

# Modèles avec particules dures, animaux dirigés, et séries en variables partiellement commutatives

J.Bétrema et J.G.Penaud

UFR Mathématiques et Informatique  
Université Bordeaux I  
& LaBRI, URA CNRS 1304

1 avril 1994

## Résumé

Nous exposons systématiquement les relations entre les modèles de gaz avec particules dures, l'énumération des animaux dirigés, et l'algèbre des séries formelles en variables partiellement commutatives, d'après les travaux de X.G.Viennot. Nous donnons une solution complète simplifiée, en utilisant cette algèbre, de l'énumération des animaux dirigés sur réseau plan. L'article inclut un programme rapide de génération aléatoire de ces animaux, avec distribution uniforme, et des images obtenues à l'aide de ce programme.

## Abstract

We give a systematic presentation of relations between lattice gas models with hard-core interactions, enumeration of directed-site animals, and the algebra of formal power-series in the partially commutative case, along the work of X.G.Viennot. We present a complete and simplified solution, using this algebra, of the directed animals enumeration problem in two dimensions, including a fast program for random generation of such animals (with uniform distribution) and images produced by this program.

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modèles en mécanique statistique</b>	<b>5</b>
2.1	Modèle d'Ising et modèle de gaz . . . . .	5
2.2	Fonction de partition . . . . .	6
2.3	Modèles avec particules dures . . . . .	6
2.4	Limite thermodynamique . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Séries en variables partiellement commutatives</b>	<b>10</b>
3.1	Empilements . . . . .	10
3.2	Monoïde partiellement commutatif . . . . .	11
3.3	Séries formelles et théorème d'inversion . . . . .	13
3.4	Pyramides et théorème de décomposition . . . . .	15
3.5	Applications aux modèles de gaz . . . . .	17
3.6	Empilements stricts . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Animaux dirigés</b>	<b>20</b>
4.1	Définition . . . . .	20
4.2	Empilements coloriés . . . . .	21
4.3	Réseaux feuilletés . . . . .	22
4.4	Équivalence entre animaux dirigés et empilements . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Solution du modèle linéaire</b>	<b>27</b>
5.1	Décomposition en équerres . . . . .	27
5.2	Séries génératrices . . . . .	29
5.3	Chemins de Dyck et chemins de Motzkin . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Animaux plans aléatoires</b>	<b>36</b>
6.1	Code . . . . .	36
6.2	Illustrations . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Perspectives</b>	<b>40</b>

## Liste des figures

1	Réseaux carrés (a) $nn$ (b) $nnn$ . . . . .	7
2	Exemples de configurations . . . . .	8
3	Un empilement $E$ de configurations sur le graphe $G$ . . . . .	11
4	Diagramme de Hasse de l'empilement $E$ de la figure 3. . . . .	15
5	Animaux dirigés sur réseaux (a) carré (b) hexagonal . . . . .	20
6	Réseaux coloriés (a) linéaire (b) carré (c) hexagonal . . . . .	21
7	Empilements (a) colorié (b) standard, sur réseau linéaire . . . . .	22
8	Réseaux feuilletés . . . . .	23
9	Schéma de décomposition d'une pyramide en produit d'équerres . . . . .	27
10	Exemple de décomposition d'une pyramide en produit d'équerres . . . . .	28
11	Décomposition d'une équerre en produit d'équerres . . . . .	29
12	Chemins (a) de Dyck (b) de Motzkin . . . . .	31
13	Décompositions de chemins . . . . .	32
14	Décomposition d'un préfixe . . . . .	32
15	Factorisation de Catalan d'un chemin quelconque . . . . .	35
16	Code pour la génération aléatoire de préfixes de Motzkin . . . . .	36
17	Code pour marquer les célibataires . . . . .	37
18	Code pour transformer un mot en animal . . . . .	38
19	Code pour empiler une cellule . . . . .	39
20	Exemple de construction d'un animal sur réseau carré . . . . .	41
21	Exemple de construction d'un animal sur réseau triangulaire . . . . .	42
22	Exemple de construction d'un animal de source compacte . . . . .	43
23	Exemple d'animal de grande taille sur réseau carré . . . . .	44
24	Exemple d'animal de grande taille et de source compacte . . . . .	45
25	Agrandissements de régions des figures 23 et 24 . . . . .	46

# 1 Introduction

Certains physiciens (voir par exemple [3, 5, 9, 10, 13]) s'intéressent à des modèles thermodynamiques extrêmement schématiques, mais où apparaissent déjà des phénomènes *critiques*, dont ils peuvent faire une étude détaillée. Dans ces modèles, des particules sont placées sur certains sommets d'un graphe  $G$ , appelés *sites* (au plus une particule par site); la disposition des particules forme une *configuration*, et l'*énergie* d'une configuration est la somme de deux séries de termes: les premiers représentent la contribution individuelle de chaque particule, les seconds l'*interaction* entre particules *voisines* (c'est à dire reliées par une arête du graphe).

Les configurations étudiées sont de très grande taille, et on s'intéresse à leurs propriétés statistiques; cette étude se ramène à celle de la *fonction de partition* du modèle, notée traditionnellement  $Z$ , qui joue un rôle voisin d'une *fonction génératrice* en combinatoire; d'ailleurs le calcul de  $Z$  se ramène souvent explicitement à celui d'une série énumératrice: voir en particulier [13].

X.G.Viennot a découvert – voir par exemple [16] – que, dans le cas particulier des modèles dits avec *particules dures*, cette étude est liée à celle du monoïde partiellement commutatif, introduit en 1969 par P.Cartier & D.Foata [6], et qui fait l'objet aujourd'hui de recherches actives dans un domaine à priori éloigné, celui de la modélisation des algorithmes parallèles en informatique théorique. Cet article expose cette approche de façon systématique, et inclut la solution selon cette ligne, due aux auteurs, du problème de l'énumération des animaux dirigés plans.

La section 2 présente la classe de modèles étudiés, et contient les définitions issues de la physique, en particulier celle de la fonction de partition.

La section 3 introduit la notion d'*empilement* de configurations, les opérations algébriques sur ces objets, les théorèmes fondamentaux de cette algèbre (qui est celle des séries en variables partiellement commutatives), et leurs corollaires pour les modèles avec particules dures.

La section 4 présente les animaux dirigés sur un réseau, et montre que, sous certaines conditions, l'énumération de ces animaux, sur un réseau de dimension  $d$ , se ramène directement à celle d'empilements, sur un réseau de dimension  $d - 1$ .

Dans la section 5, on achève les calculs dans le cas le plus simple, celui du modèle de gaz sur réseau linéaire, qui correspond aux animaux dirigés sur réseau plan. Dans ce cas, les séries en variables partiellement commutatives vérifient des équations algébriques simples, qui fournissent à la fois les séries énumératrices des animaux, et des bijections avec des objets combinatoires classiques, les chemins (ou mots) de Motzkin.

Ces bijections sont utilisées section 6, pour programmer la construction d'animaux dirigés plans aléatoires, avec distribution uniforme, en temps linéaire. La section 6 est illustrée de dessins typiques d'animaux de grande taille, produits par notre logiciel; leur aspect filiforme surprend l'intuition.

La section 7 énumère les principaux problèmes ouverts, en particulier celui d'une interprétation combinatoire de la solution de R.Baxter pour le modèle des hexagones durs.

## 2 Modèles en mécanique statistique

### 2.1 Modèle d'Ising et modèle de gaz

Dans le *modèle d'Ising* du ferromagnétisme, chaque site  $i$  est occupé par un petit aimant, avec deux orientations opposées possibles, notés  $\sigma_i = \pm 1$ , et l'énergie est donnée par:

$$E = -H \sum_{\text{site } i} \sigma_i - J \sum_{\text{arête } (i,j)} \sigma_i \sigma_j \quad (1)$$

où  $H$  désigne le champ magnétique externe, et  $J$  la constante d'interaction. L'énergie due au champ externe est minimale lorsque les aimants sont orientés dans le sens du champ; lorsque la constante  $J$  est positive, l'énergie d'interaction est minimale lorsque tous les aimants sont orientés dans le même sens, d'où le nom de ferromagnétisme — on ne s'étonnera pas de constater que l'énergie minimale est négative, car  $E$  est défini à une constante additive près. Lorsque  $J < 0$ , chaque aimant pousse ses voisins à s'orienter en sens contraire de lui-même: on parle d'antiferromagnétisme.

Il existe un modèle analogue des gaz: chaque site  $i$  est occupé ou vide, ce qu'on note  $s_i = 1$  ou  $0$ , et l'énergie vaut:

$$E = -\mu \sum_{\text{site } i} s_i - \epsilon \sum_{\text{arête } (i,j)} s_i s_j \quad (2)$$

$\mu$  est appelé potentiel chimique; le cas  $\epsilon > 0$  correspond à une attraction entre particules, et  $\epsilon < 0$  à une répulsion; le cas  $\epsilon = 0$  est celui, sans intérêt ici, du gaz parfait.

Dans le modèle du ferromagnétisme, il existe une interaction entre chaque paire de sites voisins; dans le modèle du gaz, cette interaction n'existe que si les sites sont occupés. Pour comparer les deux modèles, on effectue le changement de variable  $\sigma_i = 2s_i - 1$ ; l'énergie d'interaction associée à l'arête  $(i, j)$  devient alors:

$$\sigma_i \sigma_j = 4s_i s_j - 2s_i - 2s_j + 1$$

Lorsqu'on somme cette quantité pour toutes les arêtes, le terme linéaire  $-2s_i$  apparaît avec un coefficient égal au degré  $q_i$  du site  $i$  (le degré d'un sommet est défini comme le nombre d'arêtes incidentes). Donc (1) devient:

$$E = -2H \sum_{\text{site } i} s_i + 2J \sum_{\text{site } i} q_i s_i - 4J \sum_{\text{arête } (i,j)} s_i s_j$$

en ignorant la constante  $nH - mJ$ , où  $n$  (resp.  $m$ ) désigne le nombre de sommets (resp. arêtes) du graphe. Si le graphe est *régulier*, chaque degré  $q_i$  est égal à une constante  $q$ , et on voit que dans ce cas les deux modèles sont équivalents, avec:

$$\mu = 2H - 2qJ, \quad \epsilon = 4J$$

(cf. [3, section 1.9]).

## 2.2 Fonction de partition

L'axiome essentiel de la mécanique statistique (formule de Gibbs), affirme que la probabilité d'observation d'une configuration donnée, d'énergie totale  $E$ , est proportionnelle à  $e^{-\beta E}$ , où  $\beta$  est une constante positive.  $\beta$  dépend du milieu extérieur, dans lequel est plongé le modèle; plus précisément:

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

où  $k$  désigne la constante de Boltzmann, et  $T$  la *température* absolue. Lorsque  $\beta$  est grand, les configurations de forte énergie deviennent très improbables: le milieu extérieur est froid; inversement, lorsque  $\beta$  tend vers zéro, toutes les configurations tendent à devenir équiprobables: le milieu extérieur est chaud.

La fonction

$$Z(T) = \sum e^{-\beta E} = \sum e^{-E/kT}$$

où la sommation est étendue à toutes les configurations possibles, est appelée *fonction de partition* — définir l'énergie  $E$  à une constante additive près, a pour effet de définir  $Z$  à une constante multiplicative près. La probabilité d'observer une configuration donnée, d'énergie  $E$ , vaut donc:

$$\frac{e^{-\beta E}}{Z(T)} \tag{3}$$

La température n'est pas en général la seule variable dont dépende la fonction  $Z$ : d'autres grandeurs physiques, comme le champ magnétique, peuvent intervenir dans le calcul de l'énergie d'une configuration, et donc de  $Z$ . Les physiciens montrent que l'étude statistique du modèle se ramène toujours à l'étude de la fonction  $Z$  et de ses dérivées ou dérivées partielles; la section suivante illustrera ce principe général.

## 2.3 Modèles avec particules dures

Un cas limite des modèles de gaz précédents est obtenu en supposant que la répulsion entre particules est si forte que les configurations comportant des particules voisines ont une probabilité négligeable d'exister; autrement dit, chaque particule est suffisamment dure, et occupe un volume tel, que deux sites voisins ne peuvent être occupés simultanément. Les seules configurations possibles correspondent alors aux ensembles de sommets qu'on appelle *stables* en théorie des graphes: deux sommets distincts d'une même configuration ne sont jamais reliés par une arête. L'énergie d'une telle configuration de  $n$  éléments se réduit à  $-n\mu$ , et en posant

$$t = e^{\beta\mu} = e^{\mu/kT}$$

la fonction de partition vaut:

$$Z(t) = \sum \alpha_n t^n \tag{4}$$

où  $\alpha_n$  désigne le nombre de stables de taille  $n$ . En utilisant (3), on en déduit que le nombre moyen de particules vaut:

$$\frac{\sum n\alpha_n t^n}{Z(t)} = \frac{tZ'(t)}{Z(t)} = t \frac{d}{dt} \ln Z(t) \quad (5)$$

Cet exemple est caractéristique du rôle de la fonction de partition  $Z$  et de ses dérivées dans un calcul de moyenne.

## 2.4 Limite thermodynamique

La définition de la fonction de partition pour un graphe infini n'est pas immédiate: les formules précédentes n'ont plus de sens, puisque le nombre de configurations est infini. D'autre part la seule classe intéressante de graphes infinis, dans ce contexte, est celle des *réseaux*.

En mathématiques (voir par exemple [8]), un réseau de dimension  $d$  désigne habituellement, dans un espace affine, un ensemble de points isomorphe à  $\mathbf{Z}^d$ ; les points associés, par l'isomorphisme, à ceux dont les coordonnées valent 0 ou 1, forment le paralléloétope de base  $B$ ; dans un espace euclidien, un réseau est cristallographique si les symétries orthogonales par rapport aux faces de  $B$  laissent le réseau invariant.

Dans le présent contexte, un réseau désigne un graphe, dont l'ensemble des sommets est un réseau cristallographique; le choix le plus simple pour les arêtes est de ne relier que les voisins les plus proches (réseau *nn*, pour "nearest neighbour", chez les anglo-saxons), mais on peut ajouter des arêtes qui relient les voisins "au second rang" (réseau *nnn*, pour "next nearest neighbour"), etc... A un même réseau cristallographique peuvent donc correspondre plusieurs graphes: sur la figure 1-(a), chaque sommet est de degré 4, tandis que sur la figure 1-(b), chaque sommet est de degré 8.

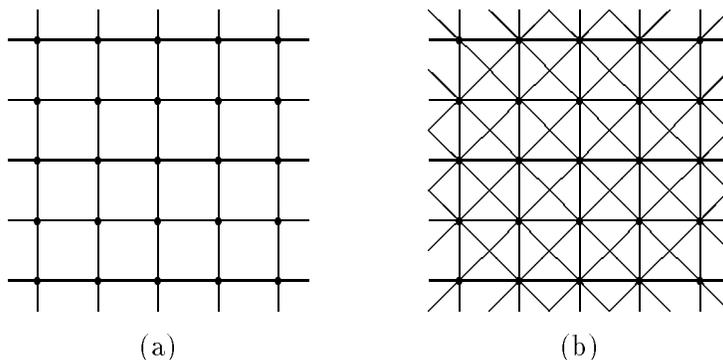


Figure 1: Réseaux carrés (a) *nn* (b) *nnn*

Notons qu'on peut étendre la notion de réseau en affaiblissant les hypothèses sur l'ensemble des sites: par exemple, si on pave le plan par des hexagones, les sommets ne forment plus un ensemble isomorphe à  $\mathbf{Z}^2$  (il manque les centres des hexagones), mais

le graphe obtenu est régulier, et définit un modèle d'interaction intéressant, où chaque site est de degré 3.

Pour définir la fonction de partition d'un réseau  $G$ , on considère l'intersection  $G_k$  de  $G$  avec un disque de rayon donné, où  $k$  désigne le nombre de sites de  $G_k$ . Soit  $Z_k$  la fonction de partition de  $G_k$ ;  $Z_k$  n'est pas une quantité proportionnelle à la taille  $k$  du système (le nombre de configurations croît exponentiellement avec la taille), mais la mécanique statistique enseigne que c'est le cas de  $\ln Z_k$ , lorsque  $k$  est grand; plus précisément, la fonction  $Z$  définie par:

$$\ln Z = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_k}{k} \quad (6)$$

existe, et cette limite est indépendante de la définition précise de  $G_k$ . Les physiciens appellent ce type de limite la *limite thermodynamique*; consulter R.Baxter [3], ou un cours de mécanique statistique, comme [7], pour une présentation complète.

Les phénomènes critiques correspondent aux *singularités* de la fonction de partition  $Z$  définie par (6), et à celles de ses dérivées ou dérivées partielles. Le nombre moyen de particules *par site*, appelé *densité moyenne par site*, est donné, sur un réseau infini, par le membre droit de la formule (5) où  $Z$  désigne cette fois la fonction de partition pour la limite thermodynamique.

