Université Bordeaux I
Licence Informatique **TD OMI 2001**

Feuille d'exercices n° 1 : Mots et automates

Exercice 1

Soit X un alphabet. Un mot $w \in X^*$ est facteur gauche d'un mot $u \in X^*$ s'il existe $v \in X^*$ tel que $u = wv$. Par exemple, sur $X = \{a, b\}$ le mot aba est facteur gauche du mot $abaab$. Un mot w est facteur gauche d'un mot d'un langage L ssi $wX^* \cap L \neq \emptyset$. Etant donné un langage L, on note $FG(L)$ l'ensemble des facteurs gauches des mots de L :

$$FG(L) = \{w \in X^* | wX^* \cap L \neq \emptyset\}.$$

Calculer $FG(L)$ pour chacun des langages suivants :

1. $L_1 = \{a^n b^n : n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{a^n b^m : 0 \leq n \leq m\}$
3. $L_3 = \{a^n b^m : 0 \leq m \leq n\}$
4. $L_4 = \{u \in X^* : |u|_a = |u|_b\}$

Exercice 2

Soit X, Y des alphabets. On rappelle qu'une application $h : X^* \to Y^*$ est un homomorphisme de monoides si on a $h(uv) = h(u)h(v)$ pour tout $u, v \in X^*$. On dit qu'un langage $M \subset Y^*$ est une *image par l'homomorphisme* h d'un langage $L \subset X^*$ si $h(L) = M$.
Les langages suivants sont-ils des images par homomorphismes du langage :
$L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$?

1. $L_1 = \{a^n b^n a^n : n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{a^n b^n c^{3n} : n \geq 0\}$
3. $L_3 = \{d^n : n \geq 0\}$
4. $L_4 = \{d^{3n} f^{2n} : n \geq 0\}$
5. $L_5 = \{c^n b^n a^n : n \geq 0\}$
6. $L_6 = \{a^n b^n c^n d^n : n \geq 0\}$
7. $L_7 = \{(ab)^n (cd)^n (fg)^n : n \geq 0\}$

Exercice 3

1. Trouver deux mots $u, v \in \{a, b\}^+$ non vides tels que $uv = vu$. Soit maintenant X un alphabet quelconque. Montrer que $u, v \in X^*$ satisfont $uv = vu$ ssi u et v sont puissances d'un même mot, c'est-à-dire qu'il existe $t \in X^*$ et $k, k' \geq 0$ tels que $u = t^k$, $v = t^{k'}$.
2. Trouver deux mots $u, v \in \{a, b\}^+$ tels que $u^2 = v^3$. Soit maintenant X quelconque. Montrer que $u, v \in X^*$ satisfont $u^p = v^q$ (où p, q sont des entiers positifs quelconques) ss'ils sont puissances d'un même mot.

3. Soit u un mot quelconque et a, b des lettres distinctes de X. Montrer que :

$$\begin{array}{rcl} u = uu & \leftrightarrow & u = \epsilon \\ ua = au & \leftrightarrow & u = a^p (p \geq 0) \\ ua = bu & & \text{est impossible} \end{array}$$

Exercice 4
Pour chacun des langages suivants sur l'alphabet $X = \{a, b\}$, construire un automate fini déterministe le reconnaissant.

1. $L_1 = \{w \in X^* : |w|_a \text{ pair }\}$
2. $L_2 = \{w \in X^* : |w|_a \text{ pair et } |w|_b \text{ impair}\}$
3. $L_3 = \{w \in X^* : |w|_a \equiv 0 \ mod \ p\}$
4. $L_4 = \{a^m b^n : m + n \equiv 0 \ mod \ p\}$
5. $L_5 = \{a^m b^n : m - n \equiv 0 \ mod \ p\}$
6. $L_6 = \{w \in X^* : |w|_a \equiv |w|_b \ mod \ p\}$

où p est un entier positif fixé.

Exercice 5
Soit $X = \{0, 1\}$. Pour $w \in X^*$, on pose $\nu(w) =$ l'entier dont le développement binaire est w. On suppose de plus $\nu(\epsilon) = 0$ et on accepte des zéros "superflus" à gauche de w. Soit

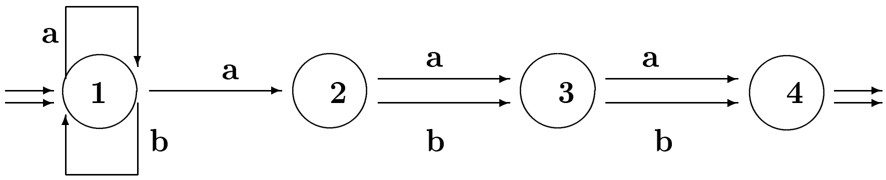
$$L_p = \{w \in X^* : \nu(w) \equiv 0 \ mod \ p\}.$$

