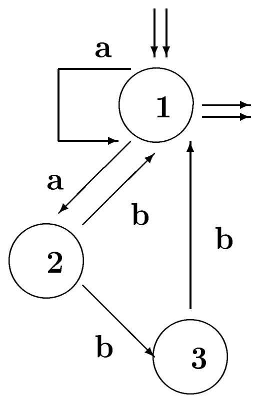
Université Bordeaux I
Licence d'Informatique **OMI 2001**

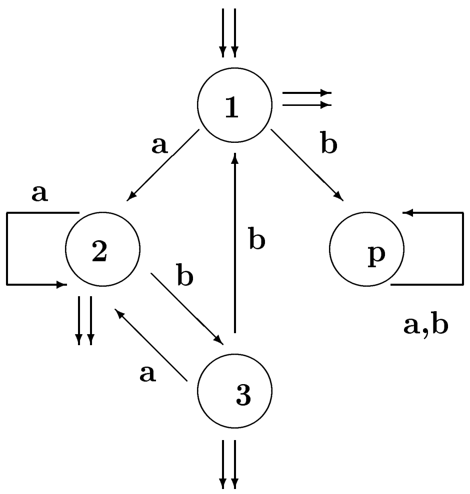
Corrigé rapide du deuxième devoir surveillé

mai 2001

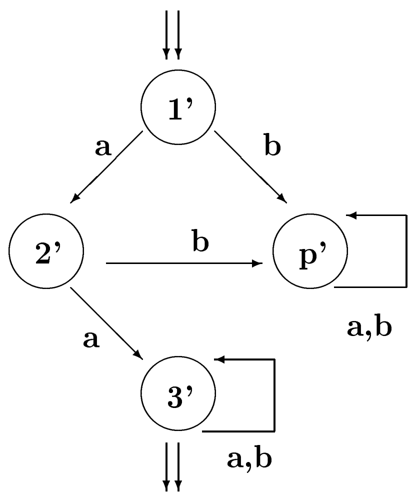
Exercice 1

1. Automates non déterministe (à gauche) et déterministe complet (à droite) reconnaissant L_1 :





Automate déterministe complet reconnaissant L_2 :



2. Si $u \in L_1 \cap L_2$ alors $u \in a(L_1 \setminus \{\varepsilon\})$:
si $u \in L_1$ alors $u = au'$ avec u' qui ne contient pas le facteur b^n pour $n > 2$;

si $u \in L_2$ alors $u = aau$".
Si $u \in L_1 \cap L_2$ on a forcement $u' = au$" avec u" ne contenant pas le facteur b^n pour $n > 2$ et donc on peut écrire $u = av$ avec $v \in L_1$ et $|v| \geq 1$, d'où $v \neq \varepsilon$ et finalement $v \in L_1 \setminus \{\varepsilon\}$.

Réciproquement, si $u \in a(L_1 \setminus \{\varepsilon\})$ alors $u \in L_1 \cap L_2$:
on a $u = av$ avec $v \in L_1 \setminus \{\varepsilon\}$. Mais si $v \in L_1$ on a aussi $u = av \in L_1$ et $v = av'$. Donc $u = aav'$ et $u \in L_2$ aussi.

3. Expression rationnelle pour $L_1 \cap L_2$: $a(a + ab + abb)^+$
4. Table des transitions des automates $\mathcal{A}_\cap$ et $\mathcal{A}_\cup$ reconnaissant respectivement $L_1 \cap L_2$ et $L_1 \cup L_2$:

