2) = (1+\beta\partial_1)(1+(\alpha+\beta)\partial_2)(1+\alpha\partial_1)$$

En fait, la première solution matricielle de YB a été donnée par Young, les paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ étant les contents dans les tableaux.

Calcul tout différent : au lieu de paramètres fixes, on prend l'algèbre des différences divisées $\mathfrak{Diff}$ à coefficients les fonctions rationnelles en les variables commutatives a_i. En langage moderne, algèbre de Hecke affine dégénérée : algèbre en les ∂_i, a_i avec compatibilité donnée par Leibnitz :

$$a_i\partial_i = \partial_i a_{i+1} + 1 \ , \ a_{i+1}\partial_i = \partial_i a_i - 1$$

$$a_j\partial_i = \partial_i a_j \text{ si } j \neq i, i{+}1$$

Remarque : $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ est contenue dans $\mathfrak{Diff}$, puisque

$$s_i = \partial_i(a_{i+1} - a_i) + 1 \ , \ \partial_i = (1{-}s_i)\frac{1}{a_i{-}a_{i+1}}$$

Problème général : trouver les opérateurs rationnels

$$D_i = 1\, P(a_i, a_{i+1}) + s_i\, Q(a_i, a_{i+1})$$

les plus généraux :

- satisfaisant les relations de tresse
- préservant les polynômes

Solution (avec M.P. Schützenberger) : déformation à 5 paramètres des différences divisées.

En prime : relation de Hecke $(D_i{-}q_1)(D_i{-}q_2) = 0$.

Cas particuliers : différences divisées isobares $\pi_i := a_i \partial_i$

Hecke usuel $T_i := \pi_i(q-1) + s_i$

Déformation la plus utile : $D_i = \alpha\pi_i + \beta\partial_i + \gamma s_i$ (utilisée pour les polynômes de Macdonald).

Les $D_i = s_i + \beta\partial_i$ représentent le groupe symétrique, car $D_i^2 = 1$; ils permettent d'obtenir les polynômes de Jack.

Théorie analogue à celle des polynômes de Schubert en prenant les π_i au lieu des ∂_i. Ce sont les

polynômes de Grothendieck

Revenons aux développements dans l'algèbre affine. Le plus simple exemple :

$$\partial_2\partial_1\partial_2 = (1 - s_2)\frac{1}{a_2 - a_3}(1 - s_1)\frac{1}{a_1 - a_2}(1 - s_2)\frac{1}{a_2 - a_3}$$

(∂_1, ∂_2 agissent sur $a_1, a_2, \ldots$), au lieu de

$$(1 - s_2)\frac{1}{x_2 - x_3}(1 - s_1)\frac{1}{x_1 - x_3}(1 - s_2)\frac{1}{x_1 - x_2}$$

pour Yang-Baxter ($x_1, x_2, \ldots$ invariants).

On obtient bien sûr $\partial_2\partial_1\partial_2 = \partial_{321} \sum \pm \sigma \frac{1}{\Delta(\mathbb{A})}$, mais il serait difficile de faire le même calcul sur les 2^{15} sous-mots d'une décomposition réduite de $[654321]$.

En fait, tout élément de $\mathfrak{Diff}$ peut se caractériser par son action sur le noyau $K(\mathbb{A},\mathbb{B})$:

$$K(\mathbb{A},\mathbb{B}) \sum_\sigma \sigma\, c_\sigma \Big|_{\mathbb{A}=\mathbb{B}} = \sum_\sigma K(\mathbb{A}^\sigma,\mathbb{B})\, c_\sigma \Big|_{\mathbb{A}=\mathbb{B}}$$

et il ne reste que le terme $K(\mathbb{A},\mathbb{A})\, c_1$. Les autres coefficients peuvent s'obtenir à partir de $K(\mathbb{A}^\nu,\mathbb{B})$ ou de $K(\mathbb{A},\mathbb{B}^\nu)$.

Dans le cas des différences divisées et des permutations, nous avons déjà calculé ces coefficients, à notre insu. En effet, ∂_σ a été exprimé par un produit scalaire

$$\big(f(\mathbb{A})\,,\,\mathbb{X}_{\sigma^{-1}\omega}(\mathbb{A}^\omega,\mathbb{B})\big) \equiv f\,\partial_\sigma\,(\mathbb{B})$$

