

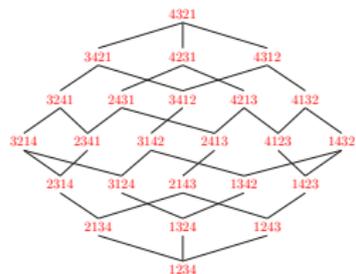
Algèbre de Hopf Cambrienne

G. Châtel

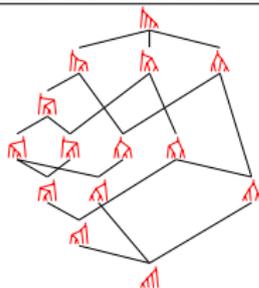
27 janvier 2015

Travail avec V. Pilaud.

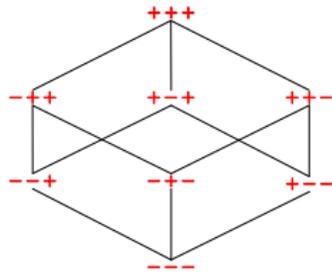
permutations



arbres binaires



suites binaires



	permutations	arbres binaires	suites binaires
Combinatoire			
Algèbre	Algèbre de Malvenuto-Reutenauer $\text{FQSym} = \text{vect} \langle \mathbb{F}_\tau \mid \tau \in \mathfrak{S} \rangle$	Algèbre de Loday-Ronco $\text{PBT} = \text{vect} \langle \mathbb{P}_T \mid T \in \mathcal{BT} \rangle$	Fonctions symétriques non commutatives $\text{NCSF} = \text{vect} \langle \mathbb{X}_\eta \mid \eta \in \pm^* \rangle$

	permutations	arbres binaires	suites binaires
Combinatoire			
Algèbre	Algèbre de Malvenuto-Reutenauer $\text{FQSym} = \text{vect} \langle \mathbb{F}_\tau \mid \tau \in \mathfrak{S} \rangle$	Algèbre de Loday-Ronco $\text{PBT} = \text{vect} \langle \mathbb{P}_T \mid T \in \mathcal{BT} \rangle$	Fonctions symétriques non commutatives $\text{NCSF} = \text{vect} \langle \mathbb{X}_\eta \mid \eta \in \pm^* \rangle$
Géométrie			

1 Algèbre des arbres binaires

- Ordres
- Permutations, ordre faible et treillis
- Arbres binaires et treillis de Tamari

2 Algèbre Cambrienne

- Combinatoire
- Algèbre
- Résultats supplémentaires

Définitions

Ordre total

Relation “Être plus âgé” :

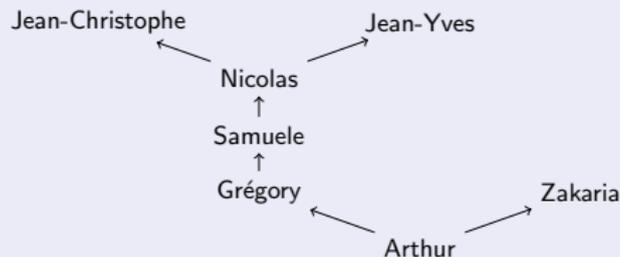
Arthur \triangleleft Zakaria \triangleleft Grégory \triangleleft Samuele \triangleleft Nicolas \triangleleft Jean-Christophe \triangleleft Jean-Yves.

Relation “Être plus grand” :

Arthur \triangleleft Grégory \triangleleft Samuele \triangleleft Nicolas \triangleleft Jean-Yves \triangleleft Jean-Christophe \triangleleft Zakaria.

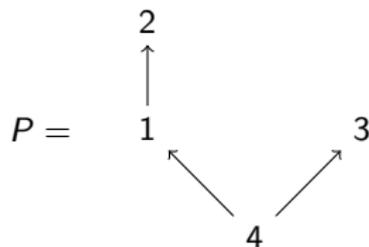
Ordre partiel

Relation “Être plus grand et plus âgé” :



Extensions linéaires

Extension linéaire d'un ordre partiel $P :=$ ordre total compatible à P .