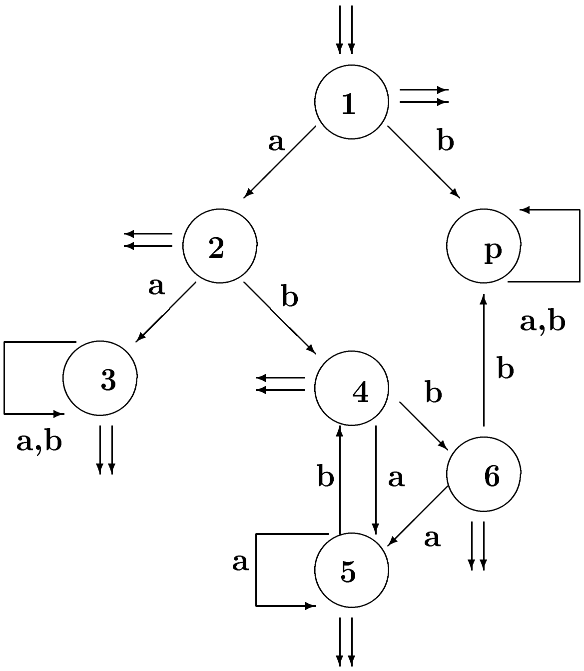
	a	b
$1, 1'$	$2, 2'$	p, p'
$2, 2'$	$2, 3'$	$3, p'$
$2, 3'$	$2, 3'$	$3, 3'$
$3, p'$	$2, p'$	$1, p'$
$3, 3'$	$2, 3'$	$1, 3'$
$2, p'$	$2, p'$	$3, p'$
$1, p'$	$2, p'$	p, p'
$1, 3'$	$2, 3'$	$p, 3'$
$p, 3'$	$p, 3'$	$p, 3'$

L'état $(1, 1')$ est état initial aussi bien pour $\mathcal{A}_\cap$ que pour $\mathcal{A}_\cup$.

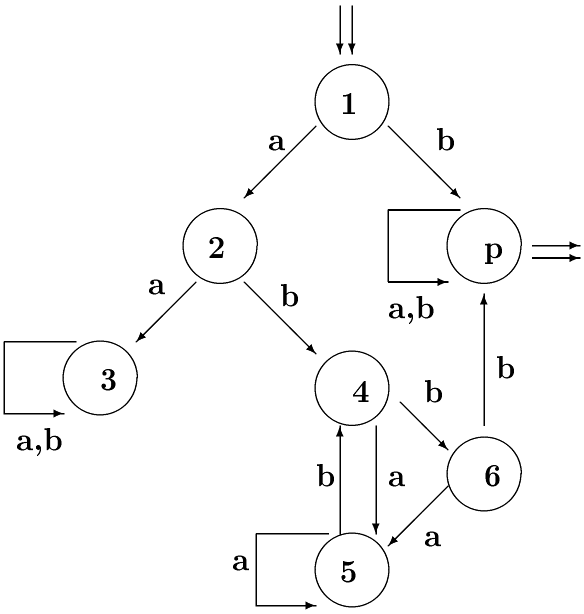
Dans $\mathcal{A}_\cap$ l'ensemble des états terminaux est $\{(1, 3'), (2, 3'), (3, 3')\}$, dans $\mathcal{A}_\cup$ tous les états sont terminaux sauf (p, p').

5. On renumérote de 1 à 9 (du haut vers le bas) les états (autres que le puits) de la table de transition précédente et on appelle p l'état puits. Minimisation (l'état 1 est l'état initial et tous les états sauf le puits sont terminaux) :
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{p\}$
$\{1, 7\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}, \{p\}$
$\{1, 7\}, \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}, \{4\}, \{p\}$
$\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5, 8, 9\}, \{4\}, \{p\}$
$\{1, 7\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 5, 8, 9\}, \{4\}, \{p\}$
$\{1\}, \{7\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 5, 8, 9\}, \{4\}, \{p\}$
$\{1\}, \{7\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 5, 8, 9\}, \{4\}, \{p\}$

Après avoir renuméroté les états de la façon suivante : $\{1\} \to 1$, $\{2\} \to 2$, $\{3, 5, 8, 9\} \to 3$, $\{4\} \to 4$, $\{6\} \to 5$, $\{7\} \to 6$, on obtient l'automate :



