Université Bordeaux I
Licence d'Informatique **TD OMI 2001**

Feuille d'exercices n° 5 : Algèbre de Boole

Exercice 1

Soit A une algèbre de Boole, E un ensemble non vide. Montrer que l'ensemble des fonctions de E dans A, muni des opérations d'addition et de produit de fonctions, a une structure d'algèbre de Boole.

Exercice 2

Montrer les égalités

1. $(x+y)(\overline{x}+z) = (\overline{x}y) + xz$
2. $xy + x\overline{y} + \overline{x}y + \overline{xy} = 1.$

Exercice 3

Démontrer les équivalences

1. $x = ax + b\overline{x} \Leftrightarrow b \leq x \leq a$
2. $ax + b\overline{x} = 0 \Leftrightarrow b \leq x \leq \overline{a}.$

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\overline{(\overline{x}\ \overline{y})}$
2. $(x+y) + (z+x) + (y+z)$
3. $(xy + zx + \overline{(\overline{x}+\overline{y})})$

Exercice 5

Déterminer une expression polynomiale de la fonction booléenne admettant pour table de vérité :

x	y	z	t	$f(x,y,z,t)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Exercice 6

Donner une fonction booléenne à trois variables x, y, z qui vaut 1 si et seulement si l'une des variables est égale à 1. Que peut-on conclure si $x = \overline{z}$? Utiliser le résultat précédent pour résoudre formellement la devinette suivante :

Etant donné qu'un trésor est caché dans l'un de coffret A, B ou C, peut-on déterminer où il se trouve, sachant que l'une des trois propositions (et seulement l'une) est vraie :

- A contient le trésor
- B est vide
- A ne contient pas de trésor

Les exercices qui suivent ne seront pas nécessairement traités en TD, mais sont recommandés aux étudiants.

Exercice 7

Soit $f(x, y, z)$ une fonction booléenne. On dit que f *définit implicitement sa troisième variable* si pour tous $x, y \in \mathcal{B}$, il existe un unique $z \in \mathcal{B}$ tel que $f(x, y, z) = 0$.

1. Montrer que $f(x, y, z)$ définit implicitement sa troisième variable si et seulement si
$$\forall x, y, z \in \mathcal{B} \;\; f(x, y, z) = \overline{f(x, y, \overline{z})}$$

2. Montrer que si f définit implicitement sa troisième variable alors l'unique z tel que $f(x,y,z) = 0$ est égal à $f(x,y,0)$.
3. Soit $f(x,y,z) = xy\overline{z} + \overline{x}z + \overline{y}z$. Montrer que $z = xy$ est la seule valeur de z telle que $f(x,y,z) = 0$.

Exercice 8

On se propose de démontrer que toute algèbre de Boole finie contenant au moins deux éléments est isomorphe à $\mathcal{B}^n$ pour un certain entier n ($\mathcal{B}$ désignant l'algèbre de Boole minimale $\{0,1\}$).

Dans toute la suite, on se donne une algèbre de Boole finie A contenant au moins deux éléments.

1. Montrer que l'ensemble
$$B = \{b \in A / \forall a \in A, ab = 0 \text{ ou } ab = b\}$$
des éléments minimaux de $A - \{0\}$ n'est pas vide ; on notera n le nombre d'éléments de B.
2. Démontrer que, si B contient plus d'un élément, le seul minorant de B est 0 ; montrer l'égalité $\sum_{b \in B} b = 1$.
3. Démontrer que tout $x \in A$ se décompose de façon unique (à l'ordre près) en somme d'éléments deux à deux distincts de B ; en déduire un isomorphisme de A sur $\mathcal{B}^n$.

Exercice 9

On se propose de démontrer que toute algèbre de Boole finie contenant au moins deux éléments est isomorphe à $\mathcal{B}^n$ pour un certain entier n ($\mathcal{B}$ désignant l'algèbre de Boole minimale $\{0,1\}$).

Dans toute la suite, on se donne une algèbre de Boole finie A contenant au moins deux éléments.

1. Montrer que l'ensemble
$$B = \{b \in A / \forall a \in A, ab = 0 \text{ ou } ab = b\}$$
des éléments minimaux de $A - \{0\}$ n'est pas vide ; on notera n le nombre d'éléments de B.
2. Démontrer que, si B contient plus d'un élément, le seul minorant de B est 0 ; montrer l'égalité $\sum_{b \in B} b = 1$.
3. Démontrer que tout $x \in A$ se décompose de façon unique (à l'ordre près) en somme d'éléments deux à deux distincts de B ; en déduire un isomorphisme de A sur $\mathcal{B}^n$.

Exercice 10

1. Montrer que toute fonction booléenne peut être écrite à l'aide de l'opérateur $\uparrow$ (`NOR`) défini par $x \uparrow y = \overline{xy}$.
2. Montrer que toute fonction booléenne peut être écrite à l'aide de l'opérateur $\downarrow$ (`NAND`) défini par $x \downarrow y = \overline{x} + \overline{y}$.
3. Montrer que $\uparrow$ et $\downarrow$ sont les seuls opérateurs binaires permettant d'écrire toutes les fonctions booléennes.