$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P) &= \{4 \triangleleft 3 \triangleleft 1 \triangleleft 2, \quad 4 \triangleleft 1 \triangleleft 3 \triangleleft 2, \quad 4 \triangleleft 1 \triangleleft 2 \triangleleft 3\} \\ &= \{4312, 4132, 4123\}\end{aligned}$$

Permutations et ordre faible

Permutations

Une permutation σ est un mot de taille n dans lequel chaque lettre de $\{1, \dots, n\}$ apparaît une seule fois.

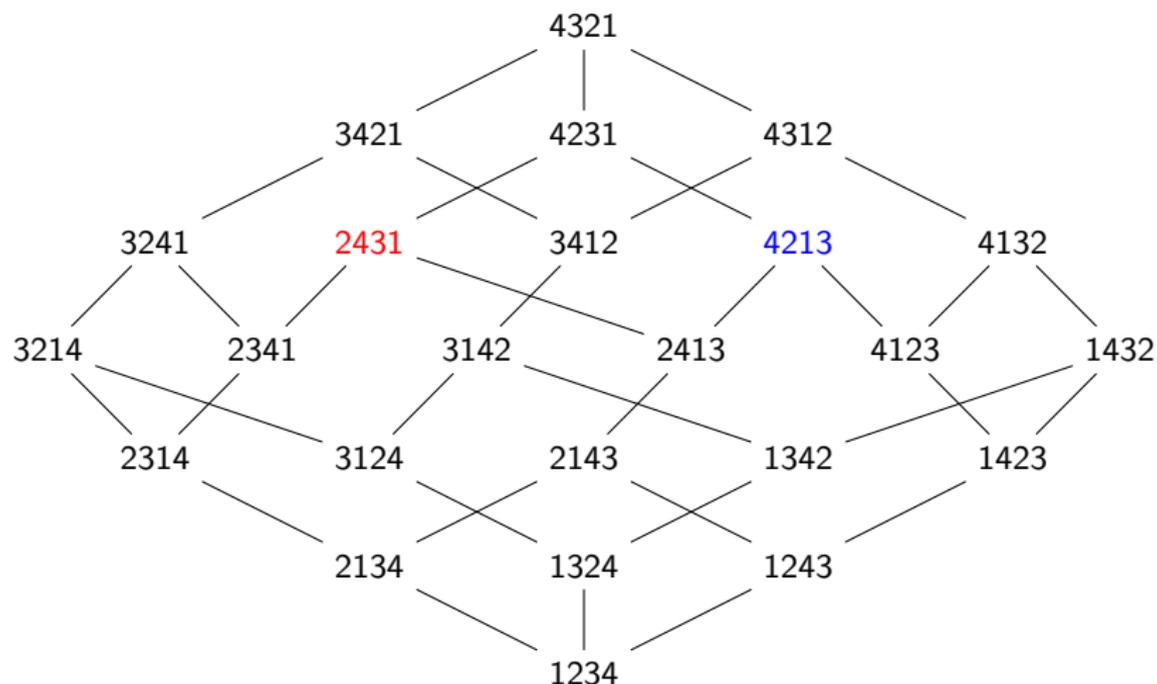
Ex : 31524, 1423, 312.

