Université Bordeaux I
Licence d'Informatique **OMI 2001**

Devoir Surveillé
22 mars 2001
Documents manuscrits autorisés
Durée : 1h30
Barème envisagé : 8+6+6

Exercice 1

On considère l'automate déterministe (vu en TD, feuille 1, exercice 4) :

$$\mathcal{A}_p = \{\{a,b\}, S \cup S', 0, \{0, 0'\}, \delta\}$$

où $S = \{0, 1, \ldots p-1\}$, $S' = \{0', 1', \ldots (p-1)'\}$ et dont la fonction de transition, δ est définie ainsi :

$$\begin{aligned} \delta(i,a) &= (i+1) \bmod p \\ \delta(i,b) &= (i-1)' \bmod p \\ \delta(i',b) &= (i-1)' \bmod p \end{aligned}$$

Cet automate reconnait le langage $\{a^m b^n | m - n \equiv 0 \bmod p\}$.

1. Dessiner l'automate pour $p = 3$.
2. Donner une expression rationnelle de ce langage pour $p = 3$. (Indication : il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode générale fondée sur le système d'équations.)
3. Donner une expression rationnelle de ce langage pour p quelconque.
4. On double toute transition (i, b, j'), où $i \in S, j' \in S'$, par la transition (j', a, i). Soit $\mathcal{B}_p$ l'automate ainsi modifié.
   (a) $\mathcal{B}_p$ est il déterministe ? complet ?
   (b) $\mathcal{B}_p$ est il minimal ? Sinon préciser les états équivalents et dessiner l'automate avant et après minimisation pour $p = 3$.
   (c) Donner pour $p = 3$ une expression rationnelle du langage reconnu.
   (d) Caractériser le langage obtenu pour p quelconque.

Exercice 2

Soit k un entier naturel fixé. On considère le langage :
$L_k = \{w \in \{a,b\}^*$tel que pour tout facteur gauche v de w : $||v|_a - |v|_b| \leq k\}$
1. Que vaut L_0 ?
2. Montrer que L_k est rationnel.

Soit maintenant $L'_k = \{w \in \{a,b\}^* ||w|_a - |w|_b| \leq k\}$.
3. Que peut-on dire de la rationalité de L'_k pour tout $k \in \mathbb{N}$?

Exercice 3

Soit $\mathcal{A}$ un automate non déterministe, reconnaissant un langage L, ayant les propriétés suivantes :

1. Pour tout état q, il existe un mot v et un état terminal q_f tel que $\delta(q, v) = q_f$.
2. Pour tout mot $w = uv$ de L et pour tout état q de $\mathcal{A}$, si il existe un état terminal q_f tel que $\delta(q, v) = q_f$ alors il existe un état initial q_i tel que $\delta(q_i, u) = q$.

Montrer que l'automate déterministe associé est l'automate minimal de L.