Le modèle des *carrés* (resp. *hexagones*) *durs* correspond à l'étude d'un gaz, dont les particules sont disposées sur un réseau carré (resp. hexagonal) infini, de telle sorte que deux sites voisins ne peuvent être simultanément occupés. Pour rendre visible cette dernière condition, on peut représenter les particules par des carrés (resp. hexagones) qui ne se chevauchent pas, comme sur la figure 2. Dans la suite de cet article, un site occupé par une particule sera simplement indiqué par un disque noir.

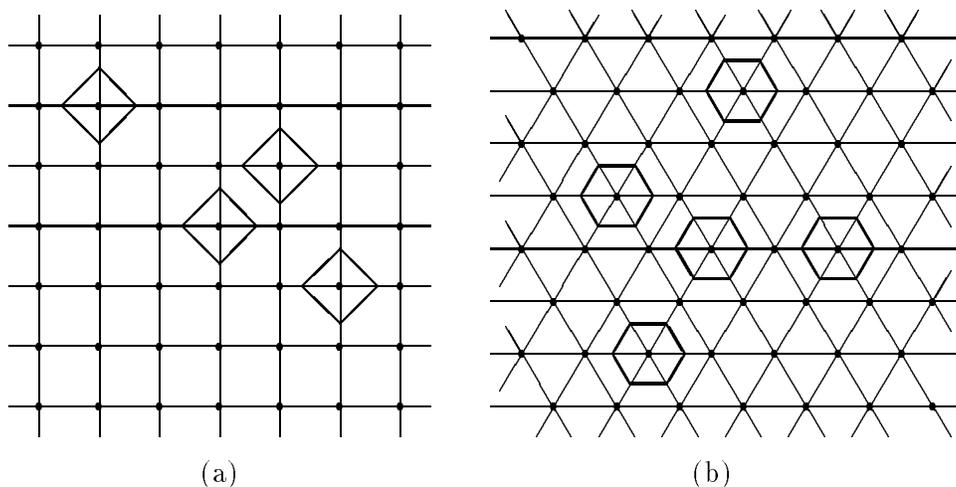


Figure 2: Exemples de configurations dans le modèle des (a) carrés durs (b) hexagones durs

Le calcul de la fonction de partition du modèle des hexagones durs a été réussi par Baxter en 1980: voir [3] pour une présentation complète; c'est un calcul complexe, qui fait intervenir entre autres les identités de Rogers-Ramanujan; le calcul de la fonction de partition du modèle des carrés durs reste un problème ouvert.

### 3 Séries en variables partiellement commutatives

#### 3.1 Empilements

Soit un *graphe*  $G$ ; les sommets de  $G$  formeront dans la section suivante les lettres d'un *alphabet*, et leur ensemble sera donc noté  $A$ ; une *arête* de  $G$  est une paire (non orientée)  $\{a, b\}$  de sommets distincts.

Deux sommets de  $G$  sont dits *voisins* s'ils sont identiques, ou reliés par une arête de  $G$ ; le voisinage  $V(a)$  d'un sommet  $a$  est l'ensemble des sommets voisins de  $a$ ; le voisinage  $V(B)$  d'une partie  $B \subseteq A$  est défini comme d'habitude par:

$$V(B) = \bigcup_{b \in B} V(b)$$

Dans toute la suite nous conviendrons qu'une *configuration*  $C$  est un ensemble de sommets tel qu'aucune paire de sommets distincts de  $C$  ne soient voisins (c'est ce qu'on appelle un *stable* en théorie des graphes). Un *empilement* est une suite finie  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  de configurations non vides telle que:

$$C_i \subseteq V(C_{i-1}), \quad 1 < i \leq n \quad (7)$$

L'entier  $n$  est la *hauteur* de l'empilement; chaque configuration  $C_i$  est appelée *couche* numéro  $i$ , et la première couche,  $C_1$ , est la *base* de l'empilement. Si  $n = 0$ , l'empilement est vide, et ne possède pas de base.

Un empilement peut aussi être décrit comme un ensemble de *cellules*  $(a, i)$ , où  $a$  est un sommet de  $G$ , et  $i$  un entier inférieur ou égal à la hauteur  $n$  de l'empilement;  $i$  est la hauteur de la cellule, et la couche numéro  $i$  est formée des cellules de hauteur  $i$ ; les cellules ayant même projection  $a$  sur  $A$  forment la *fibres*  $F_a$  au-dessus de  $a$ . On dira pour abrégé que deux cellules  $(a, i)$  et  $(b, j)$  sont voisines si les sommets  $a$  et  $b$  sont voisins; on peut alors reformuler la définition d'un empilement de la manière suivante:

- deux cellules distinctes de la même couche ne sont jamais voisines (8)

- pour  $i > 1$ , chaque cellule de la couche  $i$  possède au moins une voisine dans la couche  $i - 1$  (9)

La *taille*  $|E|$  d'un empilement  $E$  est égale, par définition, au nombre de cellules qui composent  $E$ . Une configuration peut être confondue avec un empilement de hauteur 1; à la configuration vide, correspond l'empilement vide, de taille et de hauteur nulles.

**Exemple 1:** la figure 3 montre un empilement de hauteur 4, et de taille 8:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{a, c\} & V(C_1) &= \{a, b, c, d, e, g\} \\ C_2 &= \{b, e, g\} & V(C_2) &= \{a, b, c, e, f, g, h\} \\ C_3 &= \{e\} & V(C_3) &= \{a, e, f, h\} \\ C_4 &= \{a, f\} \end{aligned}$$

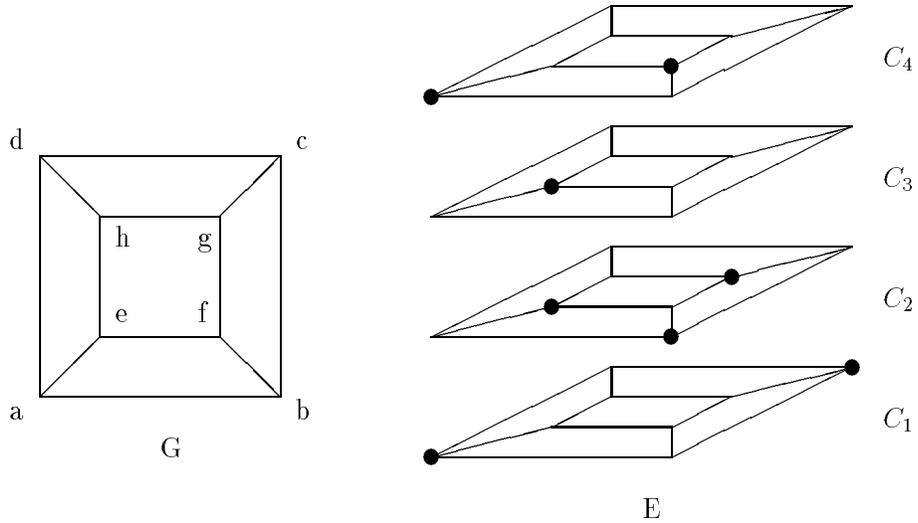


Figure 3: Un empilement  $E$  de configurations sur le graphe  $G$

$C_1, C_2, C_3, C_4$  sont des configurations qui vérifient la condition (7), donc

$$E = (C_1, C_2, C_3, C_4)$$

est un empilement, constitué des cellules:

$$(a, 1), (c, 1), (b, 2), (e, 2), (g, 2), (e, 3), (a, 4), (f, 4).$$

La notion d'empilement est due à X.G.Viennot [15], qui représente les cellules par des *pièces* géométriques, dessinées de telle sorte que deux pièces aient une intersection non vide si et seulement si elles sont voisines. Les pièces de la couche  $C_1$  sont posées sur le sol, celles de la couche  $C_2$  sont posées par dessus, et ainsi de suite (deux pièces de la même fibre ont même projection sur le sol). Grâce à la condition (9), chaque pièce d'un empilement repose sur sa (ou ses) voisine(s) de la couche inférieure.

### 3.2 Monoïde partiellement commutatif

Soit  $A^*$  le monoïde libre sur l'alphabet  $A$  des sommets du graphe  $G$ ; le monoïde partiellement commutatif associé à  $G$ , noté  $\mathbf{pc}(G)$ , est le quotient de  $A^*$  par les relations de commutation:

$$ab = ba$$

pour tous sommets  $a, b$  non voisins dans  $G$  (on dit que  $G$  est le graphe de non-commutation). Les éléments de  $\mathbf{pc}(G)$  sont appelés *traces*, et la trace du mot  $u$  est notée  $[u]$ . Deux mots  $u, v$  de  $A^*$  ont même trace si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite

de *commutations autorisées*, c'est à dire d'échanges entre lettres consécutives désignant des sommets de  $G$  non voisins; dans ce cas on dit qu'ils sont équivalents, et on note:  $u \sim v$ .

A une configuration  $C = \{a, b, c, \dots\}$ , associons la trace du mot  $u(C) = abc\dots$ ; par définition d'une configuration, les lettres  $a, b, c, \dots$  commutent toutes entre elles, et la trace  $[u(C)]$  est donc bien définie, car elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on énumère les éléments de  $C$ .

A un empilement  $E = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ , associons le produit des  $[u(C_i)]$  dans  $\mathbf{pc}(G)$  (si l'empilement est vide, on lui associe la trace du mot vide), et notons  $\Phi$  cette application.

**Exemple 1** (suite): la trace  $\Phi(E)$  de l'empilement  $E$  de la figure 3, est la classe du mot *acbegeaf* modulo les 16 commutations:  $ac = ca, af = fa, \dots, fh = hf$ .

Réciproquement, à tout mot  $u = a_1 \dots a_n$  de  $A^*$ , associons l'empilement  $E(u)$  constitué des cellules  $(a_i, h(a_i))$ , où la hauteur  $h(a_i)$  de la lettre  $a_i$  est définie par récurrence comme suit:

$$h(a_i) = 1 + \max\{h(a_j) \mid j < i \text{ et } a_j \in V(a_i)\} \quad (10)$$

avec la convention  $\max(\emptyset) = 0$ .

On vérifie facilement que  $E(u)$  est bien un empilement – c'est à dire satisfait aux conditions (8) et (9) – et que cet empilement ne change pas si l'on applique à  $u$  une commutation autorisée. Par passage au quotient, on obtient donc une application  $\Psi$  de  $\mathbf{pc}(G)$  dans l'ensemble des empilements, et on a le résultat suivant, énoncé dans [15]:

**Théorème 1** *Les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des empilements sur un graphe  $G$  et le monoïde partiellement commutatif  $\mathbf{pc}(G)$ .*

*Preuve:* lorsqu'on associe un mot  $u$  à un empilement  $E$ , en énumérant les couches de  $E$ , puis qu'on calcule les hauteurs des lettres de  $u$  par la formule (10), on retrouve les numéros des couches. Inversement, lorsqu'on part d'un mot  $u$ , la définition (10) implique que les lettres de hauteur 1 commutent avec toutes celles qui les précèdent, et donc  $u \sim u_1 v$ , où  $u_1$  contient toutes les lettres de hauteur 1; et ainsi de suite, ce qui prouve que  $u$  est équivalent au mot obtenu en énumérant les couches de  $E(u)$ .  $\square$

En particulier, les empilements forment un *monoïde* isomorphe à  $\mathbf{pc}(G)$ ; notons que le produit des empilements  $(C_1, \dots, C_n)$  et  $(C'_1, \dots, C'_p)$  n'est pas en général égal à la suite de configurations  $(C_1, \dots, C_n, C'_1, \dots, C'_p)$ , qui ne constitue pas un empilement, sauf dans le cas exceptionnel où  $C'_1 \subseteq V(C_n)$ . Dans le langage géométrique de X.G.Viennot, on compose deux empilements en plaçant le second au dessus du premier, et en laissant les pièces du second tomber sur celles du premier.

**Exemple 1** (suite): si on ajoute le sommet  $c$  à l'empilement  $E$  de la figure 3, c'est à dire si on calcule le produit  $E' = E.c$ , on a:

$$E' = (C_1, C_2, C'_3, C_4), \quad C'_3 = C_3 \cup \{c\}$$

car  $c$  commute avec tous les éléments de  $C_3$  et  $C_4$ , mais pas avec  $b \in C_2$ .

Notons aussi que lorsqu'on lit un mot  $u$  de droite à gauche, on obtient un nouvel empilement, *dual* de celui obtenu en lisant normalement le mot de gauche à droite; cette transformation correspond géométriquement à une inversion du sens de la gravité.

Grâce au théorème 1, les couches d'un empilement peuvent être interprétées comme une *factorisation canonique* d'un élément du monoïde partiellement commutatif; c'est sous cette forme que ce théorème est apparu pour la première fois, dans [6, théorème 1.2], sous le nom de *V-factorisation*.

### 3.3 Séries formelles et théorème d'inversion

A partir du monoïde  $\mathbf{pc}(G)$  – que nous ne distinguerons plus désormais du monoïde des empilements – on peut construire l'algèbre des séries formelles à coefficients rationnels (par exemple) sur ce monoïde: c'est l'algèbre des séries en variables partiellement commutatives. Un élément de cette algèbre est une application  $\Delta$  qui associe à chaque empilement  $E$  (ou à sa trace) un coefficient  $\Delta(E)$  dans le corps de base choisi; on note:

$$\Delta = \sum_{\text{empilement } E} \Delta(E)E$$

et le produit est défini naturellement par:

$$\left( \sum_{E_1} \Delta_1(E_1)E_1 \right) \left( \sum_{E_2} \Delta_2(E_2)E_2 \right) = \sum_E \left( \sum_{E_1 E_2 = E} \Delta_1(E_1)\Delta_2(E_2) \right) E$$

On vérifie facilement qu'il n'existe qu'un nombre fini de factorisations de  $E$  sous la forme  $E_1 E_2$ , ce qui assure la cohérence de la définition du produit.

Considérons en particulier les séries suivantes, qui sont en fait des polynômes lorsque le graphe  $G$  est fini:

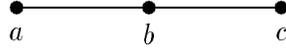
$$\Gamma = \sum_{\text{configuration } C} C \quad \bar{\Gamma} = \sum_{\text{configuration } C} (-1)^{|C|} C \quad (11)$$

et les séries analogues (série caractéristique et série alternée) pour les empilements:

$$\Theta = \sum_{\text{empilement } E} E \quad \bar{\Theta} = \sum_{\text{empilement } E} (-1)^{|E|} E \quad (12)$$

en rappelant que  $|E|$  désigne le nombre de cellules de  $E$ .

**Exemple 2:** soit  $G$  le graphe:



Omettons les crochets  $[ ]$  pour désigner les traces des mots dans  $\mathbf{pc}(G)$ ; le polynôme  $\overline{\Gamma}$  vaut:

$$1 - a - b - c + ac$$

tandis que la série  $\Theta$  débute par:

$$1 + a + b + c + a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + cb + c^2 + \dots$$

(noter l'absence du terme  $ca$ , car  $ac = ca$ ; un comptage manuel montre que la série comporte ensuite 21 termes de degré 3).

On a le résultat fondamental suivant:

**Théorème 2** *La série caractéristique des empilements,  $\Theta$ , et la série alternée des configurations,  $\overline{\Gamma}$ , définies par (11) et (12), sont inverses l'une de l'autre. De même,  $\overline{\Theta}$  est l'inverse de  $\Gamma$ .*

*Preuve:* soit une configuration  $C$  et un empilement  $E$ ; l'équation  $CX = E$ , dans le monoïde des empilements, a une solution (unique)  $X$  si et seulement si:  $C \subseteq C_1$ , où  $C_1$  désigne la base de  $E$ . Donc en effectuant le produit  $\overline{\Gamma} \Theta$ , le coefficient d'un empilement donné  $E$  non vide vaut:  $\sum (-1)^{|C|}$ , la sommation étant étendue à tous les sous-ensembles  $C$  de  $C_1$ . Or cette somme est nulle (c'est la base des arguments combinatoires du type "inclusion-exclusion"), ce qui prouve que  $\overline{\Gamma} \Theta = 1$ .

Le même raisonnement est valable pour l'équation:  $XC = E$ , en lisant les mots de droite à gauche dans  $\mathbf{pc}(G)$  (cf. empilement dual) ce qui prouve que  $\Theta \overline{\Gamma} = 1$ . En changeant chaque variable en son opposée, on obtient aussi:  $\Gamma \overline{\Theta} = \overline{\Theta} \Gamma = 1$ .  $\square$

Ce théorème apparaît dans [15], formulé avec des valuations; sa source, citée dans [15], est à nouveau [6, théorème 2.4], où il est présenté comme un calcul de *fonction de Möbius* (cf. la preuve). Cas particuliers:

- si  $G$  est le graphe *complet* sur  $A$ , on retrouve la formule:

$$\frac{1}{1 - A} = A^*$$

dans l'algèbre des séries en variables non commutatives.