Ordre faible droit sur les permutations

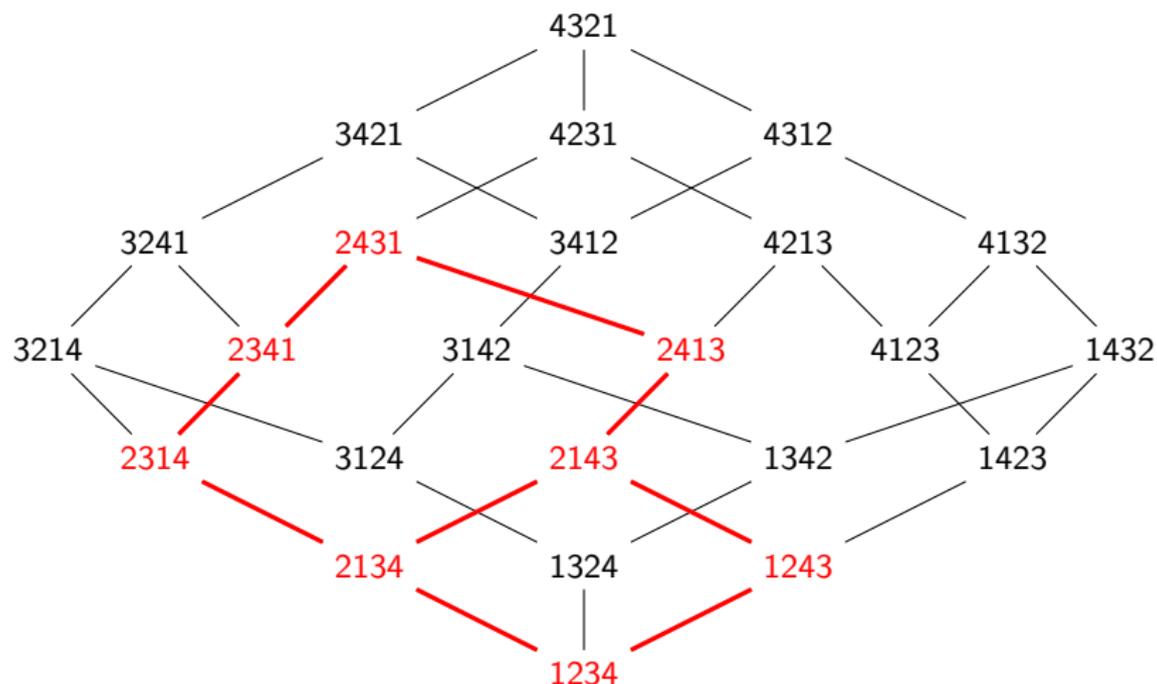
À chaque étape, on échange deux valeurs consécutives croissantes.



