Université Bordeaux I
Licence Informatique **TD OMI 2001**

Feuille d'exercices n° 3 : Relations, treillis, point fixe

Exercice 1

On dit qu'un ordre sur un ensemble E est un **bon ordre** si toute partie non vide totalement ordonnée de E admet un plus petit élément. Montrer qu'un bon ordre est nécessairement un ordre bien-fondé. Et réciproquement ?

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide. Montrer que l'ensemble des relations d'équivalence sur E, muni de l'inclusion, est un treillis. Que sont la borne supérieure et la borne inférieure d'une paire d'éléments de $\mathcal{R}$?

Exercice 3

Soit A un alphabet fini. On considère l'équation $X = BX + L$ sur $\mathcal{P}(A^*)$, où L et B sont deux langages donnés sur A^*.

1. Montrer que $X_0 = B^*L$ est la plus petite solution de l'équation.
2. Montrer que si $\varepsilon \notin B$, $X_0 = B^*L$ est la solution unique de l'équation.
3. En utilisant 2, trouver une expression rationnelle pour le langage suivant :
   $L = \{w \in \{a,b\}^*$ avec $|w|_a$ pair et $|w|_b$ impair $\}$

Exercice 4

Treillis distributifs. On munit $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de l'ordre $f \leq g$ défini pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$f \leq g \text{ ssi } \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leq g(n)$$

1. Montrer que c'est un treillis distributif.
2. Soit $F = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n \Rightarrow f(m) = 0\}$. Montrer que F est un sous-treillis de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
3. A tout $f \in F$, on associe $n(f) = 2^{f(0)}3^{f(1)}5^{f(2)}\cdots$. Montrer que $f \leq g$ sur F si et seulement si $n(f)$ divise $n(g)$. En déduire que $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbf{pgcd}, \mathbf{ppcm})$ est un treillis distributif.

Exercice 5

Montrer la nécessité des hypothèses des théorèmes de point fixe en donnant un exemple d'ensemble ordonné $(E, \leq)$ et de fonction $f : E \longrightarrow E$ pour chacun des cas suivants :

- E est complet, mais f n'est pas monotone et n'admet aucun point fixe ;
- f est monotone, mais E n'est pas complet, et f n'admet pas de point fixe ;
- E est complet et f est monotone, mais f n'est pas continue, et $\mathrm{Sup}\{f^n(\perp)/n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un point fixe de f.

Les exercices qui suivent ne seront pas nécessairement traités en TD, mais sont recommandés aux étudiants.

Exercice 6

Toute application $f : D^n \to D$, où D désigne un domaine ordinaire (tel que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou $B = \{0, 1\}$) peut être prolongée en une application continue $\overline{f} : D_\perp^n \to D_\perp$, où $D_\perp = D \cup \{\perp\}$ est muni de l'ordre

$$x \leq y \iff x = y \text{ ou } x = \perp\}$$

Trouver des prolongements continus de

1. **if - then - else** : $B \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2. **or** : $B \times B \to B$
3. **and** : $B \times B \to B$

Exercice 7

Dans l'espace des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, ordonné par

$$f \leq g \iff \forall x \in Dom(f) \quad g(x) = f(x)$$

montrer que la fonction τ définie par

$$\tau(f)(x) = \textbf{if } x = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } f(x+1)$$

admet une infinité de points fixes. Quel est le plus petit ?