- si  $G$  est le graphe *totallement déconnecté* – c'est à dire sans arête – sur  $A$ , toutes les variables commutent, la série  $\overline{\Gamma}$  se factorise en:  $\prod_{a \in A} (1 - a)$  et la série  $\Theta$  en:  $\prod_{a \in A} (1 + a + a^2 + \dots)$

### 3.4 Pyramides et théorème de décomposition

A un empilement  $E$  est associé un *ordre* sur les cellules de la manière suivante: on dit que la cellule  $(a, i)$  précède  $(b, j)$  dans  $E$  si:

$a$  et  $b$  sont voisins, et  $i < j$

et on considère l'ordre engendré par cette relation. Le *diagramme de Hasse* (voir figure 4) rend cet ordre visible: c'est le graphe dont les sommets sont les éléments de l'ensemble partiellement ordonné considéré, et les arcs les couples  $(x, y)$  tels que:

$x < y$  et il n'existe pas d'élément  $z$  tel que  $x < z < y$

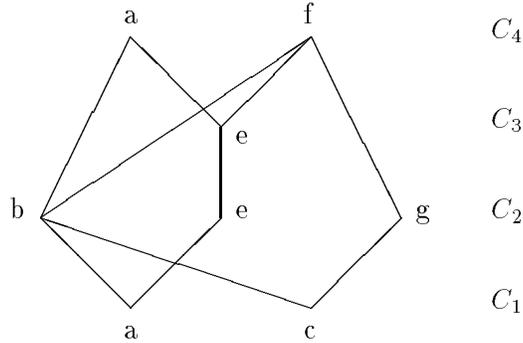


Figure 4: Diagramme de Hasse de l'empilement  $E$  de la figure 3.

Une *pyramide* est un empilement dont la base  $C_1$  est un singleton. Considérons un empilement quelconque  $E$ , et une cellule  $\gamma$  de  $E$ ; l'ensemble des cellules supérieures ou égales à  $\gamma$ , pour l'ordre ci-dessus, forme une pyramide de base  $\gamma$ , qu'on dit *engendrée* par  $\gamma$ , et la décomposition:

$$E = XP, \quad P \text{ pyramide de base } \gamma \quad (13)$$

est unique. Si  $E$  est représenté par un mot  $u$ , la cellule  $\gamma$  correspond à une occurrence d'une lettre  $a$  dans le mot  $u$ , et la pyramide  $P$  au mot formé par les lettres situées à droite de  $a$  dans  $u$ , et qu'aucune suite de commutations autorisées ne peut faire glisser à gauche de  $a$ .

**Exemple 1** (suite): l'empilement  $E$  est représenté par le mot  $u = acbegeaf$ , et possède les 8 décompositions suivantes (une par cellule), de type (13), déduites de la figure 4:

$$\begin{aligned} u &= cg.abeeaf = aee.cbgaaf = acege.baf = acbg.eeaf \\ &= acbeea.gf = acbeg.eaf = acbegef.a = acbegea.f \end{aligned}$$

Aux séries caractéristiques et alternées des configurations et empilements, définies par (11) et (12), ajoutons celles des pyramides:

$$\Pi = \sum_{\text{pyramide } P} P \quad \bar{\Pi} = \sum_{\text{pyramide } P} (-1)^{|P|} P$$

et les séries *dérivées*:

$$\Gamma' = \sum_{\text{configuration } C} |C| C \quad \Theta' = \sum_{\text{empilement } E} |E| E \quad (14)$$

(rappelons que  $|E|$  désigne le nombre de cellules de  $E$ ).

Notons qu'il n'y a pas de pyramide vide, donc la série  $\Pi$  ne comporte pas de terme constant.

**Exemple 2** (suite): Soit  $G$  le graphe de la section 3.3; la série  $\Pi$  débute par:

$$a + b + c + a^2 + ab + ba + b^2 + bc + cb + c^2 + \dots$$

(suivis de 18 termes de degré 3).

**Théorème 3** *La série caractéristique des pyramides est la "dérivée logarithmique droite" de celle des empilements; plus précisément, dans l'anneau des séries formelles en variables partiellement commutatives, on a:*

$$\Theta' = \Theta \Pi \quad (15)$$

*De même, la série alternée des pyramides est l'opposée de la "dérivée logarithmique gauche" de la série caractéristique des configurations:*

$$\Gamma' = -\bar{\Pi} \Gamma \quad (16)$$

*Preuve:* l'équation (15) résulte directement de la décomposition (13), car, pour un empilement donné  $E$ , il existe  $|E|$  décompositions de ce type (une par cellule). L'équation (16) est une conséquence algébrique de (15) et du théorème d'inversion (théorème 2), car la dérivée logarithmique de l'inverse de  $\Theta$  est, bien entendu, l'opposée de la dérivée logarithmique de  $\Theta$ .

Précisément, en multipliant à gauche les deux termes de (15) par l'inverse de  $\Theta$ , on obtient:

$$\bar{\Gamma} \Theta' = \Pi$$

D'autre part, de l'égalité:

$$|E_1 E_2| E_1 E_2 = (|E_1| + |E_2|) E_1 E_2 = (|E_1| E_1) E_2 + E_1 (|E_2| E_2)$$

on déduit par linéarité que la formule habituelle de dérivation d'un produit est applicable aux séries en variables partiellement commutatives, et donc:

$$(\bar{\Gamma} \Theta)' = \bar{\Gamma}' \Theta + \bar{\Gamma} \Theta'$$

et la formule  $\bar{\Gamma} \Theta = 1$  implique donc:

$$\bar{\Gamma}' \Theta = -\bar{\Gamma} \Theta' \quad \text{d'où} \quad \bar{\Gamma}' \Theta = -\Pi$$

On en déduit (16) en multipliant à droite par  $\bar{\Gamma}$  et en changeant les variables en leurs opposées, ce qui échange séries caractéristiques et alternées.  $\square$

### 3.5 Applications aux modèles de gaz

**Corollaire 4** *Soit un modèle de gaz avec particules dures, sur un graphe fini  $G$ , et soit:*

$$t = e^{\mu/kT}$$

*où  $\mu$  désigne le potentiel chimique du modèle,  $k$  la constante de Boltzmann, et  $T$  la température. Le nombre moyen de particules vaut:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n t^n$$

*où  $p_n$  désigne le nombre de pyramides de taille  $n$  sur  $G$ .*

*Preuve:* Pour toute série en variables partiellement commutatives  $\Delta$ , appelons *projection* de  $\Delta$  la série ordinaire  $\delta(t)$  obtenue en remplaçant les lettres de l'alphabet  $A$  par une même variable  $t$ . La projection est donc l'application:

$$\Delta = \sum_E \Delta(E) E \quad \rightarrow \quad \delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{|E|=n} \Delta(E) \right) t^n$$

Comme par hypothèse  $G$  est fini, il n'existe qu'un nombre fini d'empilements de taille  $n$ , et la série  $\delta$  est bien définie.

Par définition, dériver  $\Delta$  – cf. (14) – consiste à multiplier chaque coefficient  $\Delta(E)$  par la taille  $|E|$  de l'empilement; donc la projection de  $\Delta'$  se déduit de  $\delta$  en remplaçant  $t^n$  par  $nt^n$ , autrement dit vaut  $t \delta'(t)$ .

Les projections de  $\Gamma, \Theta$  et  $\Pi$  sont les séries génératrices  $\gamma(t), \theta(t)$  et  $\pi(t)$  qui énumèrent respectivement les configurations, empilements et pyramides selon leur taille; la formule (16) implique:

$$t \gamma'(t) = -\pi(-t) \gamma(t)$$

Or la fonction de partition  $Z(t)$  du modèle est égale à  $\gamma(t)$ , selon la formule (4), section 2.3; et le nombre moyen de particules vaut  $t Z'(t)/Z(t)$ , selon (5): le corollaire suit.  $\square$

**Corollaire 5** *Soit un modèle de gaz avec particules dures, sur un réseau  $G$ , et soit  $O$  un sommet de  $G$ . La densité moyenne par site vaut:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n t^n$$

*où  $p_n$  désigne le nombre de pyramides de taille  $n$  sur  $G$ , de base  $O$ .*

*Preuve:* sur un réseau, infini par définition, projeter une série n'a en général plus de sens, car il existe une infinité d'empilements de taille donnée; par contre on peut projeter la série  $\Pi_O$  des pyramides de base  $O$ , et la série génératrice correspondante  $\pi(t)$  ne dépend pas du choix de  $O$ , grâce à l'homogénéité d'un réseau. D'autre part, soit  $G_k$  une portion finie du réseau, comportant  $k$  sommets (cf. section 2.4); on se doute que si  $k$  est suffisamment grand, et  $G_k$  définie de façon raisonnable, le nombre de pyramides de taille  $n$  sur  $G_k$ , et de base  $a$ , dépend peu du choix de  $a$ ; autrement dit la série  $\pi_k(t)$  qui énumère *toutes* les pyramides sur  $G_k$ , vaut approximativement  $k \pi(t)$ . On peut montrer qu'on a exactement:

$$\pi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi_k(t)}{k} \quad (17)$$

Par définition, la densité par site est égale au nombre de particules divisé par le nombre de sommets; le corollaire 5 est donc une conséquence du précédent.  $\square$

Ce corollaire peut être interprété comme la limite thermodynamique du corollaire 4, au sens de la section 2.4; de même que les physiciens doivent définir la fonction de partition d'un gaz sur un réseau par une moyenne logarithmique, ici il faut remplacer l'énumération des configurations par celle des pyramides de base fixée, qui seule garde un sens. Notons cependant que notre démarche, en dehors de la formule (17), est purement algébrique, et repose sur les deux théorèmes fondamentaux de l'algèbre des séries formelles en variables partiellement commutatives (inversion et décomposition).

### 3.6 Empilements stricts

Un empilement est dit *strict* si deux couches consécutives ne contiennent jamais la même lettre, autrement dit si la condition (7) est remplacée par:

$$C_i \subseteq V(C_{i-1}) - C_{i-1}, \quad 1 < i \leq n$$

Si  $u$  est un mot de  $A^*$  qui représente l'empilement  $E$ ,  $E$  est strict si et seulement si, pour toute décomposition:

$$u = u_1 a u_2 a u_3$$

il existe une lettre de  $u_2$  qui ne commute pas avec  $a$  (voir par exemple la formule (10) pour le prouver); on dira qu'un tel mot est lui aussi strict.

**Théorème 6** *La série caractéristique des empilements,  $\Theta$ , se déduit de celle des empilements stricts en substituant*

$$\frac{a}{1-a} = a + a^2 + a^3 + \dots$$

*à chaque lettre  $a$  de l'alphabet  $A$ . Inversement, on passe des empilements aux empilements stricts par la substitution:*

$$a \rightarrow \frac{a}{1+a} = a - a^2 + a^3 - \dots$$

*Preuve:* la seconde affirmation est une conséquence immédiate de la première, car l'inverse de la fonction  $a \rightarrow a/(1-a)$  est la fonction  $a \rightarrow a/(1+a)$ .

Considérons ensuite un empilement  $E$ , et  $u$  un mot qui représente  $E$ ; écrivons  $u$  en regroupant les lettres consécutives égales:

$$u = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_m^{r_m} \text{ avec } a_i \neq a_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i < m$$

et parmi tous les mots  $u$  équivalents qui représentent le même empilement  $E$ , choisissons-en un avec le nombre  $m$  de facteurs minimal. Alors  $v = a_1 a_2 \dots a_m$  est strict; sinon il existe  $i < j$  avec  $a_i = a_j$  qui commute avec tout  $a_k$ , pour  $i < k < j$ , et on peut diminuer le nombre de facteurs de  $u$  en regroupant  $a_i^{r_i}$  et  $a_j^{r_j}$  en  $a_i^{r_i+r_j}$ .

Il reste à montrer que la trace du mot strict ainsi obtenu est unique; soient  $v = a_1 a_2 \dots a_m$  et  $v' = b_1 b_2 \dots b_n$  deux mots stricts tels que  $u = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_m^{r_m}$  et  $u' = b_1^{s_1} b_2^{s_2} \dots b_n^{s_n}$  soient équivalents; soit  $b_i$  la première occurrence de  $a_1$  dans  $v'$ ; puisque  $u \sim u'$ ,  $b_i$  commute avec  $b_k$  pour  $k < i$ . Posons  $w = b_1 \dots b_{i-1} b_{i+1} \dots b_n$ ; on a donc  $v' \sim a_1 w$ . D'autre part, si par exemple  $r_1 > s_i$ , il existe  $j > i$  tel que  $b_j = a_1$ ; commute avec  $b_k$  pour  $i < k < j$ , ce qui contredit le fait que  $v'$  soit strict; on fait un raisonnement symétrique si  $r_1 < s_i$ . Donc  $r_1 = s_i$ , et on peut simplifier l'équivalence  $u \sim u'$  par  $a_1^{r_1}$ ; par récurrence sur la longueur des mots, on sait que  $a_2 \dots a_m \sim w$ , d'où  $v \sim v'$ .  $\square$

## 4 Animaux dirigés

### 4.1 Définition

Les physiciens appellent *animal* un ensemble de points, ou *cellules*, sur un réseau, qui se développe à partir d'une configuration initiale par adjonction de cellules sur les sites vides voisins de ceux occupés (deux sites sont voisins s'ils sont reliés par une arête du réseau). La *taille* d'un animal est égale au nombre de ses cellules. Si la configuration initiale est connexe, en particulier si elle est réduite à un seul point, l'animal est connexe: deux cellules distinctes peuvent toujours être reliées, dans le réseau, par un chemin dont tous les sommets appartiennent à l'animal. La génération de ces animaux obéit à différentes lois, selon qu'ils servent à modéliser des problèmes de percolation, de croissance de cristaux ou de polymères, etc. . .

Les *animaux dirigés* sont contraints de se développer dans des directions privilégiées, définies en orientant les directions des arêtes du réseau; pour chaque cellule il existe donc dans l'animal un chemin orienté depuis la configuration initiale, appelée *source*, vers la cellule; on suppose en général que la source est réduite à un point. La figure 5 montre des exemples d'animaux dirigés sur réseaux plans; notons que le cas (b) peut être aussi obtenu à partir d'un réseau carré *nnn* (voir figure 1, section 2.4 ), avec les directions privilégiées Est, Nord et Nord-Est; un tel réseau est souvent appelé *triangulaire*.

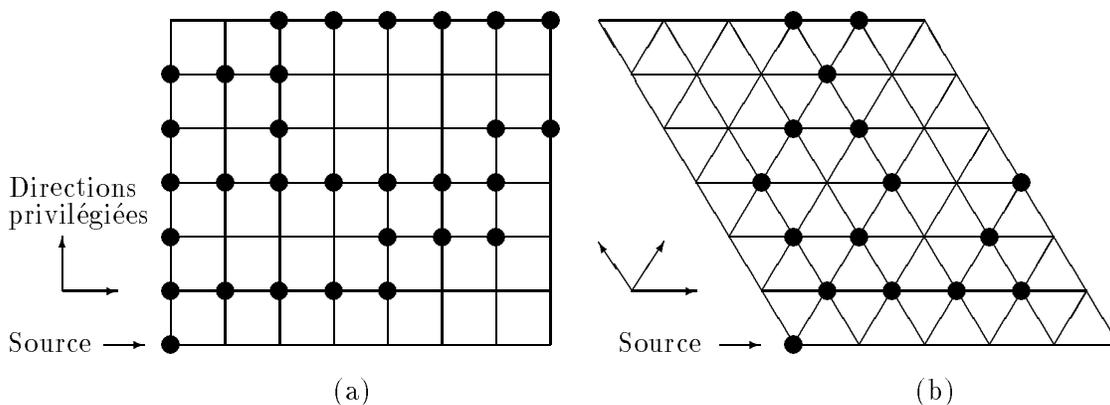


Figure 5: Animaux dirigés sur réseaux (a) carré (b) hexagonal

Nous allons montrer, section 4.4, que sur certains types de réseaux, les animaux dirigés correspondent à des empilements. Cette équivalence passe par le *coloriage* des réseaux, qui permet de construire une variante des empilements, et de définir clairement les réseaux pour lesquels l'équivalence est observable; c'est l'objet des deux sections suivantes.

## 4.2 Empilements coloriés

Nous avons présenté, section 3.2, la bijection fondamentale entre mots en variables partiellement commutatives, et empilements; la clef de cette bijection réside dans la répartition en couches des lettres successives d'un mot, de telle sorte que l'ordre des couches spécifie entièrement l'ordre des lettres dans le mot, aux commutations autorisées près. Autrement dit, on ajoute un nouveau sommet  $a$  à un empilement en respectant la règle fondamentale suivante: la hauteur de  $a$  est strictement supérieure à celles de toutes les fibres  $F_b$ , pour  $b$  voisin de  $a$ .

Il est possible d'introduire des variantes dans la définition des couches, tout en conservant cette règle; on obtient alors de nouvelles variétés d'empilements, toutes équivalentes entre elles, puisque isomorphes au monoïde partiellement commutatif. La variante *standard*, étudiée jusqu'à présent, consiste à placer  $a$  aussi bas que possible – voir formule (10). Dans cette section, nous ajouterons une contrainte, qui impose à tous les sommets d'une couche d'être de la même couleur.