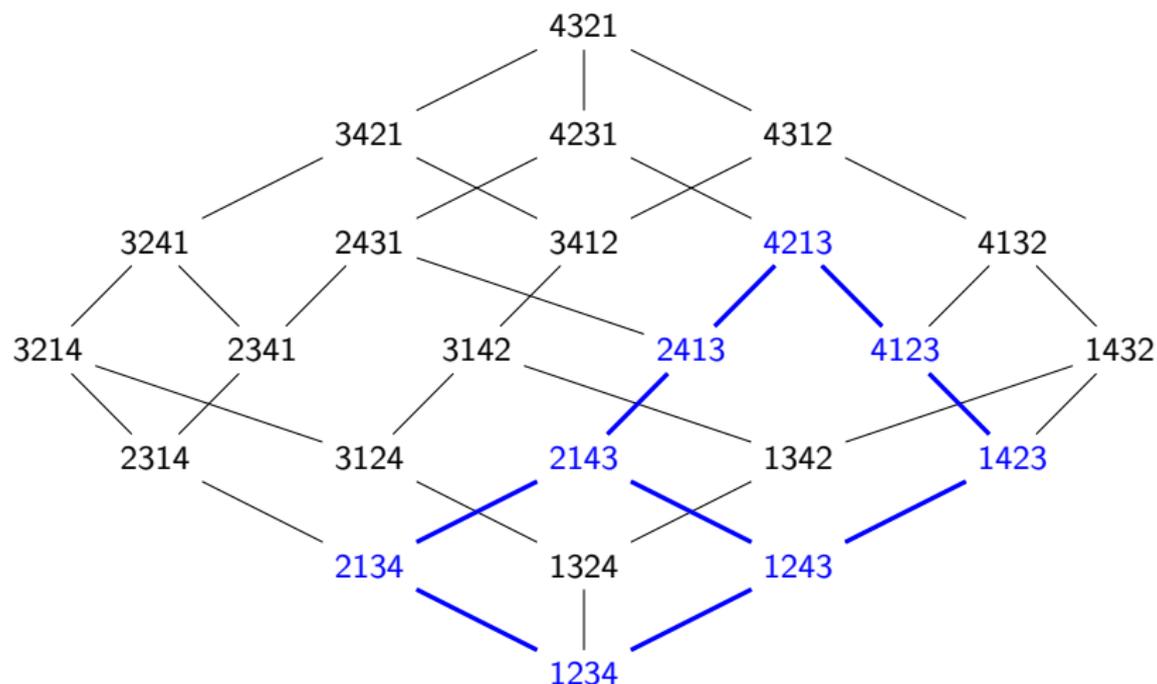
Ordre faible de taille 4



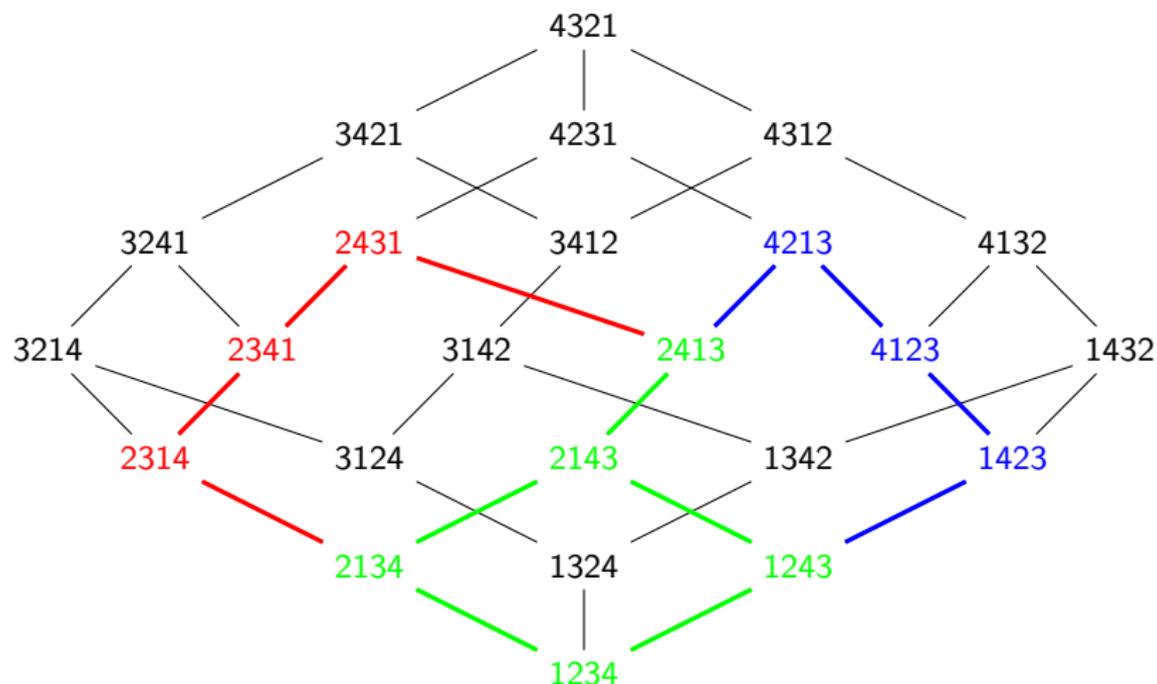
Ordre faible de taille 4



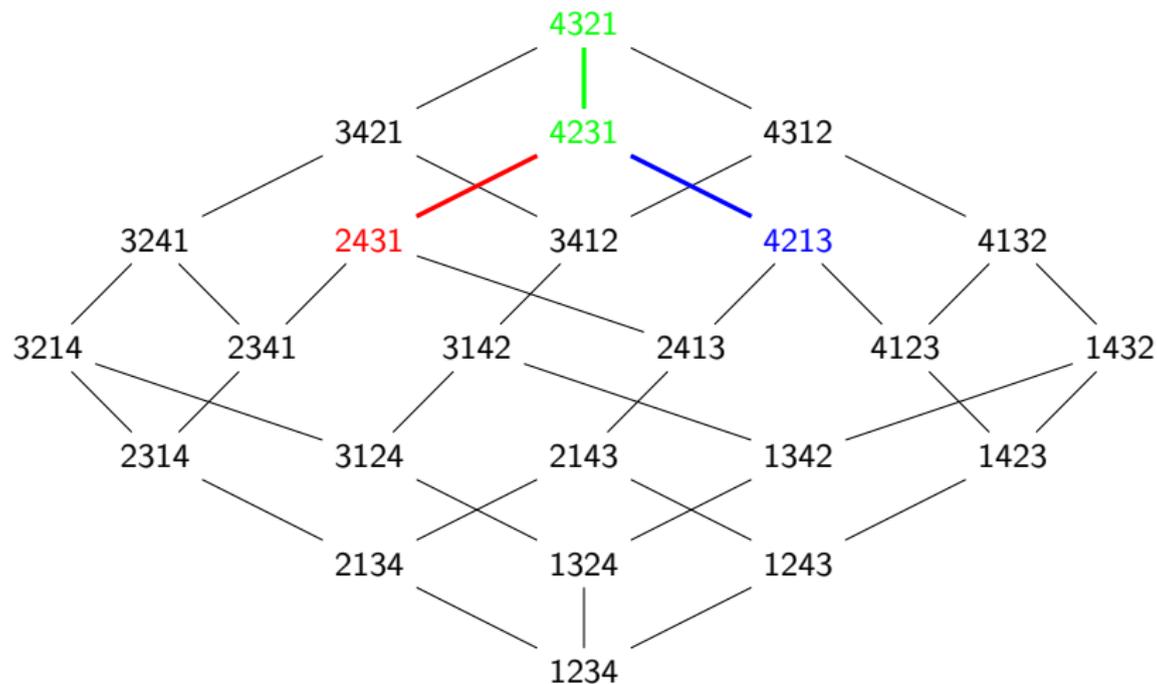
Ordre faible de taille 4



Ordre faible de taille 4



Ordre faible de taille 4



Arbres binaires

Définition

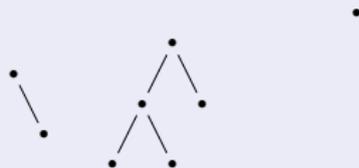
Un arbre binaire est soit un arbre vide soit une racine sur laquelle on a greffé deux arbres binaires.



Arbres binaires

Définition

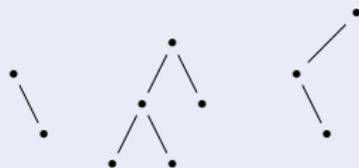