Ecrivant que ∂_ω est une somme sur les permutations, et testant l'expression sur la fonction génératrice $\mathbb{X}_\omega(\mathbb{A},\mathbb{C})$ de la base de $\mathfrak{Pol}(\mathbb{A})$, on a

$$\sum_\zeta \pm\mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}^\zeta,\mathbb{C})\mathbb{X}_{\sigma^{-1}\omega}(\mathbb{A}^{\omega\zeta},\mathbb{A})\big)\frac{1}{\Delta} = \mathbb{X}_\omega(\mathbb{A},\mathbb{C})\,\partial_\sigma$$

et donc le coefficient ${c_\zeta}^\sigma$ dans le développement de ∂_σ est égal à

$$(-1)^{\ell(\zeta)}\,\mathbb{X}_{\sigma^{-1}\omega}(\mathbb{A}^{\omega\zeta},\mathbb{A})\frac{1}{\Delta} = \mathbb{X}_{\omega\sigma}(\mathbb{A},\mathbb{A}^{\omega\zeta})\frac{1}{\Delta}$$

Le changement de base inverse peut être extrait de l'interpolation de Newton :

$$f(\mathbb{A}) = \sum f\partial_\sigma\big|_{\mathbb{B}} \mathbb{X}_{\sigma^{-1}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$$

et l'image par ζ de cette identité est

$$f(\mathbb{A}^\zeta) = \sum f\partial_\sigma\big|_{\mathbb{B}} \mathbb{X}_{\sigma^{-1}}(\mathbb{A}^\zeta, \mathbb{B}) = \sum f\partial_\sigma\big|_{\mathbb{A}} \mathbb{X}_{\sigma^{-1}}(\mathbb{A}^\zeta, \mathbb{A})$$

ce qui veut bien dire que les coefficients sont, encore une fois, les polynômes de Schubert.

En fait propriété de dualité plus générale, de même que pour les bases de Yang-Baxter qu'on va considérer maintenant.

On prend cette fois-ci l'algèbre du groupe (ou une déformation) avec des paramètres spectraux x_i invariants sous le groupe.

Pour chaque choix de paramètres, on définit une base linéaire de Yang-Baxter récursivement ($Y_1 = 1$) :

$$Y_{\sigma s_i} = Y_\sigma \left(1 + (x_{\sigma_{i+1}} - x_{\sigma_i})\, \partial_i\right), \ \ell(\sigma s_i) > \ell(\sigma).$$

La cohérence est assurée par les équations de Y-B.

Théorème 4 *La matrice de changement de base entre Y_σ et $\partial_\sigma \Delta(X)$ et son inverse ont pour entrées, encore, les polynômes de Schubert :*

$$\begin{aligned} Y_\sigma &= \sum_{\nu \le \sigma} \partial_\nu \, \mathbb{X}_{\nu^{-1}}(X^\sigma, X), \\ \partial_\nu \, \Delta(X) &= \sum \sigma \, \mathbb{X}_{\omega\nu}(X, X^{\omega\sigma}) \end{aligned}$$

Preuve directe par récurrence sur la longueur.

Remarque : La spécialisation $X = \mathbb{A}$ envoie Y_σ sur la permutation σ (en tant qu'opérateur sur les polynômes). Les physiciens écrivent

$$: Y_\sigma(\mathbb{A}) : = \sigma$$

Comme pour les polynômes de Schubert, la base de YB est autoadjointe. Il faut tout d'abord définir une forme quadratique.

Définition. Pour $f, g \in \mathfrak{Diff}$,

$$(f, g) := f\bar{g} \cap \partial_\omega ,$$

où $g \to \bar{g}$ est le morphisme $x_i \to x_{n+1-i}$, $\partial_\sigma \to \partial_{\sigma^{-1}}$, et $\cap\partial_\omega$ signifie "extraire le coefficient de ∂_ω".

Théorème 5 *La base de Yang-Baxter est auto-adjointe :*

$$\left(Y_{\sigma}, Y_{\omega\sigma}\right) = \pm\Delta(X)\ ,\ \textit{les autres nuls}$$

Par exemple, le calcul de (Y_{321}, Y_{321}) se présente comme suit. On écrit l'expression développée de $\overline{Y_{321}}$. Il faut calculer le terme ∂_{321} dans :

$$= Y_{321}(1+\partial_1(x_1-x_2))(1+\partial_2(x_1-x_3))(1+\partial_1(x_2-x_3))$$

On introduit chaque facteur successivement :

$$Y_{321}(1+\partial_1(x_1-x_2)) = \heartsuit Y_{231} + \diamondsuit Y_{321}$$

$$\heartsuit(1+\partial_1(x_2-x_1))(1+\partial_2(x_3-x_1))(1+\partial_2(x_1-x_3))$$
$$(1+\partial_1(x_2-x_3)) \cap \partial_{321} = 0$$

$$\diamondsuit\, Y_{321}(1+\partial_2(x_1-x_3)) = \clubsuit Y_{321} + \spadesuit Y_{312}$$

$$\clubsuit(1+\partial_1(x_2-x_1))(1+\partial_2(x_3-x_1))(1+\partial_1(x_3-x_2))(1+\partial_1(x_2-x_3)) \cap \partial_{321} = 0$$

$$\spadesuit Y_{312}(1+\partial_1(x_2-x_3)) \cap \partial_{321} = 0$$

Au total, le coefficient est nul .