Un *graphe colorié* est un graphe  $G$  dont les sommets sont coloriés avec  $r$  couleurs, notées  $1, 2, \dots, r$ , de telle sorte que deux sommets voisins soient de couleurs différentes; on notera  $G_s$  l'ensemble des sommets de couleur  $s$  ( $1 \leq s \leq r$ ); la figure 6 montre un réseau linéaire et un réseau carré coloriés avec deux couleurs, ainsi qu'un réseau hexagonal colorié avec trois couleurs.

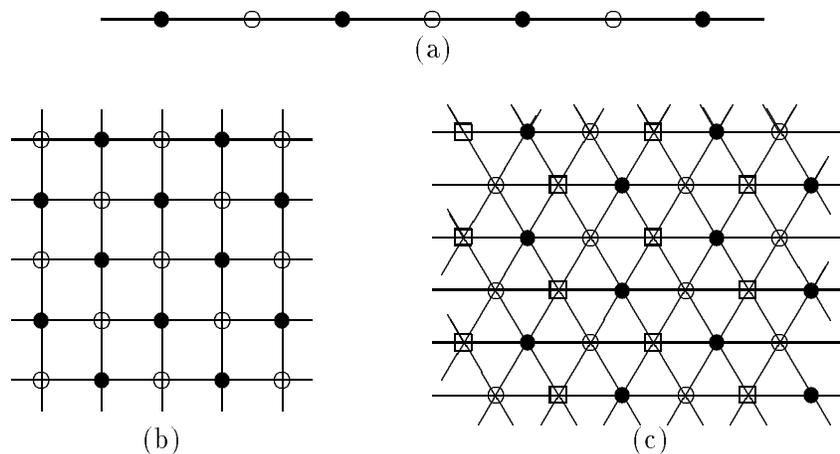


Figure 6: Réseaux coloriés (a) linéaire (b) carré (c) hexagonal

Dans un *empilement colorié* chaque couche  $C_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est un sous-ensemble de  $G_s$ , avec  $i \equiv s \pmod r$ ; les couches sont donc successivement de couleurs  $1, 2, \dots, r$ , et ainsi de suite de façon cyclique. La définition d'une coloration garantit que deux cellules d'une même couche ne sont jamais voisines dans  $G$ .

Dans un empilement standard, chaque cellule qui ne fait pas partie de la base, repose sur une voisine de la couche immédiatement inférieure; dans un empilement colorié, on impose seulement qu'une telle cellule possède au moins une voisine dans l'une des

$r$  couches inférieures. Autrement dit le placement d'un nouveau sommet  $a$  dans un empilement colorié se fait selon le même principe que dans un empilement standard, mais en tenant compte de la couleur de  $a$  dans le choix de la couche la plus basse au-dessus des fibres voisines.

Bien qu'il n'existe pas de relation simple entre les couches d'un empilement standard, et celles d'un empilement colorié, les mots obtenus par énumération des couches dans un empilement standard, et dans l'empilement colorié correspondant, sont équivalents.

La figure 7 montre un empilement colorié sur le réseau linéaire  $G$ , et l'empilement standard associé; les sommets de  $G$  sont représentés par des entiers: les entiers pairs sont noirs, les impairs blancs; deux sommets  $i$  et  $j$  commutent si  $|i - j| \geq 2$ . Les mots obtenus par énumération des couches sont respectivement 0102302302401 et 0102030203241, qui sont bien équivalents. La cellule la plus haute de la fibre  $F_1$  repose sur la fibre  $F_0$  dans l'empilement colorié, tandis qu'elle repose sur  $F_2$  dans l'empilement standard: le paradoxe n'est qu'apparent, car 0 et 2 commutent.

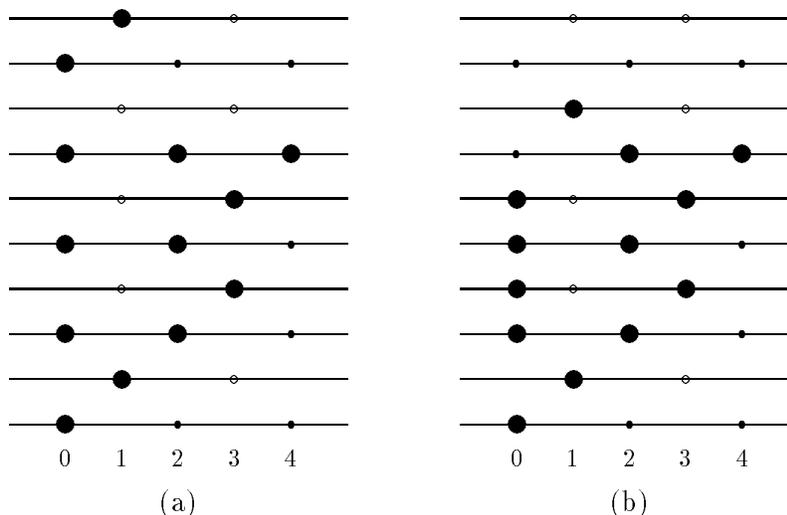


Figure 7: Empilements (a) colorié (b) standard, sur réseau linéaire

### 4.3 Réseaux feuilletés

A un réseau  $G$  de dimension  $d$ , colorié avec  $r$  couleurs, on peut associer un *réseau feuilleté*  $H$ , de dimension  $d + 1$ , défini comme suit: les sommets de  $H$  sont les couples  $(a, i)$ , pour tout entier  $i$  et tout sommet  $a$  de  $G$ , de couleur  $s \equiv i \pmod r$ ; un arc de  $H$  joint  $(a, i)$  à  $(b, j)$  si  $a$  et  $b$  sont voisins dans  $G$ , et si  $i < j < i + r$ .

Pour une valeur donnée de l'entier  $i$ , l'ensemble des sommets  $(a, i)$  de  $H$  sera appelé couche numéro  $i$ ; par définition, une couche est monocolore. Exemples:

1. Le réseau feuilleté associé au réseau linéaire colorié de la figure 6-(a), est le réseau carré de la figure 8-(a) (les couches sont horizontales).

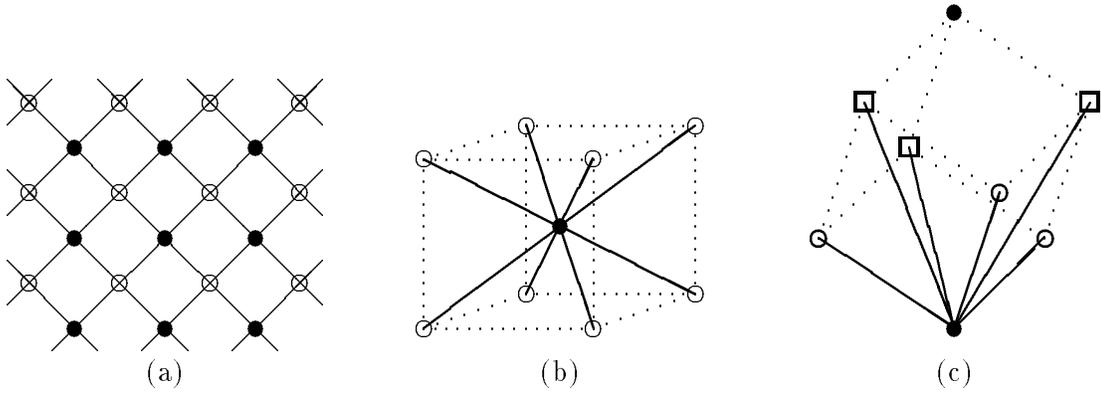


Figure 8: Réseaux feuilletés

2. Le réseau feuilleté associé au réseau carré colorié de la figure 6-(b), est le réseau cubique centré; on l'obtient en ajoutant aux sommets d'un réseau cubique, coloriés en blanc, les centres des cubes élémentaires, coloriés en noir: voir la figure 8-(b). Ainsi chaque sommet de la couche  $i$  possède 8 voisins immédiats (les sommets du cube dont il est le centre), répartis dans les couches  $i - 1$  et  $i + 1$ .
3. Le réseau feuilleté associé au réseau hexagonal colorié de la figure 6-(c), est le réseau cubique  $nnn$  – voir section 2.4 pour la définition des réseaux  $nnn$ . Chaque hexagone du réseau plan est considéré comme la projection d'un cube "posé sur la pointe"; chaque sommet de la couche  $i$ , possède 3 voisins immédiats dans la couche  $i + 1$ , et 3 "voisins suivants" dans la couche  $i + 2$ : voir la figure 8-(c).

Un réseau feuilleté peut être *orienté* en dirigeant les arcs des couches inférieures vers les couches supérieures (il n'y a jamais d'arête à l'intérieur d'une couche); il peut être *étendu* en ajoutant les arcs  $(a, i) \rightarrow (a, i + r)$ . Par exemple le réseau feuilleté étendu associé au réseau linéaire est un réseau triangulaire, obtenu en ajoutant des arcs verticaux à la figure 8-(a).

#### 4.4 Equivalence entre animaux dirigés et empilements

**Théorème 7** Soit  $G$  un réseau colorié, de dimension  $d$ ,  $H$  le réseau feuilleté orienté issu de  $G$ , de dimension  $d + 1$ , et  $H'$  le réseau étendu. Il existe une bijection entre pyramides (resp. pyramides strictes) construites sur  $G$ , et animaux dirigés, de sources ponctuelles, sur  $H'$  (resp.  $H$ ).

*Preuve:* soit  $r$  le nombre de couleurs de  $G$ ; par définition d'un empilement colorié  $E$ , chaque cellule  $(b, j)$  qui n'appartient pas à la base de l'empilement, possède une voisine  $(a, i)$  dans l'une des  $r$  couches inférieures. Si  $j = i + r$ , alors  $a = b$ , car les couches  $i$  et  $i + r$  ont même couleur; donc si l'empilement est strict, on a  $j < i + r$ . Par définition d'un réseau feuilleté orienté, il existe un arc  $(a, i) \rightarrow (b, j)$  dans  $H'$ , et même dans  $H$  si l'empilement est strict.

De proche en proche, on en déduit que, pour toute cellule de  $E$ , il existe un chemin dans  $H$  (ou dans  $H'$ ) depuis la base de  $E$  jusqu'à cette cellule. Un empilement colorié sur  $G$  est donc un animal dirigé sur  $H'$ , et même sur  $H$  s'il s'agit d'un empilement strict; et vice-versa. Si la source de l'animal est ponctuelle, la base de l'empilement est réduite à un point: c'est donc une pyramide.

Enfin on a vu section 4.2 qu'il existe une bijection naturelle entre empilements standard et empilements coloriés.  $\square$

Exemples:

1. Lorsque le nombre de couleurs  $r$  vaut 2, il n'existe aucune différence entre empilements stricts standard et empilements stricts coloriés. Donc l'animal dirigé de la figure 5-(a) est exactement une pyramide stricte sur réseau linéaire: il suffit de faire subir au dessin une rotation de  $\pi/4$  dans le sens trigonométrique pour le vérifier.
2. L'animal dirigé de la figure 5-(b) est une pyramide coloriée (non stricte) sur réseau linéaire: il faut faire subir cette fois au dessin une rotation de  $\pi/6$  dans le sens trigonométrique. La pyramide coloriée de la figure 7-(a) est un autre exemple d'animal dirigé sur réseau triangulaire; la pyramide standard de la figure 7-(b) est donc la pyramide associée à cet animal.
3. Une pyramide stricte sur réseau carré correspond à un animal dirigé sur un réseau cubique centré; l'animal peut se développer, dans un repère convenablement choisi, selon l'un des 4 vecteurs:

$$(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1)$$

auxquels il faut ajouter le vecteur  $(0, 0, 2)$  pour traiter les pyramides quelconques; voir figure 8-(b).

4. Une pyramide stricte sur réseau hexagonal correspond à un animal dirigé sur un réseau cubique  $nmn$ ; l'animal peut se développer selon l'un des 6 vecteurs:

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$$

auxquels il faut ajouter le vecteur  $(1, 1, 1)$  pour traiter les pyramides quelconques. Noter qu'avec le repère choisi ici, les couches ne sont plus horizontales, comme sur la figure 8-(c), mais d'équations  $x + y + z = i$ .

En combinant ce théorème, dû à X.G.Viennot, avec le corollaire 5 de la section 3.5, et avec le théorème 6, qui relie les séries caractéristiques des empilements selon qu'ils sont stricts ou non, on retrouve le résultat suivant de D.Dhar [10]:

**Corollaire 8** *Le problème de l'énumération des animaux dirigés sur un réseau feuilleté  $H$  issu d'un réseau  $G$ , est équivalent à celui du calcul de la densité moyenne d'un gaz à particules dures sur  $G$ , en fonction de la température.*  $\square$

Il est intéressant de comparer les méthodes employées en physique théorique et celles, combinatoires, présentées dans cet article. Dans [10], D.Dhar emploie l’approche suivante:

“ Un site  $j$  est appelé successeur du site  $i$  s’il existe un arc de  $i$  vers  $j$ . Pour un ensemble de sites  $C$ , l’ensemble des successeurs sera noté  $S(C)$ . (...) Définissons pour chaque site  $i$  du réseau un temps  $t(i)$ , à valeurs entières, tel que  $t(j) \geq t(i) + 1$  chaque fois que  $j$  est un successeur de  $i$ . (Dans un animal dirigé) les configurations autorisées de sites occupés, sur la surface  $t = T$ , ne dépendent que des configurations aux instants précédents  $t \leq T - 1$ . Considérons d’abord, pour simplifier, le cas où elles dépendent seulement de la configuration sur la surface  $t = T - 1$  (cas du réseau carré, et du réseau cubique centré). Soit  $C$  l’ensemble des sites occupés sur une hyper-surface  $t = c^{\text{ste}}$ . Définissons les fonctions génératrices  $A_C(x)$ , qui énumèrent selon leur taille les animaux dirigés de source  $C$ .

La propriété markovienne des animaux dirigés implique que ces fonctions génératrices vérifient les récurrences:

$$A_C(x) = x^{|C|} \left( 1 + \sum_D A_D(x) \right)$$

où la sommation est étendue à tous les sous-ensembles non vides  $D$  de  $S(C)$ . Notons que le temps sur les sites de  $D$  est supérieur de 1 au temps sur les sites de  $C$ . Il est facile de généraliser ces récurrences au cas où les configurations autorisées à l’instant  $t = T$  dépendent aussi des configurations aux instants  $t \leq T - 2$  (cas des réseaux  $nnn$ , etc...). Ces équations forment la hiérarchie de Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (sic) pour le problème de l’énumération des animaux dirigés. ”

D.Dhar compare alors ces équations à celles qu’on obtient en simulant l’évolution d’un gaz: à chaque incrémentation du temps, chaque site évolue aléatoirement, la probabilité d’occupation d’un site donné ne dépendant que de la configuration des sites voisins, avec une formule simple déduite de la loi de Gibbs (3); lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le gaz approche ainsi de l’équilibre thermique. Ce principe de simulation, classique en physique statistique, est aussi à la base des réseaux de neurones (voir par exemple [17]).

“ (Etudions) l’évolution stochastique dans le temps d’un gaz sur un réseau de dimension  $d - 1$ . Ce réseau est constitué de  $r$  sous-réseaux entrelacés  $L_1, L_2, \dots, L_r$ , chacun d’entre eux étant isomorphe à un hyperplan  $\tau = c^{\text{ste}}$  du réseau de dimension  $d$  (sur lequel se développent les animaux dirigés). (...) A l’instant  $\tau = mr + i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), la configuration des sites occupés sur le sous-réseau  $L_i$  évolue aléatoirement, tandis que les autres sous-réseaux restent inchangés. Lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , la probabilité des différentes configurations du gaz tend vers une distribution limite invariante. Pour des lois de

transition arbitraires, le calcul de la distribution invariante est tout à fait difficile. (Ici) les lois de transition sont particulièrement simples, et correspondent aux algorithmes de Monte-Carlo utilisés couramment pour étudier les lois d'équilibre d'un gaz sur un réseau avec particules dures (...). La probabilité d'occupation d'un site  $i$  vaut 0 si l'un des sites successeurs de  $i$  est occupé; et elle vaut  $p$  s'ils sont tous vides. ”

D.Dhar remarque qu'il suffit de “renverser le temps”, c'est à dire de poser  $\tau = -t$ , pour faire disparaître le paradoxe qui fait dépendre la probabilité d'occupation d'un site  $i$  de la configuration de ses successeurs, au lieu de ses prédécesseurs. Il écrit:

“ Soit  $P(C)$  la probabilité que tous les sites de l'ensemble  $C$ , inclus dans une hyper-surface  $\tau = c^{\text{ste}}$ , soient occupés. Je suppose  $\tau$  suffisamment grand pour que  $P(C)$  ne dépende pas de  $\tau$ . Cette probabilité est égale à  $p^{|C|}$  multiplié par la probabilité que tous les sites de  $S(C)$  soient vides. En utilisant le principe d'inclusion-exclusion

$$P(C) = p^{|C|} \left( 1 + \sum_D (-1)^{|D|} P(D) \right)$$

où la sommation est étendue à tous les sous-ensembles non vides  $D$  de  $S(C)$ . On voit donc que

$$A_C(x = -p) = (-1)^{|C|} P(C).$$

Ainsi la fonction génératrice des animaux dirigés issus d'un seul point source (sur un réseau de dimension  $d$ ) est déterminée par la densité moyenne de sites occupés dans un gaz à l'équilibre sur un réseau de dimension  $d - 1$ . ”

On voit comment le théorème d'inversion est remplacé par l'utilisation du principe d'inclusion-exclusion en calcul des probabilités. L'introduction de sous-réseaux entrelacés, qui a été utile aussi dans le présent article pour éclaircir la bijection entre empilements et animaux, n'est pas expliquée par D.Dhar. Elle est rendue nécessaire par le modèle des particules dures, car si à l'instant  $\tau$  tous les sites changent aléatoirement d'état, on peut voir apparaître des particules sur des sites voisins, chacun étant pourtant entouré de sites vides à l'instant précédent.