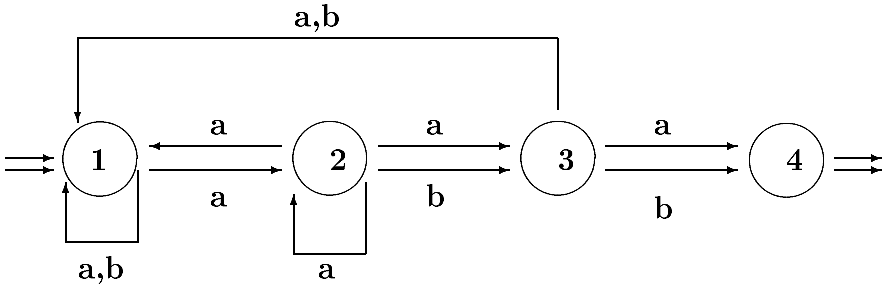
1. Pour chacun des langages L_1, L_2 et L_3 construire l'automate correspondant.
2. Pour un p quelconque décrire l'automate reconnaissant L_p.

Exercice 6
Pour chacun des langages suivants sur l'alphabet $X = \{a, b\}$ construire un automate fini déterministe le reconnaissant.

1. $L_1 = X^* aba X^*$
2. $L_2 = \{w \in X^* : w \text{ se termine par } a^3 \text{ ou par } b^2\}$
3. $L_3 = \{w \in X^+ : w \text{ contient au moins 2 occurrences de sa dernière lettre}\}$

Exercice 7
Déterminiser chacun des deux automates finis suivants :





Exercice 8

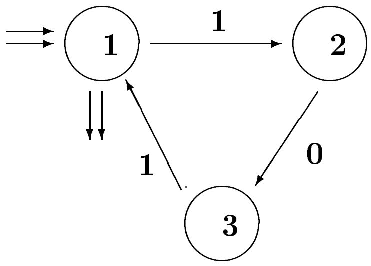
Soit $X = \{a, b\}$. Pour chacun des langages suivants, construire un automate fini déterministe qui le reconnaît.

1. $L_1 = aab^*(ab)^* + ab^* + a^*bba^*$
2. $L_2 = a((ab)^*cb^*)^* + a((ab)^2cb^*)^*a^*$
3. $L_3 = ((a^*bc^*)^*acbb * b)^*$

Les exercices qui suivent ne seront pas nécessairement traités en TD, mais sont recommandés aux étudiants.

Exercice 9

On considère l'automate fini suivant sur l'alphabet $\{0, 1\}$:



Quelle est la forme générale des entiers dont les développements binaires sont acceptés par l'automate ?

Exercice 10

Soit $\mathcal{A}_n = (X, Q, D, A, \delta)$ l'automate fini non déterministe à n états défini par

$$X = \{0, 1\},\ Q = \{0, 1, ..., n-1\},\ D = A = \{0\}$$

$$\delta = \{(i, 0, 0), (i, 0, i) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(i, 1, i+1) : 0 \leq i < n-1\} \cup \{(n-1, 1, 0)\}$$

1. Donner une représentation de cet automate. Le déterminiser.

2. Montrer formellement que tous les $2^n - 1$ états de l'automate déterminisé sont tous accessibles à l'état initial.

Exercice 11

Montrer que si L sur X est reconnaissable, il en est de même pour chacun des langages suivants :

1. $FG(L) = \{w \in X^* : wX^* \cap L \neq \emptyset\}$
2. $FD(L) = \{w \in X^* : X^*w \cap L \neq \emptyset\}$
3. $FACT(L) = \{w \in X^* : X^*wX^* \cap L \neq \emptyset\}$
4. $\tilde{L} = \{\tilde{w} : w \in L\}$

Exercice 12

On considère deux automates déterministes complets : $\mathcal{A}_1 = (X, Q_1, \{q_1^0\}, \delta_1, A_1)$ et $\mathcal{A}_2 = (X, Q_2, \{q_2^0\}, \delta_2, A_2)$ reconnaissant L_1 et L_2 respectivement.
Posons $\mathcal{A} = (X, Q_1 \times Q_2, (q_0^1, q_0^2), \delta, A)$, où δ est définie par :

$$\delta((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x)), \ \forall x \in X$$

1. Prouver que, pour $\forall w \in X^*, \forall (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$, on a :

$$\delta((q_1, q_2), w) = (\delta_1(q_1, w), \delta_2(q_2, w))$$

2. Quelles valeurs faut-il choisir pour $A \subset Q_1 \times Q_2$, pour que $\mathcal{A}$ reconnaisse $L_1 \cap L_2$ ou $L_1 \cup L_2$? En déduire que la famille $Rec(X^*)$ est fermée pour les opérations $\cap$ et $\cup$.

Exercice 13

Soit $L = a^*ba + b^*aba$. Construire l'automate fini déterministe complet reconnaissant L en formant les résiduels de L.