La description des bases de Coxeter pour touts les groupes de Coxeter vient d'être donnée par Jian-Yi Shi. Cela ne découle pas des constructions de Cherednik dans l'algèbre de Hecke dégénérée.

Par exemple, pour le groupe symétrique, nous avons vu des expressions dans des algèbres différentes faisant apparaître les polynômes de Schubert comme coefficients.

Dans $\mathfrak{NC}_3$, $(1+\partial_1(x_2-x_1))(1+\partial_2(x_3-x_1))(1+\partial_1(x_3-x_2))$, développement avec les relations de tresse.

Dans $\mathfrak{Diff}$, $(1+\partial_1(a_2-a_1))(1+\partial_2(a_3-a_2))(1+\partial_1(a_2-a_1))$, Leibnitz + relations de tresse donnent successivement :

$\to \clubsuit = 1+\partial_1(a_2-a_1+a_3-a_2)+\partial_2(a_3-a_2)+\partial_1\partial_2(a_3-a_1)(a_3-a_2)$

$\to \clubsuit + \partial_1(a_1-a_2)+\partial_2(a_2-a_1)+\partial_1(a_2-a_1)+\partial_2\partial_1(a_3-a_1)(a_2-a_1)+\partial_1\partial_2\partial_1(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$

Mais tout élément de $\mathfrak{Diff}$ ou $\mathfrak{NC}$ est caractérisé par son action sur la base Schubert $\{\mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A}, 0)\}$, ou bien encore, par son action sur $\mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ avec $\mathbb{B}$ tel que les $\mathbb{X}_\sigma(0, \mathbb{B})$ sont linéairement indépendants.

Pour déterminer la base de Y-B, il suffit de calculer son action sur

$$\mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, X^\omega) \ .$$

On prend en compte la définition récursive des éléments de Yang-Baxter en les considérant comme des chemins dans le permutoëdre, en prenant le produit des étiquettes des arêtes.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{array}{ll} a_1 - x_2 & \\ a_1 - x_3 & a_2 - x_3 \end{array} \arrow[dl, "1+\partial_1 (x_2 - x_1)"'] \arrow[dr, "1+\partial_2 (x_3 - x_2)"] & \\
\begin{array}{ll} a_1 - x_1 & \\ a_1 - x_3 & a_2 - x_3 \end{array} \arrow[d, "1+\partial_2 (x_3 - x_1)"'] & & \begin{array}{ll} a_1 - x_2 & \\ a_1 - x_3 & a_2 - x_2 \end{array} \arrow[d, "1+\partial_1 (x_3 - x_1)"] \\
\begin{array}{ll} a_1 - x_1 & \\ a_1 - x_3 & a_2 - x_1 \end{array} \arrow[dr, "1+\partial_1 (x_3 - x_2)"'] & & \begin{array}{ll} a_1 - x_2 & \\ a_1 - x_1 & a_2 - x_2 \end{array} \arrow[dl, "1+\partial_2 (x_2 - x_1)"] \\
 & \begin{array}{ll} a_1 - x_1 & \\ a_1 - x_2 & a_2 - x_1 \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

A chaque étape, la différence divisée n'agit que sur une boîte, le facteur restant étant symétrique. Le bilan est

Théorème 6 *L'image de* $\mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, X^\omega)$ *par l'élément de Y-B* Y_σ *est*

$$\mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, X^{\sigma\omega})$$

L'élément de Yang-Baxter agit comme une permutation, mais sur les paramètres spectraux $x_1, \ldots, x_n$!

Z ! Il faut prendre les images du noyau $K(X, \mathbb{A}) = \mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}, X^\omega)$, tout autre élément de départ donnerait des images plus compliquées.

Au total. Nous avons donné plusieurs constructions pour laquelle la base distinguée est la base de Schubert, en refaisant le calcul à chaque fois, au lieu de montrer l'équivalence de ces différentes présentations.

Nous n'avons utilisé que

- les annulations $\mathbb{X}_\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{A}) = 0$, pour $\sigma \neq 1$
- les annulations $K(\mathbb{A}^\sigma, \mathbb{A}) = \mathbb{X}_\omega(\mathbb{A}^{\omega\sigma}, \mathbb{A}) = 0$ pour $\sigma \neq 1$
- le fait que a_i est envoyé sur 1 par ∂_i
- les relations de Y-B et $(1{+}\alpha\partial_i)((1{+}\beta\partial_i) = 1 + (\alpha{+}\beta)\partial_i$