Nos méthodes algébriques sont donc parentes de celles des physiciens, dont on ne peut qu'admirer l'ingéniosité; mais l'algèbre et la combinatoire, substituées aux récurrences déduites du calcul des probabilités, permettent d'éliminer l'imprécision de certains arguments; surtout elles permettent une étude plus fine des objets: dans la section suivante, l'algèbre des empilements nous donnera des décompositions canoniques des animaux en dimension 2, qui permettent à la fois de retrouver très simplement les séries génératrices qui les énumèrent, et de construire des animaux aléatoires, avec distribution uniforme, en temps linéaire.

## 5 Solution du modèle linéaire

### 5.1 Décomposition en équerres

Le cas le plus simple de modèle de gaz à particules dures sur un réseau  $G$ , est celui où  $G$  est de dimension 1, autrement dit où  $G$  est une chaîne infinie, isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . D'après la section 4.4, les pyramides strictes sur  $G$  sont exactement les animaux dirigés, de source ponctuelle, sur réseau carré.

Repérons les sommets de  $G$  par des entiers, et considérons une pyramide  $P$  de base 0. On peut décomposer  $P$  en remarquant que:

- si  $P$  ne contient aucune cellule au-dessus de 1, autrement dit si la fibre  $F_1$  est vide, alors toutes les fibres  $F_i$ , pour  $i > 1$ , sont vides aussi; on dira dans ce cas que  $P$  est une *équerre* de base 0. Cette propriété repose sur une particularité évidente du modèle linéaire: il n'existe pas de chemin de 0 vers  $i > 1$ , qui ne passe pas par 1.
- si  $F_1$  n'est pas vide, soit  $(1, k)$  la cellule la plus basse sur cette fibre, et soit  $Q$  la pyramide engendrée par cette cellule; la décomposition (13) de la section 3.4 devient:

$$P = L Q \quad (18)$$

où  $L$  est une équerre, car  $Q$  contient la fibre  $F_1$ .

La décomposition (18) peut évidemment être itérée, en décomposant  $Q$ , etc. ...; elle est schématisée, ainsi que son itération, sur la figure 9. La plus grande valeur de  $i$  pour laquelle la fibre  $F_i$  n'est pas vide, est appelée *demi-largeur droite* de la pyramide (ou de l'animal)  $P$ ; le nombre d'équerres qui interviennent dans la décomposition de  $P$  est égal à  $i + 1$ ; une équerre est une pyramide de demi-largeur droite nulle.

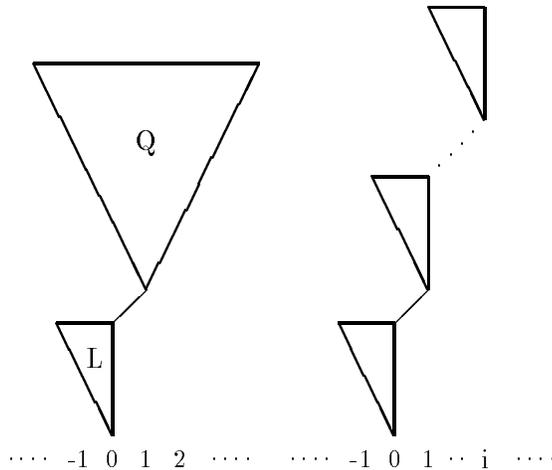


Figure 9: Schéma de décomposition d'une pyramide en produit d'équerres

La figure 10 illustre ces décompositions sur l'exemple de l'animal de la figure 5-(a), dont la demi-largeur droite vaut 4; la partie (a) de la figure montre la première

décomposition, avec les cellules de  $L$  marquées en noir, et celles de  $Q$  en blanc; la partie (b) montre la décomposition itérée de  $Q$  comme produit de quatre équerres. On notera que la pyramide  $Q$  ne semble pas former un animal sur la figure 10-(a); (b) montre  $Q$  sous forme d'animal, après la "chute" de quatre cellules, une fois l'équerre  $L$  disparue. Cet exemple montre combien l'algèbre des empilements est essentielle pour ces décompositions, invisibles si l'on s'en tient à la définition brute d'un animal.

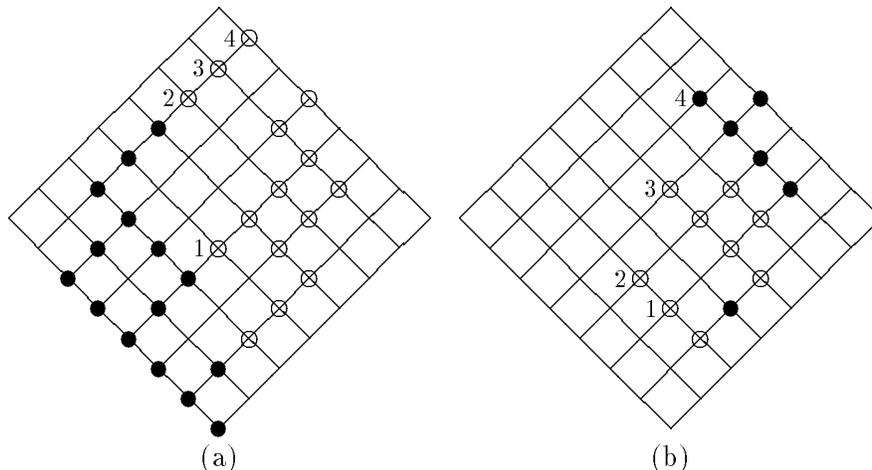


Figure 10: Exemple de décomposition d'une pyramide en produit d'équerres

En notant  $\Pi_i$  (resp.  $\Lambda_i$ ) la série caractéristique des pyramides (resp. équerres) de base  $i$ , la décomposition (18) devient (en tenant compte du cas où  $P$  est déjà une équerre):

$$\Pi_0 = \Lambda_0 (1 + \Pi_1) \quad (19)$$

Une équerre  $L$  de taille strictement supérieure à 1, peut être à son tour décomposée; soit  $x$  la base de  $L$ :

- si  $x$  est seule sur la fibre  $F_0$ , alors la pyramide  $M$ , engendrée par la cellule  $(-1, 1)$ , est une équerre, et:

$$L = x M \quad (20)$$

- sinon, soit  $(0, k)$  la cellule la plus basse sur  $F_0$ , avec  $k > 1$ ; cette cellule engendre une pyramide  $N$ , qui est à son tour une équerre, et la décomposition:

$$L = x M N \quad (21)$$

laisse une pyramide  $M$ , de base  $(-1, 1)$ , dont on a vidé la fibre  $F_0$ ;  $M$  est donc une équerre.

Ces décompositions sont schématisées sur la figure 11, parties (a) et (b); la partie (c) illustre (b) sur l'exemple de l'équerre noire de la figure 10-(a); l'équerre  $M$  est laissée

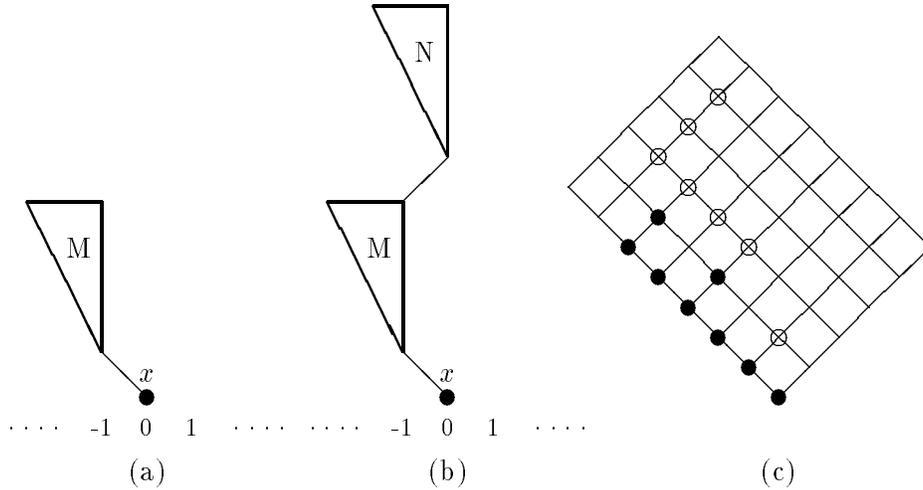


Figure 11: Décomposition d'une équerre en produit d'équerres

noire, et les cellules de  $N$  apparaissent en blanc. On peut voir à nouveau que cette décomposition n'est pas visible sans considérer un animal comme un empilement, car  $N$  n'est pas connexe.

Les décompositions (20) et (21) entraînent, pour les séries caractéristiques, en tenant compte du cas où  $L = x$  (pyramide réduite à sa base):

$$\Lambda_0 = x(1 + \Lambda_{-1} + \Lambda_{-1} \Lambda_0) \quad (22)$$

Les équations (19) et (22) concernent les pyramides strictes, ou les animaux dirigés sur réseau carré; pour les pyramides générales, qui correspondent aux animaux dirigés sur réseau triangulaire, on peut appliquer le théorème 6, ou remarquer que (19) reste valable, et que (22) devient:

$$\Lambda_0 = x(1 + \Lambda_{-1} + \Lambda_0 + \Lambda_{-1} \Lambda_0) \quad (23)$$

car il y a une seconde décomposition de type 11-(a), avec  $M$ , de base 0, reposant verticalement sur  $x$ .

## 5.2 Séries génératrices

On obtient les séries génératrices des pyramides et des équerres en projetant (voir section 3.5) les équations obtenues pour les séries caractéristiques dans la section précédente; ces projections ne dépendent pas de la base. En notant  $\pi(t)$  (resp.  $\lambda(t)$ ) la série génératrice qui énumère les pyramides strictes (resp. les équerres strictes), (19) et (22) fournissent:

$$\pi(t) = \lambda(t) [1 + \pi(t)] \quad (24)$$

$$\lambda(t) = t [1 + \lambda(t) + \lambda(t)^2] \quad (25)$$

Ces équations sont facilement résolues:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \frac{1-t-\sqrt{(1+t)(1-3t)}}{2t} \\ &= t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + 323t^9 + \dots\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\pi(t) &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1 \right) \\ &= t + 2t^2 + 5t^3 + 13t^4 + 35t^5 + 96t^6 + 267t^7 + 750t^8 + 2123t^9 + \dots\end{aligned}\quad (27)$$

Pour énumérer les équerres et les pyramides générales, il faut remplacer (25) par l'équation déduite de (23):

$$\lambda(t) = t [1 + 2\lambda(t) + \lambda(t)^2] \quad (28)$$

et on obtient cette fois:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \frac{1-2t-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n \\ &= t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5 + 132t^6 + 429t^7 + 1430t^8 + 4862t^9 + \dots\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\pi(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \sum \binom{2n}{n} t^n \\ &= t + 3t^2 + 10t^3 + 35t^4 + 126t^5 + 462t^6 + 1716t^7 + 6435t^8 + 24310t^9 + \dots\end{aligned}\quad (30)$$

Il n'existe pas de forme close pour les coefficients des séries (26) et (27), contrairement au cas des séries (29) et (30). On vérifie que, conformément au théorème 6, on peut passer du premier couple de séries au second par la substitution  $t \rightarrow t/(1-t)$ , et inversement du second au premier par la substitution  $t \rightarrow t/(1+t)$ .

En appliquant le théorème 7, section 4.4, on retrouve les résultats de [10, 11, 12, 14]:

**Théorème 9** *La série (27) - resp. (30) - est la série énumératrice des animaux dirigés, de source ponctuelle, sur réseau carré - resp. triangulaire -, selon leur taille.  $\square$*

Si, d'autre part, on applique le corollaire 5 de la section 3.5, on obtient:

**Théorème 10** *La densité moyenne d'un gaz avec particules dures, sur réseau linéaire, vaut:*

$$d(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \right)$$

*Preuve:* d'après le corollaire 5, cette densité vaut  $-\pi(-t)$ , où  $\pi(t)$  est la série énumératrice des pyramides, donnée par (30).  $\square$

Rappelons que la variable  $t$  est liée à la température absolue  $T$  par  $t = e^{\mu/kT}$ , où  $\mu$  désigne le potentiel chimique, et  $k$  la constante de Boltzmann (cf. section 2.3). Si le potentiel chimique est positif, l'énergie diminue lorsque le nombre de particules augmente; lorsque la température  $T$  croît de 0 à  $+\infty$ ,  $t$  décroît de  $+\infty$  à 1, et  $d(t)$  décroît de  $1/2$  (configuration d'énergie minimale: un site sur deux est occupé) à  $(1 - 1/\sqrt{5})/2$  (toutes les configurations sont équiprobables). On note que la densité ne présente pas de singularité, bien que son développement en série ait pour rayon de convergence  $1/4$ .

D.Dhar, dans [9, 10], déduit le théorème 9 du théorème 10, bien connu des physiciens, alors que notre approche donne les deux résultats simultanément.

### 5.3 Chemins de Dyck et chemins de Motzkin

Les formules de la section précédente sont classiques en combinatoire, dans d'autres contextes. Rappelons qu'un *chemin de Dyck* est un chemin dans le plan discret, composé de pas ascendants  $(1, 1)$  et de pas descendants  $(1, -1)$ , et qui joint l'origine  $(0, 0)$  à un point de l'axe des abscisses, sans quitter le quart de plan supérieur: voir figure 12-(a). Un *chemin de Motzkin* est défini de façon semblable, mais comporte en outre des pas horizontaux  $(1, 0)$ : voir figure 12-(b).

Dans un chemin de Motzkin  $r$ -colorié, il y a  $r$  sortes de pas horizontaux; dans la suite  $r = 0, 1$  ou  $2$ : les chemins 0-coloriés sont les chemins de Dyck, les chemins 1-coloriés sont les chemins de Motzkin ordinaires, et les chemins 2-coloriés seront dits *bicoloriés*.

Un *préfixe* de Motzkin est un chemin de Motzkin éventuellement incomplet, c'est à dire qui ne se termine pas forcément sur l'axe des abscisses; la *hauteur* d'un préfixe désigne l'ordonnée du point d'arrivée.

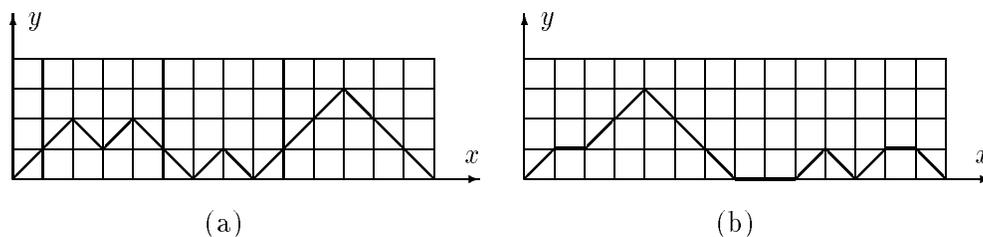


Figure 12: Chemins (a) de Dyck (b) de Motzkin

La *longueur* d'un chemin compte le nombre de pas; un chemin peut être vide: il est alors de longueur nulle. En notant un pas ascendant  $a$ , un pas descendant  $b$ , et un pas horizontal de couleur  $i$ ,  $c_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), on associe à un chemin de Motzkin  $r$ -colorié un *mot de Motzkin*, sur un alphabet à  $r + 2$  lettres; les mots de Dyck correspondent au cas  $r = 0$ ; le pas  $c_1$  sera parfois noté simplement  $c$ .

Un chemin de Motzkin non vide  $W$  se décompose selon le schéma de la figure 13, en  $W = c_i U$  – cas (a) – ou en  $W = a U b V$  – cas (b);  $U$  et  $V$  désignent à nouveau des chemins de Motzkin (éventuellement vides): on se trouve dans le cas (a) ou (b) selon que  $W$  débute par un pas horizontal ou ascendant; dans ce dernier cas,  $V$  débute dès le *premier* retour sur l'axe des abscisses, d'où l'unicité de la décomposition.