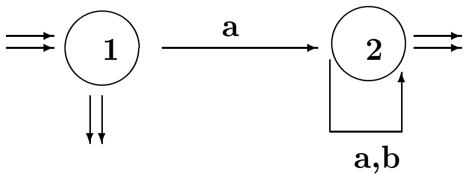
6. L'automate qui reconnait le langage $X^* \setminus (L_1 \cup L_2)$ (complémentaire de $L_1 \cup L_2$) est :



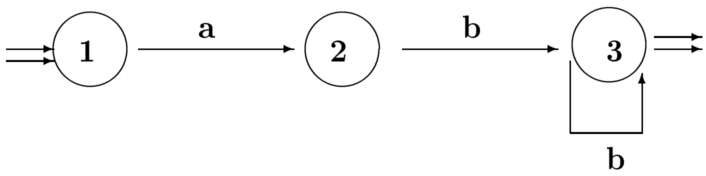
L'état 3 n'étant pas coaccessible, on peut le supprimer.
$b(a+b)^* + ab((\varepsilon + b)aa^*b)^*bb(a+b)^*$ est une expression rationnelle de $X^* \setminus (L_1 \cup L_2)$.

Exercice 2

1. Automate fini déterministe reconnaissant H :



2. $(ab^*)^*$, ou aussi $\varepsilon + a(a+b)^*$.
3. Automate fini déterministe reconnaissant le langage $U = \{ab^i\}$, $i \in N^+$:



4. (a) Supposons que le langage W satisfait le lemme de l'étoile. Soit N la constante positive du lemme, on considère le mot $w_N = abab^2ab^3 \dots ab^N$ qui a donc longueur supérieure à N. Le lemme affirme qu'il doit exister une décomposition $w_N = \alpha v \beta$ telle que $0 < |v| \leq N$ et $\alpha v^* \beta \subset W$. Mais on vérifie facilement que le facteur "itérant" v ne peut pas contenir de lettre 'a' (car $\alpha v^i \beta$ n'appartient pas à W pour $i \neq 1$), pour les mêmes raisons il ne peut pas contenir que des 'b'. Le langage W ne peut donc pas satisfaire le lemme de l'étoile et il n'est donc pas rationnel.

   (b) Pour chaque $i > 0$, on a $ab^{i+1} \in (w_i)^{-1}W$ et $ab^{i+1} \notin (w_j)^{-1}W$, pour $j \neq i$. Il existe donc une infinité de résiduels : W n'est pas rationnel.

Exercice 3

On énumère les 7 premières valeurs des différentes suites intervenant dans l'exercice :

	x_n	y_n	z_n	t_n
$u_0 = a$	1	0	0	1
$u_1 = c$	0	0	1	1
$u_2 = ba$	1	1	0	2
$u_3 = abc$	1	1	1	3
$u_4 = cabba$	2	2	1	5
$u_5 = bacababc$	3	3	5	8
$u_6 = abcbacabcabba$	5	5	3	13

1. On trouve $x_n = y_{n-1} + z_{n-1}$ car il y a autant d'occurrences de la lettre a dans u_n que d'occurrences des lettres b et c dans u_{n-1}.
   De la même façon on trouve $y_n = y_{n-1} + z_{n-1}$ et $z_n = x_{n-1}$.
2. On vient de voir que $x_n = y_{n-1} + z_{n-1}$. Or $y_{n-1} = y_{n-2} + z_{n-2}$ et $z_{n-1} = x_{n-2}$: on a donc $x_n = y_{n-2} + z_{n-2} + x_{n-2}$.

