Université Bordeaux I
Licence Informatique **TD OMI 2001**

Feuille d'exercices n° 7 : Séries génératrices

Exercice 1

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ une série formelle. On pose $T(x) = \sum_{n\geq 0} v_n x^n$ où v_n est la suite définie par $v_0 = 0$, $v_{n+1} = v_n + u_n$ pour $n \geq 0$. Quelles relations peut-on trouver entre $S(x)$ et $T(x)$?

Exercice 2

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite des nombres de Fibonacci définie par

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On définit la suite $(G_n)_{n\geq 0}$ par

$$G_0 = 0 \quad G_1 = 1 \quad G_{n+2} = G_{n+1} + G_n + F_{n+2}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$G_n = \frac{2(n+1)F_n + nF_{n+1}}{5}$$

2. On rappelle la série génératrice des F_n :

$$\sum_{n\geq 0} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Montrer que la série génératrice des G_n est

$$\sum_{n\geq 0} G_n x^n = \frac{x}{(1 - x - x^2)^2}$$

Exercice 3

Soit G le graphe constitué d'un cycle de longueur 3, ses sommets sont notés 1, 2, 3 et ses arêtes a, b, c.

Un chemin est ici considéré comme une suite d'arêtes telle que deux arêtes consécutives ont au moins un sommet en commun. La longueur du chemin est le nombre de ses arêtes. Ainsi, il y a 3 chemins de longueur 3 d'origine 1 et d'extrémité 3 dans G a' savoir :

$$\gamma_1 = a, a, c; \quad \gamma_2 = c, b, b; \quad \gamma_3 = c, c, c$$

Dans la suite on note u_n le nombre de chemins de longueur n d'origine 1 et d'extrémité 3, v_n le nombre de ceux d'origine 2 et d'extrémité 3, enfin w_n le nombre de ceux d'origine 3 et d'extrémité 3. Ainsi $u_0 = v_0 = 0, w_0 = 1$.

1. Montrer que pour $n > 1$:
$$\begin{aligned} u_n &= v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n &= w_{n-1} + u_{n-1} \\ w_n &= u_{n-1} + v_{n-1} \end{aligned}$$

2. Dans la suite on note $U(x), V(x)$ et $W(x)$ les séries génératrices des nombres u_n, v_n et w_n respectivement.
   Déduire de ce qui précède :
$$U(x) = xV(x) + xW(x) \quad V(x) = xW(x) + xU(x) \quad W(x) = 1 + xU(x) + xV(x)$$

3. Montrer que :
$$U(x) = \frac{x}{(1+x)(1-2x)}$$

4. Ecrire $U(x)$ sous la forme :
$$U(x) = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-2x}$$
   En déduire une formule donnant u_n en fonction de n, et calculer u_n pour $n \leq 4$.

Exercice 4

Les **mots de Dyck** sont les mots de $\{(,)\}^*$ correspondant à des parenthèsages bien formés : on peut les définir inductivement par les règles

- ε est un mot de Dyck
- si x et y sont des mots de Dyck, xy et (x) sont des mots de Dyck.

Déterminer, en fonction de l'entier n, le nombre de mots de Dyck de longueur n.