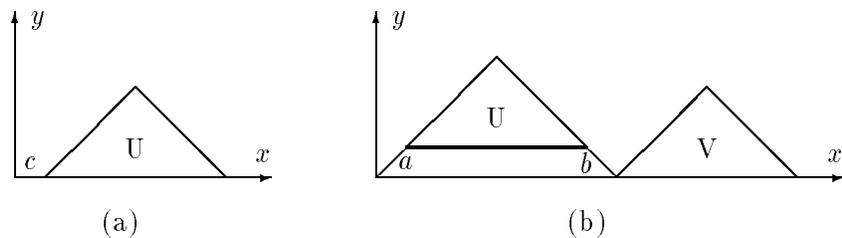


Figure 13: Décompositions de chemins

En désignant par  $\mathbf{M}$  le langage des mots de Motzkin  $r$ -coloriés, on en déduit l'équation:

$$\mathbf{M} = 1 + \sum_{1 \leq i \leq r} c_i \mathbf{M} + a \mathbf{M} b \mathbf{M} \quad (31)$$

(où la somme  $\sum c_i \mathbf{M}$  disparaît pour  $r = 0$ ). La série énumératrice des mots de Motzkin selon leur longueur vérifie donc:

$$\mu(t) = 1 + rt\mu(t) + t^2\mu(t)^2$$

dont les solutions sont (26) et (29) pour  $r = 1$  et  $r = 2$ , avec  $\lambda(t) = t\mu(t)$ .

Un préfixe  $W$  d'un chemin de Motzkin, ou bien est un chemin de Motzkin complet, ou bien se décompose selon la figure 14, en un chemin de Motzkin  $U$  suivi d'un préfixe  $V$ , soit  $W = UaV$ . Cette décomposition est unique, car  $U$  se termine au *dernier* passage sur l'axe des abscisses. Donc la série énumératrice  $\rho(t)$  des préfixes est liée à celle des chemins complets par:

$$\rho(t) = \mu(t)[1 + t\rho(t)]$$

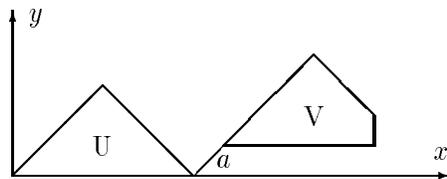


Figure 14: Décomposition d'un préfixe

Nous appellerons *célibataire* un pas ascendant conduisant du niveau  $y$  au niveau  $y+1$  – ie. un pas  $(x, y) \rightarrow (x+1, y+1)$  –, et qui n'est suivi d'aucun pas descendant ramenant le chemin au niveau  $y$ . Si on itère la décomposition ci-dessus d'un préfixe  $W$ , on obtient:

$$W = U_0 a U_1 a \dots U_l \quad (32)$$

où les occurrences de  $a$  désignent les pas ascendants célibataires, et les  $U_i$  des mots de Motzkin (éventuellement vides). Cette décomposition est unique, et la hauteur du chemin est égale au nombre  $l$  de pas célibataires.

L'analogie entre les décompositions de chemins et d'animaux, fournit une bijection résumée dans le théorème suivant, dû à [11] (mais avec une construction totalement différente):

**Théorème 11** *Il existe une bijection entre, d'une part: animaux dirigés, de source ponctuelle, sur réseau carré (resp. triangulaire), de taille  $n$ , et d'autre part: préfixes de Motzkin (resp. préfixes bicoloriés), de longueur  $n - 1$ . Dans cette bijection, les animaux de demi-largeur droite  $k$  correspondent aux chemins de hauteur  $k$ ; en particulier les équerres correspondent aux chemins de Motzkin.*

*Preuve:* la bijection se construit de manière récursive; détaillons-la dans le sens chemin  $\rightarrow$  animal, et notons-la  $\beta$ ; rappelons que  $|U|$  désigne la longueur d'un chemin  $U$ , et  $|P|$  la taille d'un animal  $P$ . Au chemin vide (de longueur nulle) on associe l'animal réduit à une cellule (de taille 1).

Soit  $W$  un chemin de Motzkin non vide; si  $W = c_i U$ , on associe récursivement à  $U$  un animal en équerre  $M = \beta(U)$ , et on pose  $\beta(W) = L = xM$ , avec les notations de (20); si  $W$  est un chemin de Motzkin ordinaire, la base de  $M$  est translatée horizontalement de -1 par rapport à  $x$ , base de  $L$ , comme sur la figure 11; si  $W$  est un chemin de Motzkin bicolorié, la base de  $M$  est translatée de -1 ou de 0 selon que  $W$  débute par  $c_1$  ou  $c_2$ : on obtient alors un animal sur réseau triangulaire.

De même, si  $W = aUbV$ , on associe récursivement à  $U$  et  $V$  des équerres  $M = \beta(U)$  et  $N = \beta(V)$ , et on pose  $\beta(W) = L = xMN$ , avec les notations de (21). La base de  $M$  est translatée horizontalement de -1 par rapport à  $x$ , base de  $L$ , et  $N$  a sa base sur la même fibre que  $x$ .

Si  $W$  est un préfixe de Motzkin qui ne retourne pas sur l'axe des abscisses, alors  $W = UaV$ , où  $a$  désigne un pas ascendant célibataire; on associe récursivement à  $U$  et  $V$  une équerre  $L = \beta(U)$  et un animal  $Q = \beta(V)$ , et on pose  $\beta(W) = P = LQ$ , avec les notations de (18). La base de  $Q$  est translatée horizontalement de +1 par rapport à celle de  $L$ .

On vérifie que ces constructions conservent la relation  $|\beta(W)| = |W| + 1$  et que la demi-largeur droite de  $\beta(W)$  s'accroît en même temps que la hauteur de  $W$  (rappelons que la hauteur de  $W$  est définie comme l'ordonnée du point d'arrivée).  $\square$

Cette bijection est écrite en langage C dans la section 6.1, et la section 6.2 contient des exemples (avec  $c_1$  noté  $c$ , et  $c_2$  noté  $d$ ). Le théorème 11 confirme les valeurs trouvées pour les coefficients des séries (29) et (30), grâce à la proposition suivante:

**Proposition 12** *Le nombre de mots de Motzkin bicoloriés de longueur  $n - 1$  est égal au nombre de mots de Dyck de longueur  $2n$ , donné par le nombre de Catalan:*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}.$$

Le nombre de préfixes de Motzkin bicoloriés de longueur  $n - 1$  est égal au nombre de préfixes de Dyck de longueur  $2n - 1$ , donné par le coefficient binomial:

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} .$$

*Preuve:* cette proposition est classique en combinatoire; la première partie découle simplement de l'identité entre séries génératrices:

$$[1 + \lambda(t)]^2 = 1 + 2\lambda(t) + \lambda(t)^2 .$$

Nous en donnons une preuve bijective pour être complets. Pour la première affirmation, il suffit d'associer à un mot de Motzkin bicolorié  $W$ , un mot de Dyck *non vide*  $W'$  défini de façon récursive –  $\epsilon$  désigne le chemin vide:

$$\epsilon \rightarrow ab , \quad c_1U \rightarrow abU' , \quad c_2U \rightarrow aU'b , \quad aUbV \rightarrow aU'bV' .$$

C'est une bijection, car l'équation  $D = 1 + aDbD$ , vérifiée par la série caractéristique des mots de Dyck – voir (31) –, peut s'écrire:

$$D - 1 = ab + ab(D - 1) + a(D - 1)b + a(D - 1)b(D - 1) .$$

Pour la seconde partie de la proposition, on part de  $W = U_0 a U_1 a \dots U_l$  – voir (32) –, on associe à chaque mot de Motzkin bicolorié  $U_i$  un mot de Dyck  $U'_i$  comme ci-dessus, on appelle  $U''_i$  le mot  $U'_i$  privé de son pas descendant final  $b$ , et on associe à  $W$  le mot:

$$W'' = U''_0 a U''_1 a \dots U''_l .$$

C'est une bijection car on peut retrouver la décomposition ci-dessus de  $W''$  en repérant ses pas ascendants célibataires de rang pair. On vérifie aussi que  $|W''| = 2|W| + 1$ .

Enfin, un préfixe de Dyck de longueur impaire  $2n - 1$  possède un nombre impair  $2k - 1$  de pas ascendants célibataires; en remplaçant les  $k$  premiers par des pas descendants, on obtient un chemin joignant l'origine au point  $(2n - 1, -1)$ . C'est encore une bijection, car les pas descendants ainsi introduits sont les pas *descendants célibataires*: un pas descendant conduisant du niveau  $y + 1$  au niveau  $y$  – ie. un pas  $(x, y + 1) \rightarrow (x + 1, y)$  –, est appelé célibataire s'il n'est *précédé* d'aucun pas ascendant conduisant du niveau  $y$  au niveau  $y + 1$ , autrement dit s'il est le premier atteignant le niveau  $y$ . Ceci explique que les préfixes de Dyck soient comptés par un coefficient binomial.  $\square$

La technique qui consiste à repérer, dans un chemin (ou mot) quelconque  $W$ , les pas célibataires, conduit à la *factorisation de Catalan*:

$$W = U_0 b U_1 b \dots U_k a U_{k+1} a \dots U_{k+l} \tag{33}$$

qui comporte  $k$  (resp.  $l$ ) pas célibataires descendants (resp. ascendants), et est unique: voir figure 15.

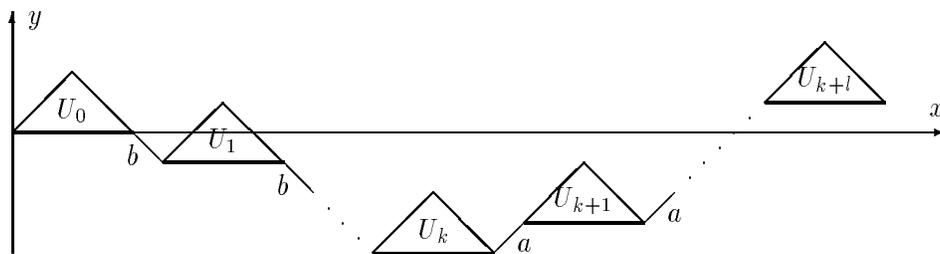


Figure 15: Factorisation de Catalan d'un chemin quelconque

Les préfixes de Motzkin sont les chemins sans pas célibataire descendant ( $k = 0$ ), et le nombre  $l$  de pas célibataires ascendants est égal à la hauteur du chemin; les chemins de Motzkin sont ceux qui ne possèdent aucun pas célibataire, ascendant ou descendant ( $k = l = 0$ ).

A un préfixe de Motzkin de hauteur  $l$ , on peut associer  $l + 1$  mots en remplaçant les  $j$  ( $0 \leq j \leq l$ ) premiers pas célibataires ascendants par des pas descendants; on en déduit, comme dans [11], que la moyenne des hauteurs des préfixes de Motzkin  $r$ -coloriés de longueur  $n$  vaut:

$$\frac{(r + 2)^n}{m_n} - 1$$

où  $m_n$  désigne le nombre de ces préfixes; comme la largeur moyenne d'un animal est évidemment le double de la demi-largeur droite moyenne, le théorème 11 fournit le corollaire suivant, emprunté à [11]:

**Corollaire 13** Soit  $a_n$  le nombre d'animaux de source ponctuelle, sur réseau carré ou triangulaire, de taille  $n$  (donné par le théorème 9); la largeur moyenne de ces animaux vaut:

$$2 \frac{(r + 2)^{n-1}}{a_n} - 2$$

avec  $r = 1$  sur réseau carré,  $r = 2$  sur réseau triangulaire.  $\square$

Appelons *compacte* une configuration, sur un réseau, aussi dense que possible (en respectant bien entendu la règle d'exclusion entre sites voisins); sur un réseau linéaire, la distance entre deux cellules d'une configuration compacte est donc égale à deux. Un animal de source compacte correspond à un empilement de base compacte. La factorisation de Catalan fournit immédiatement une bijection entre mots et animaux de source compacte: à chaque facteur  $U_i$  de (33), on associe par le théorème 11 un animal en équerre  $L_i$ , et à  $W$  on associe le produit des équerres, en espaçant de *deux* unités les bases de  $L_0 \dots L_k$ , puis seulement d'une unité les bases de  $L_k \dots L_l$ . Voir une illustration section 6.2. Nous obtenons ainsi une nouvelle preuve de l'étonnant théorème découvert par [11]:

**Corollaire 14** Le nombre d'animaux de taille  $n$  et de source compacte sur réseau carré (resp. triangulaire) est égal à  $3^{n-1}$  (resp.  $4^{n-1}$ ).  $\square$

## 6 Animaux plans aléatoires

### 6.1 Code

Les théorèmes 11 et 14 de la section 5.3 fournissent des bijections explicites entre animaux et mots sur un alphabet à  $r + 2$  lettres ( $r = 1$  pour un réseau carré,  $r = 2$  pour un réseau triangulaire); ils permettent de construire facilement un programme de génération aléatoire d'animaux plans, avec distribution uniforme. La complexité de l'algorithme est linéaire en moyenne: le temps d'exécution est proportionnel, en moyenne, à la taille  $n$  de l'animal. La mémoire utilisée est proportionnelle à  $n$ , et on ne peut évidemment faire mieux si on mémorise l'animal; sinon on pourrait se contenter d'une taille mémoire proportionnelle, en moyenne, à  $\sqrt{n}$ . Nous donnons explicitement ce programme, sous forme de fonctions écrites en langage C.

```
static int nb_tirages; char Mot [TAILLE_MAX];

static char hasard (n)
int n; {return (char) ( 'a' + lrand48() % n );}

static void mot (n, r)
int n, r; {int i;
  for (i = 0; i < n; i++) Mot [i] = hasard (r + 2);
  Mot [n] = '\0';
}

static void prefixe (n, r)
int n, r; {int i, h; char pas;
  for (nb_tirages = i = h = 0; i < n; nb_tirages++) {
    Mot [i++] = pas = hasard (r + 2);
    if (pas == 'a') h++;
    else if (pas == 'b')
      if (--h < 0) i = h = 0; /* on recommence tout */
  }
  Mot [n] = '\0';
}
```

Figure 16: Code pour la génération aléatoire de préfixes de Motzkin

Il faut commencer par construire un mot au hasard, de longueur  $n$ , sur un alphabet de  $r+2$  lettres. Si l'on garde n'importe quel mot (fourni par une suite de tirages de lettres, effectués à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires de la bibliothèque numérique Unix standard), l'animal correspondant a une source compacte (voir théorème 14). Si l'on souhaite construire un animal de source ponctuelle, il ne faut garder que les préfixes de Motzkin (voir théorème 11); dans ce cas on recommence la procédure depuis le début, dès que le chemin associé traverse l'axe des abscisses; cet algorithme très simple ne détruit

pas le caractère uniforme de la distribution, et il est montré dans [2] que sa complexité est en moyenne  $2n$  – voir aussi [1].

La fonction *prefixe* ( $n, r$ ), qui calcule dans la variable globale *Mot*, un préfixe de Motzkin aléatoire de longueur  $n$ , sur un alphabet à  $r + 2$  lettres, est donnée figure 16. La variable globale *nb\_tirages* permet de calculer la complexité (expérimentale) de l’algorithme, et de vérifier, si on le souhaite, les prévisions de [2]. Nous donnons aussi la fonction *mot* ( $n, r$ ), qui fournit un mot aléatoire quelconque, pour être complets. Le générateur de nombres aléatoires utilisé, *rand48* ( $\cdot$ ), doit en principe être initialisé avant emploi, par appel à *srand48* ( $\cdot$ ): voir le manuel Unix.

```

static celibataires_ascendants (n)
int n; {int i, h = 0, hmin = 0; char pas;
  for (i = n-1; i >= 0; i--) {
    pas = Mot [i];
    if (pas == 'b') h++;
    else if (pas == 'a')
      if (--h < hmin) { hmin = h; Mot [i] = 'A'; }
  }
}

static celibataires_descendants (n)
int n; {int i, h = 0, hmin = 0; char pas;
  for (i = 0; i < n; i++) {
    pas = Mot [i];
    if (pas == 'a') h++;
    else if (pas == 'b')
      if (--h < hmin) { hmin = h; Mot [i] = 'B'; }
  }
}

```

Figure 17: Code pour marquer les célibataires

La construction de la bijection entre mots et animaux, fait jouer un rôle tout à fait particulier aux pas célibataires (voir définitions pages 32 et 34). Ici on marque les pas célibataires en transformant la lettre correspondante en majuscule. Nous incluons ces deux fonctions élémentaires, pour être explicites, figure 17.