3. Par définition on a $t_n = x_n + y_n + z_n$. En 2. on vient de montrer que $x_n = y_{n-2} + z_{n-2} + x_{n-2} = t_{n-2}$ et en 1. on a vu que $y_n = y_{n-1} + z_{n-1}$ et $z_n = x_{n-1}$.
   Or $y_{n-1} + z_{n-1} + x_{n-1} = t_{n-1}$.
4. On montre par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$, u_n ne contient pas trois lettres consécutives égales.
   Base de la récurrence : pour $n = 0$ on a $u_0 = a$ et u_0 ne contient pas trois lettres consécutives égales.
   Hypothèse inductive : on suppose que pour tout $k < n$ le mot u_k ne contient pas trois lettres consécutives égales, on va montrer que le mot u_n ne peut pas contenir trois lettres consécutives égales.
   On a $u_n = \varphi(u_{n-1})$ avec u_{n-1} ne contenant pas trois lettres consécutives égales par hypothèse.
   Si $u_{n-1} = l_1 l_2 \ldots l_m$, avec $l_j \in \{a, b, c\}$ et $m = t_{n-1}$, on a $\varphi(u_{n-1}) = \varphi(l_1)\varphi(l_2)\ldots\varphi(l_m)$ car φ est un homomorphisme. Or les facteurs de longueur 3 de u_n ne peuvent être générés que par les facteurs ab, ba, ac ou ca de u_{n-1} puisque le facteur aaa ne peut pas appartenir à u_{n-1} par hypothèse. Mais $\varphi(ab)$, $\varphi(ba)$, $\varphi(ac)$ et $\varphi(ca)$ ne contiennent pas trois lettres consécutives égales, et donc u_n non plus.

Exercice 4

1. $\mathcal{F}$ est un ensemble fini. Toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ est donc constituée d'un nombre fini k de fonctions $f_1, \ldots, f_k$ dont la somme $s = f_1 + \ldots + f_k$ est évidemment la borne supérieure.
2. Les implicants de f_0 sont $xy, x\overline{z}, yz$ (maximaux), et $xyz, xy\overline{z}, x\overline{yz}, \overline{x}yz$ (minimaux).
3. Les implicants de f sont des monômes ; un monôme m est plus petit qu'un monôme m' si et seulement si tous les littéraux figurant dans m sont en facteur dans m'.
4. $\sup(P(f))$ est une somme de monômes tous inférieurs ou égaux à f, donc $\sup(P(f)) \leq f$. Réciproquement, f peut s'écrire comme somme de monômes (forme normale disjonctive) dont chacun est un élément de $I(f)$ inférieur ou égal à un élément de $P(f)$ (soit en effet $m \in I(f)$; si m est maximal $m \in P(f)$, sinon il existe $m_1 \in I(f)$ tel que $m < m_1$. En recommençant avec m_1 on construit une suite strictement croissante d'implicants de f. Comme $I(f)$ est fini, cette suite est finie, donc se termine par un $m_k \in P(f)$ avec $m \leq m_k$), donc à $\sup(P(f))$. Par conséquent $f \leq \sup(P(f))$.
5. Toute réalisation de f est la traduction en circuit d'une forme normale disjonctive : si l'un des implicants de la forme normale disjonctive n'est pas maximal, en remplaçant cet implicant par un implicant de f strictement plus grand on obtient une réalisation de f de coût moindre. Donc à une réalisation optimale correspond une forme normale disjonctive composée d'implicants tous premiers.
   La réciproque est fausse : $xy, x\overline{z}, yz$ sont des implicants premiers de f_0 mais $xy + x\overline{z} + yz$ n'est pas une forme normale disjonctive optimale. En effet $f_0 = x\overline{z} + yz$ (clairement $x\overline{z} + yz \leq f_0$ et réciproquement si $f_0(x, y, z) = 1$, ou bien $z = 0$ et $x(1 + y) = x = 1$, ou bien $z = 1$ et $y(1 + x) = y = 1$; dans tous les cas $x\overline{z} + yz = 1$).
6. Soit m un minterme de f. Soit f' une forme normale disjonctive optimale de f : elle est composée d'implicants premiers de f (question 5), dont l'un au moins vaut 1 pour la valuation de $x_1, \ldots, x_n$ donnant à m la valeur 1, donc est supérieur ou égal à m. Par conséquent, si i est le seul implicant premier supérieur ou égal à m, i apparait dans f.