Université Bordeaux I
Licence d'Informatique **TD OMI 2001**

Feuille d'exercices n° 4 : Principe d'induction

Exercice 1

Le langage de Lukasiewicz Ł sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ peut être défini inductivement comme suit :

- Ł contient b
- si $u, v \in$ Ł, alors $auv \in$ Ł

1. Enumérer les mots de Ł de longueur inférieure ou égale à 9.
2. Montrer que tout mot $u \in$ Ł vérifie :
   (1) $\quad |u|_b = |u|_a + 1$
3. Montrer que tout mot $u \in$ Ł vérifie aussi :
   (2) $\quad \forall v$ facteur gauche de u, $u \neq v$: $|v|_a \geq |v|_b$
4. Montrer que, si un mot $u \in A^*$ satisfait (1) et (2), alors soit $u = b$, soit u commence par a et il existe u_1 et u_2 tels que $u = au_1u_2$, où u_1 et u_2 satisfont (1) et (2). Montrer que le couple (u_1, u_2) vérifiant ces propriétés est unique.
5. Prouver que Ł $= \{u \in A^* \ | \ u \ \text{ satisfait } \ (1) \ \text{ et } \ (2)\}$

Exercice 2

On dit qu'un point $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est *sous-diagonal* si $y \leq x$; on désigne par Δ l'ensemble des points sous-diagonaux.

1. Montrer que les axiomes
   (i) $(0, 0) \in X$,
   (ii) $(x, y) \in X \Rightarrow (x + 1, y), (x + 1, y + 1) \in X$
   donnent une définition inductive de Δ.
2. Donner d'autres exemples de sous-ensembles de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui satisfont les axiomes (i) et (ii).
3. On désigne par d et h les translations diagonales et horizontales des points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Plus précisément, ce sont les fonctions

   $$d, h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

   données par $d(x, y) = (x + 1, y + 1)$ et $h(x, y) = (x + 1, y)$.
   Reformuler la définition inductive de Δ en utilisant les définitions des translations d et h.
4. Comme les fonctions d, h sont d'arité 1, les termes construits sur celles-ci correspondent à des suites de d et de h, appelées aussi mots. Décrire, pour un point $(x, y) \in \Delta$, l'ensemble des termes possibles menant à sa construction. Par exemple :

   $$d(h(d((0, 0)))) = (3, 2) = d(d(h((0, 0))))$$

Exercice 3

On considère le programme C suivant :

```
float puissance(float x,int n)
{
  if (n==0)
    return 1;
  else
    if (n&1)
      return x*puissance(x,n-1);
    else
      return puissance(x*x,n/2);
}
```

Démontrer, par récurrence sur l'entier `n`, que ce programme calcule effectivement la puissance `n`-ième du réel `x` (en supposant `n` positif ou nul).

Exercice 4

On considère le polynôme à coefficients réels $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$.

1. Trouver a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^2$. On suppose dans la suite que cette propriété est vérifiée.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un entier.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 5

Fractions égyptiennes. Les Egyptiens ne connaissaient que les fractions de numérateur 1.

Prouver que l'on peut exprimer tout nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$ $(q > 0, 0 < p < q)$ comme somme de fractions égyptiennes, grâce à l'algorithme récursif suivant (dû à Fibonacci) : si $p = 1$, $\frac{p}{q}$ est une fraction égyptienne ; sinon, on écrit

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n} + S$$

où $n = \lceil \frac{q}{p} \rceil$, et S est une somme de fractions égyptiennes représentant le rationnel $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$.

Les exercices qui suivent ne seront pas nécessairement traités en TD, mais sont recommandés aux étudiants.

Exercice 6

Un ensemble A est défini par les conditions suivantes : (1) $1 \in A$; (2) pour tout $k \in A$,

$2k+1 \in A$ et $3k+1 \in A$; (3) il n'y a pas d'autres éléments. Imprimer les n premiers éléments de A en ordre croissant. (Début : 1,3,4,7,9,10,13,15,19,...)

Exercice 7

Théorème du reste chinois. Soit S le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{N}$ satisfaisant les axiomes suivants :

$$\begin{array}{ll} (i) & 0 \in S \\ (ii) & n \in S \Rightarrow n+3 \in S \\ (iii) & n \in S \Rightarrow n+5 \in S \end{array}$$

1. Montrer que $S = \{3k + 5k' \mid (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$
2. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout entier $n > N$ on a $n \in S$. Indication : pour tout entiers k et k', on a $(3k+5k')+1 = 3(k+2)+5(k'-1) = 3(k-3)+5(k'+2)$.