La fonction *equerre* ( $i$ ), sur la figure 18, construit un animal en équerre dont la base a pour abscisse  $i$ , autrement dit est située sur la fibre  $i$ . Les hauteurs des fibres sont conservées dans la variable *fibre*, et la fonction *empiler* ( $i$ ), détaillée plus loin, ajoute une cellule sur la fibre numéro  $i$  de l’animal. Le reste du code de la fonction *equerre* est une traduction directe de la preuve du théorème 11; les pas  $c$  et  $d$  sont les deux types de pas horizontaux, notés  $c_1$  et  $c_2$  section 5.3; le pas  $d$  n’est utilisé que sur réseau triangulaire. On notera l’absence de référence explicite au pas  $b$ , qui sert de séparateur entre deux équerres: après lecture d’un pas ascendant  $a$ , et construction récursive d’une première

```

static int
    compteur,          /* compte les lettres */
    fibre [FIBRE_MAX]; /* hauteurs des fibres */

static void equerre (i)
int i; {
    empiler (i);
    switch (Mot [compteur++]) {
        case 'a':
            equerre (i - 1); equerre (i); break;
        case 'c':
            equerre (i - 1); break;
        case 'd':
            equerre (i); break;
    }
}

void animal (n, triangulaire, compact)
int n, triangulaire, compact; {int i, r;

    if (triangulaire) r = 2; else r = 1;
    for (i = 0; i < FIBRE_MAX; i++) fibre [i] = -1;

    if (compact) {mot (n - 1, r); celibataires_descendants (n - 1);}
    else prefixe (n - 1, r);
    celibataires_ascendants (n - 1);

    for (i = compteur = 0; compteur < n; i++) {
        equerre (i); if (Mot [compteur - 1] == 'B') i++;
    }
}

```

Figure 18: Code pour transformer un mot en animal

équerre, par l'appel *equerre (i-1)*, on trouve forcément un pas descendant  $b$ , sinon le pas ascendant serait célibataire, et noté  $A$ ; on appelle alors *equerre (i)*.

La fonction *animal (n, triangulaire, compact)* est la fonction principale, qui construit un animal de taille  $n$ , sur réseau carré ou triangulaire, selon la valeur du paramètre booléen *triangulaire*; la source est ponctuelle ou compacte selon la valeur du paramètre booléen *compact*. Dans cette fonction, on initialise la taille de l'alphabet selon la nature du réseau, on rase les fibres, et on construit un mot aléatoire quelconque, ou un préfixe de Motzkin, selon que la source de l'animal est compacte ou ponctuelle. Après transformation des pas célibataires (un pas ascendant est noté  $a$  ou  $A$  selon qu'il est ordinaire ou célibataire; idem pour un pas descendant, noté  $b$  ou  $B$ ), qui séparent les équerres, la fonction construit de façon répétitive des équerres, décalées l'une par rapport à l'autre de  $+1$  ou de  $+2$ , selon que la lettre qui sépare deux équerres dénote un pas célibataire ascendant ou descendant: voir la fin de la preuve du théorème 11, et la preuve du théorème 14. La variable globale *compteur*, incrémentée à chaque lecture d'une lettre du mot, permet d'en repérer la fin.

```
typedef struct {int x, y;} Cellule;
Cellule Animal [TAILLE_MAX];

static void empiler (i)
int i; {int h = -2, j = i + DECALAGE, jmax, k;
  for (k = j - 1; k <= j+1; k++)
    if (h < fibre [k]) {h = fibre [k]; jmax = k;}
  h++; if (jmax == j) h++;
  Animal [compteur].x = i;
  Animal [compteur].y = fibre [j] = h;
}
```

Figure 19: Code pour empiler une cellule

La fonction *empiler (i)*, sur la figure 19, est élémentaire: elle ajoute une cellule sur la fibre  $i$  de l'animal, en fonction des tailles des fibres voisines. Les cellules sont stockées dans le tableau *Animal*; la constante **DECALAGE** sert à convertir les abscisses des fibres, qui peuvent être négatives, en indices de tableaux. Si la fibre voisine la plus haute, de hauteur  $h$ , est la fibre  $i$  elle-même, le réseau est triangulaire, et l'ordonnée de la nouvelle cellule vaut  $h + 2$ , au lieu de  $h + 1$  en général.

## 6.2 Illustrations

La fonction *animal*, de la section 6.1, nous a servi à construire les illustrations de cette section. L'un des auteurs a construit un logiciel d'affichage pour *X-Window*, en utilisant les outils *Xview*, pour *OpenLook*.

Chacune des figures 20, 21, et 22, contient sur sa partie droite un arbre, appelé *arbre de guingois* par les auteurs dans [4]. Le parcours en profondeur de cet arbre, de gauche

à droite, donne le mot associé à l’animal, qui se trouve en titre en haut de la fenêtre, avec les pas célibataires notés  $A$  ou  $B$ ; cet arbre résume la construction de l’animal à partir du mot.

Comme l’algorithme de construction d’un animal ajoute des équerres de gauche à droite, on peut les lire de droite à gauche, à condition, chaque fois qu’on en lit une (sous-arbre issu du point le plus bas de la fibre la plus à droite), de l’enlever avant de lire la suivante.

Les figures 23 et 24 présentent des animaux de grande taille (5000 cellules), qui sont obtenus sur une station Sun-4 en un temps de l’ordre de la seconde, affichage compris. La figure 23 utilise la possibilité de scinder une fenêtre en deux: la moitié gauche présente la partie inférieure de l’animal, et la moitié droite la partie supérieure, comme on peut le voir à la position des “ascenseurs” verticaux. Le logiciel permet d’agrandir à volonté une partie de l’animal (délimitée par un rectangle): la figure 25 illustre ces possibilités. Le logiciel affiche aussi, pour chaque animal, sa taille, sa largeur (mesurée sur l’axe des abscisses), sa hauteur (mesurée sur l’axe des ordonnées), et le nombre de tirages nécessaire pour obtenir le mot aléatoire associé (ce dernier renseignement n’est utile que pour les animaux de source ponctuelle). L’utilisateur peut modifier la taille avant de demander la génération d’un nouvel animal.

Les animaux montrés ici ont évidemment été produits de façon aléatoire, mais les auteurs ont sélectionné des exemples qui leur ont semblé instructifs ou esthétiques; l’aspect moyen d’un animal est souvent plus simple.

## 7 Perspectives

Cet article a présenté un calcul sur les animaux dirigés, qui permet de découvrir une structure cachée de ces derniers, symbolisée par les arbres des figures 20, 21, et 22. Parmi les problèmes ouverts concernant les animaux plans, le principal est l’évaluation de leur hauteur moyenne (appelée aussi longueur). Plus généralement, on devrait pouvoir étudier plus finement la structure de ces animaux, et obtenir par exemple leur dimension fractale, ou le nombre moyen de composantes connexes du complémentaire.

Le problème majeur reste celui des modèles de gaz sur des réseaux en dimension  $d > 1$ , qui correspondent à certains animaux dirigés en dimension  $d + 1$ ; le cas du réseau hexagonal a été résolu par R.Baxter (solution du modèle des *heagones durs*, voir [3]), et la série génératrice des pyramides sur un tel réseau est algébrique, mais une interprétation combinatoire des équations obtenues reste à trouver. Le cas du réseau carré (modèle des *carrés durs*) reste entièrement ouvert.

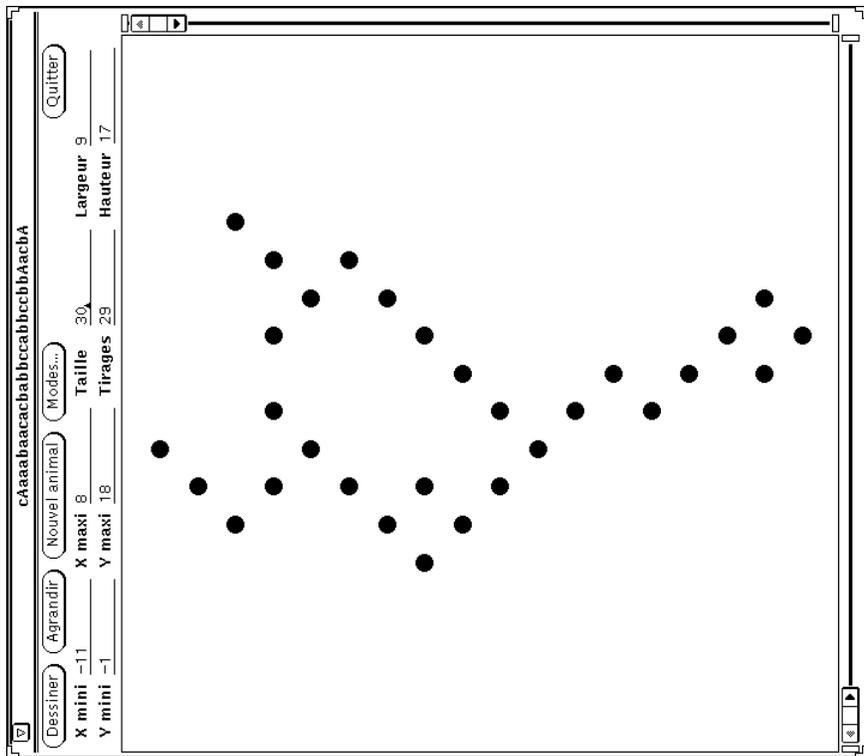
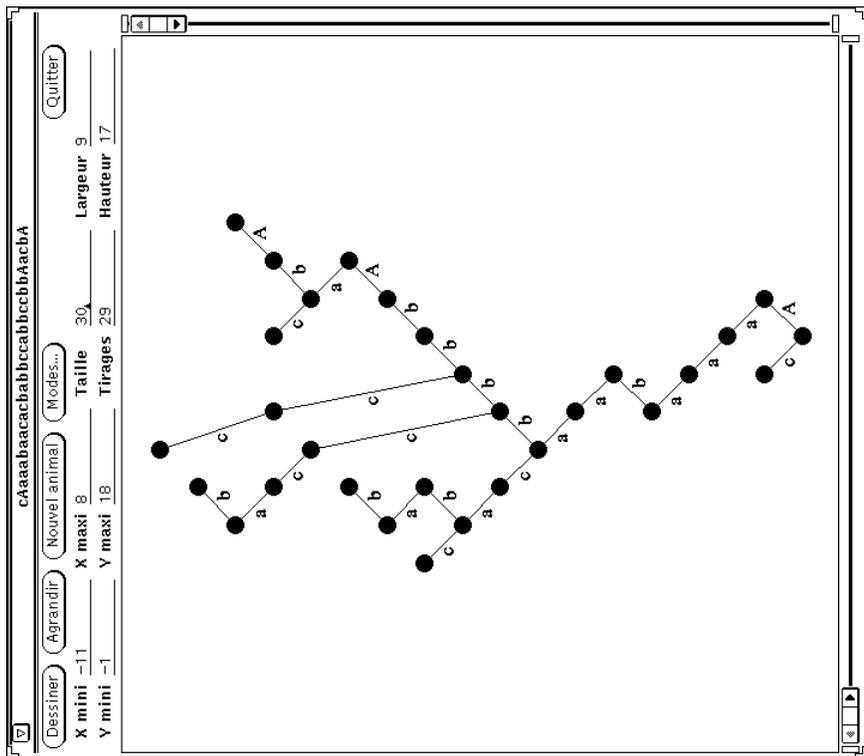


Figure 20: Exemple de construction d'un animal sur réseau carré

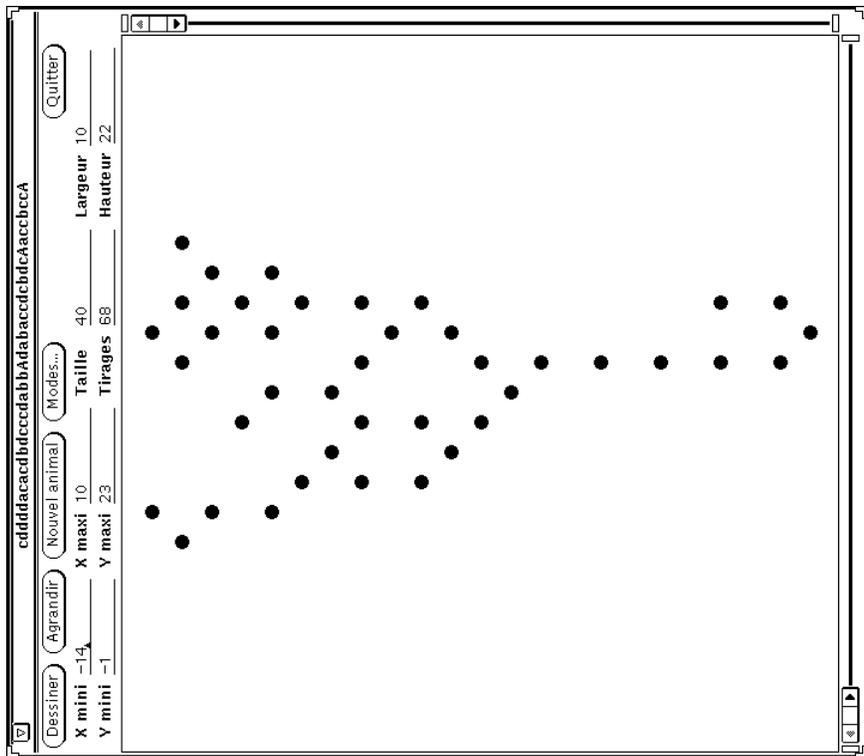
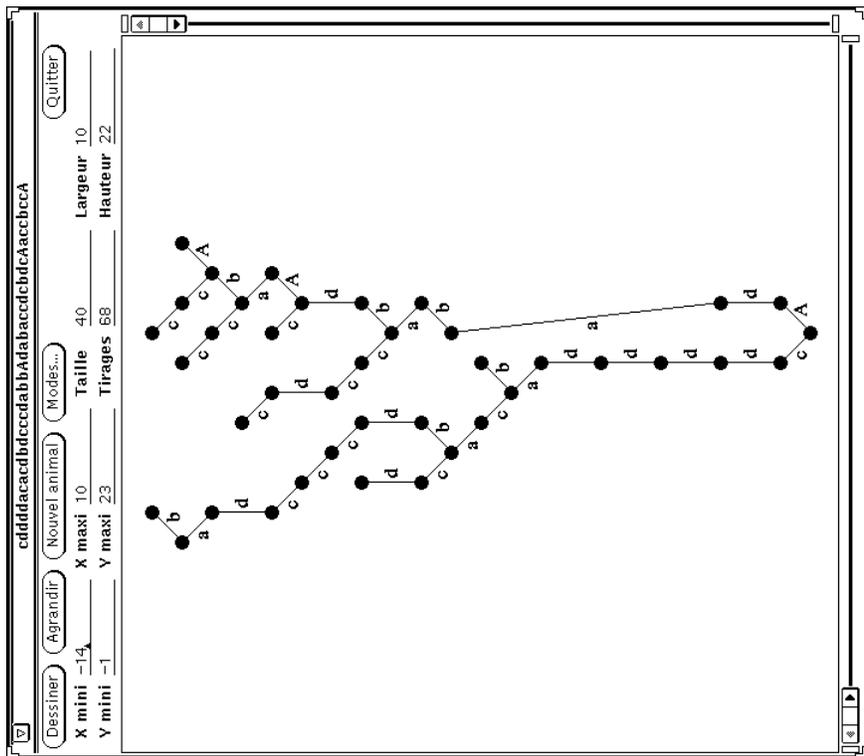


Figure 21: Exemple de construction d'un animal sur réseau triangulaire

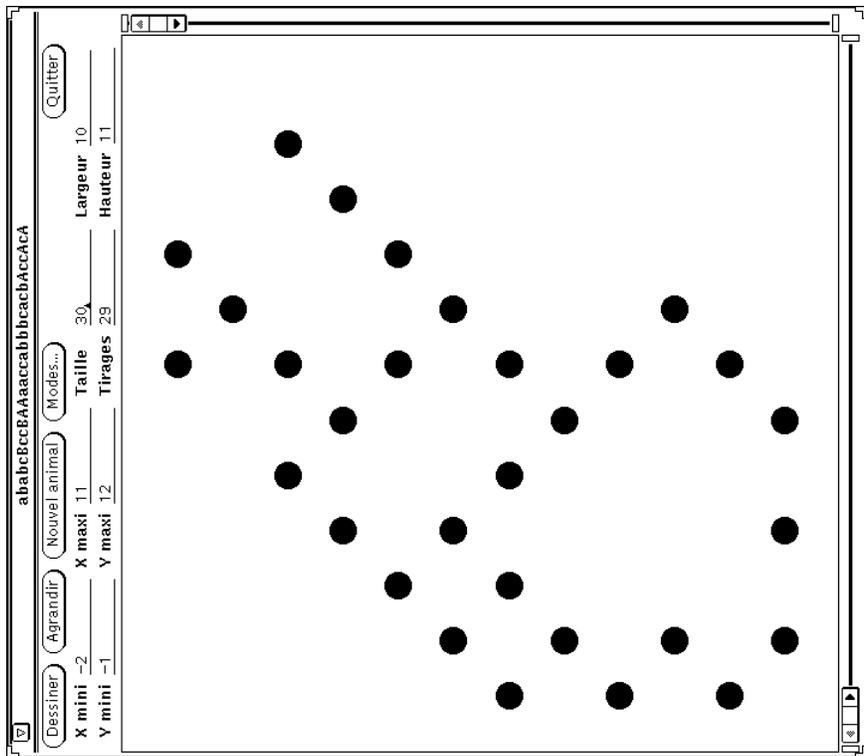
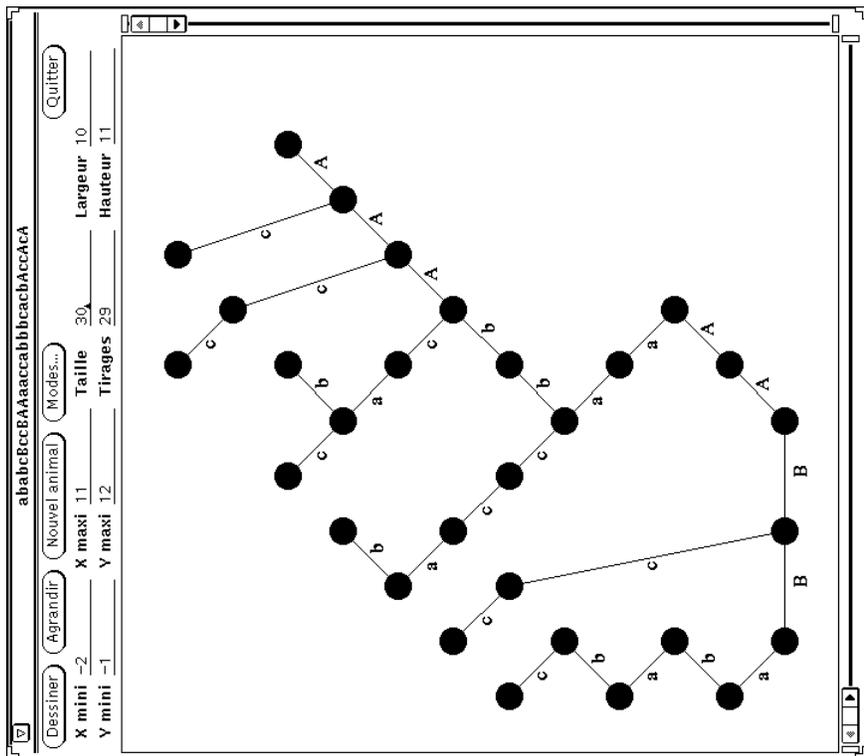


Figure 22: Exemple de construction d'un animal de source compacte

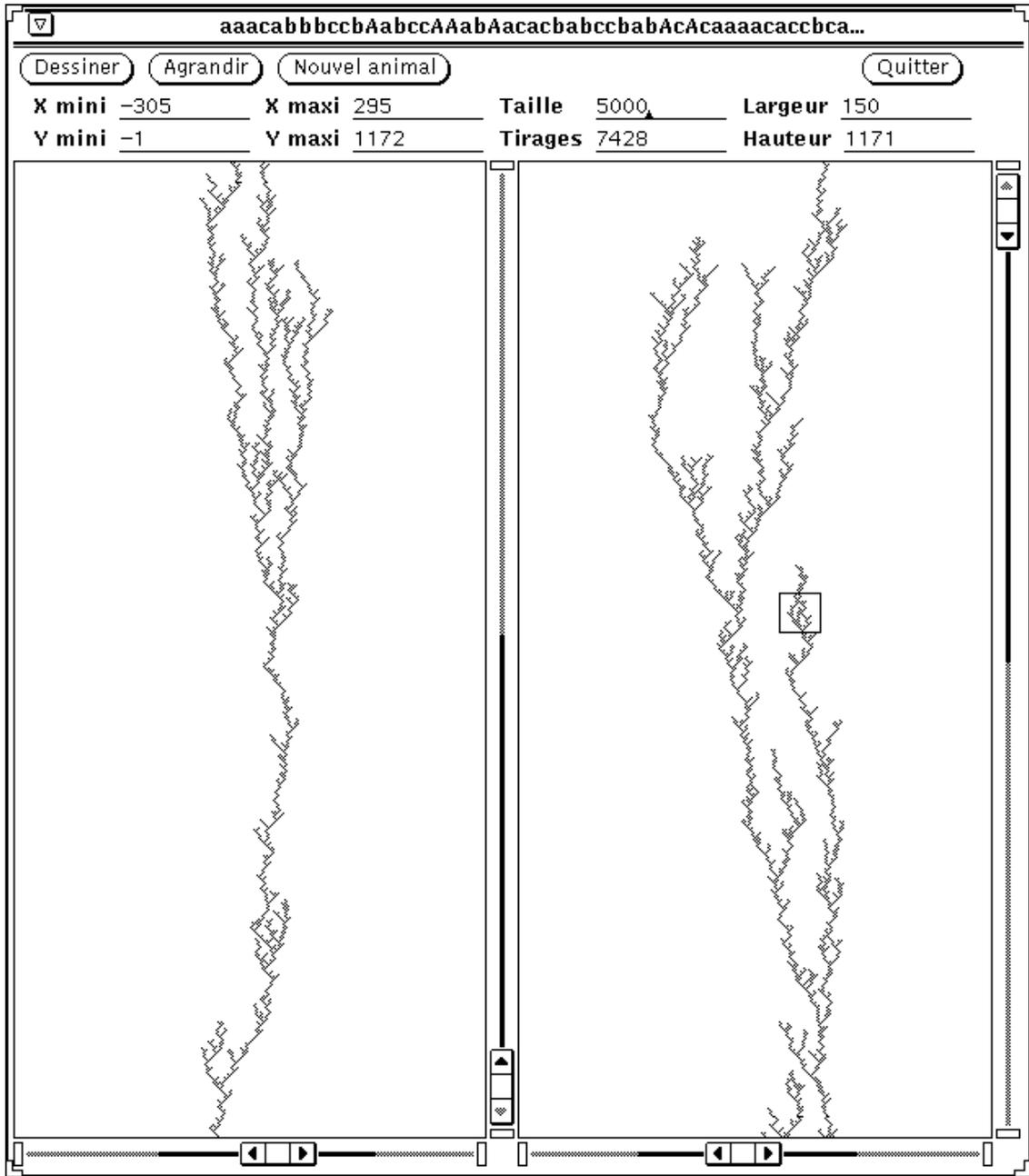


Figure 23: Exemple d'animal de grande taille sur réseau carré

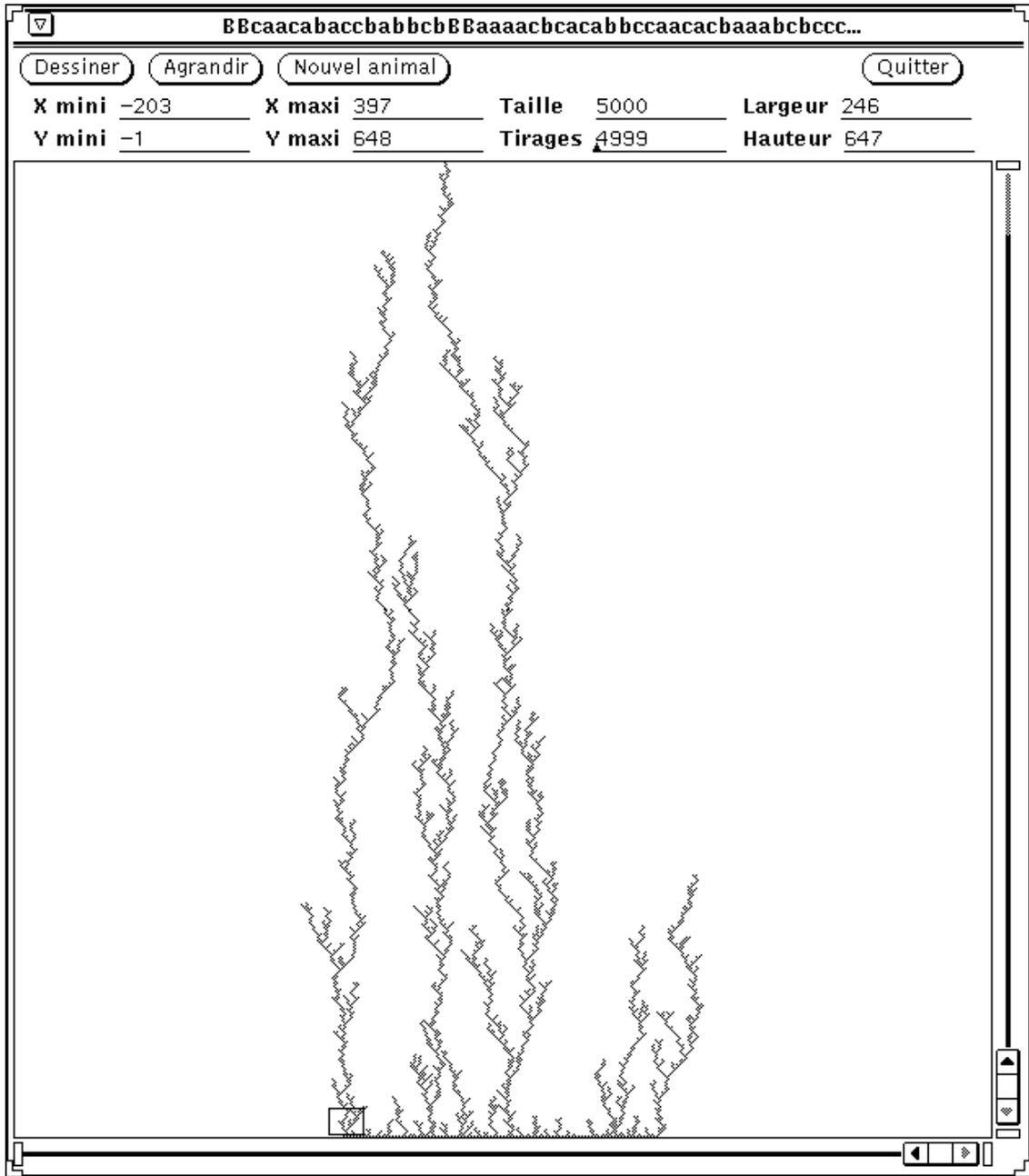


Figure 24: Exemple d'animal de grande taille et de source compacte

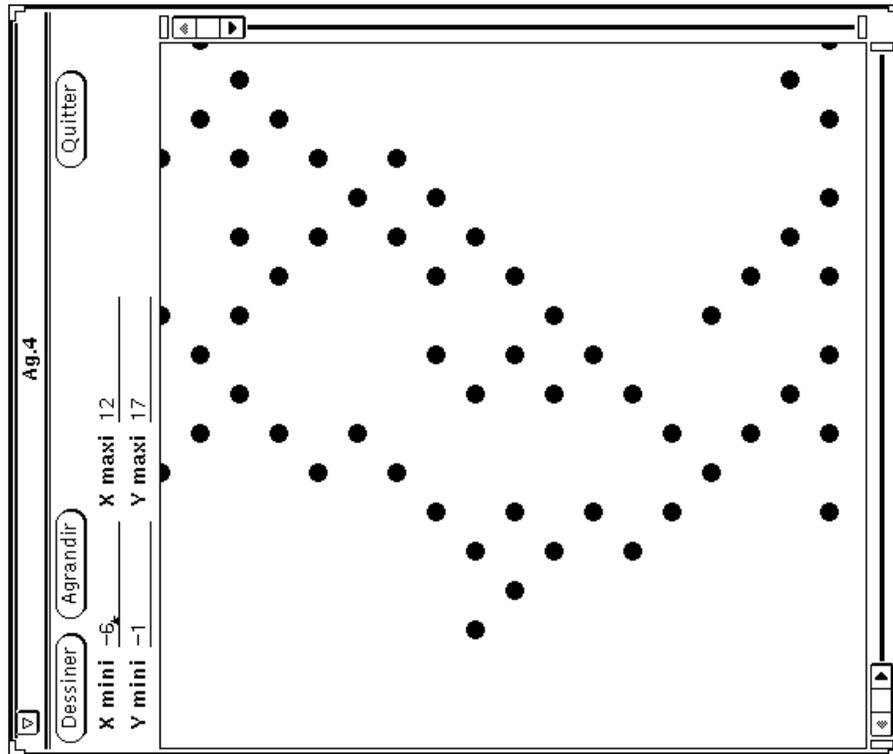
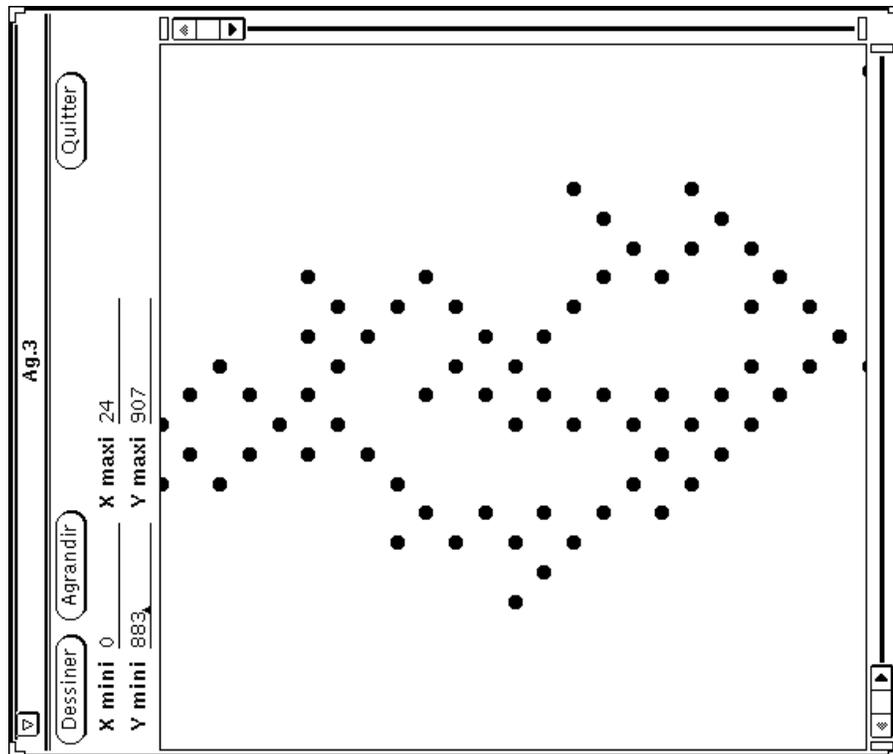


Figure 25: Agrandissements de régions des figures 23 et 24

## Bibliographie

- [1] **L.Alonso** *Structures arborescentes. Algorithmes de génération, problème de l'inclusion, relations maximin.* Thèse (1992). Université Paris-Sud, centre d'Orsay.
- [2] **E.Barucci, R.Pinzani, R.Sprugnoli** *The random generation of underdiagonal walks*, in **P.Leroux, C.Reutenauer** (eds) *Séries formelles et combinatoire algébrique, actes du 4<sup>e</sup> colloque (1992), Université du Québec à Montréal.* Publications du LACIM **11**.
- [3] **R.Baxter** *Exactly solved models in statistical mechanics.* Academic Press (1982).
- [4] **J.Bétréma, J.G.Penaud** *Animaux dirigés et arbres guingois.* Theoretical Computer Science A **117** (1993).
- [5] **N.Biggs** *Interaction models.* London mathematical society lecture note series **30** . Cambridge University Press (1977).
- [6] **P.Cartier, D.Foata** *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* Lecture Notes in Mathematics **85** . Springer Verlag (1969).
- [7] **D.Chandler** *Introduction to modern statistical mechanics.* Oxford University Press (1987).
- [8] **J.H.Conway, N.J.A.Sloane** *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **290** . Springer Verlag (1988).
- [9] **D.Dhar** *Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter's hard-square lattice-gas model.* Physical Review Letters **49** (1982), 959–962.
- [10] **D.Dhar** *Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in three dimensions.* Physical Review Letters **51** (1983), 853–856.
- [11] **D.Gouyou-Beauchamps, G.Viennot** *Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem.* Advances in Applied Mathematics **9** (1988), 334–357.
- [12] **V.Hakim, J.P.Nadal** *Exact results for 2D directed animals on a strip for finite width.* Journal of Physics A **16** (1983), 213–218.
- [13] **P.W.Kasteleyn** *Graph theory and crystal physics*, in **F.Harary** (ed) *Graph theory and theoretical physics.* Academic Press (1967).
- [14] **J.P.Nadal, B.Derrida, J.Vannimenus** *Directed lattice animals in 2 dimensions: numerical and exact results.* Journal of Physics A **43** (1982), 1561.
- [15] **X.G.Viennot** *Heaps of pieces, I: Basic definitions and combinatorial lemmas*, in **G.Labelle, P.Leroux** (eds) *Combinatoire énumérative. Proceedings, Montréal, Québec 1985.* Lecture notes in mathematics **1234** . Springer Verlag (1985).
- [16] **X.G.Viennot** *Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, séminaire Bourbaki 626.* Astérisque **121-122** (1985), 225–246.
- [17] **G.Weisbuch** *Dynamique des systèmes complexes. Une introduction aux réseaux d'automates.* Inter Editions, Paris (1989).