Un arbre binaire est soit un arbre vide soit une racine sur laquelle on a greffé deux arbres binaires.



Arbres binaires

Définition

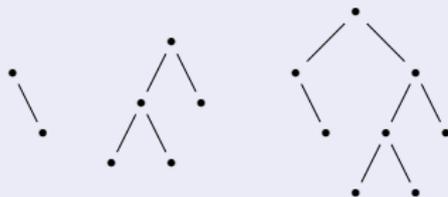
Un arbre binaire est soit un arbre vide soit une racine sur laquelle on a greffé deux arbres binaires.



Arbres binaires

Définition

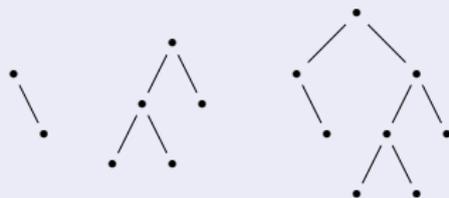
Un arbre binaire est soit un arbre vide soit une racine sur laquelle on a greffé deux arbres binaires.



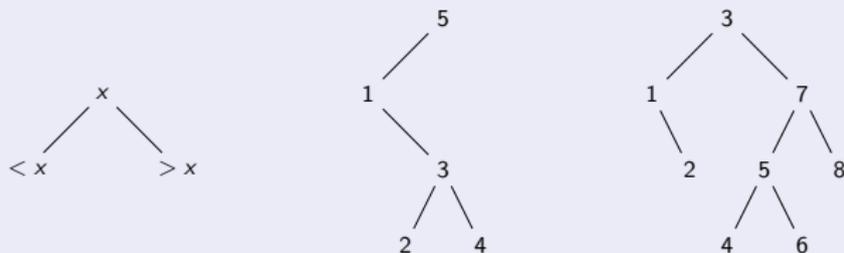
Arbres binaires

Définition

Un arbre binaire est soit un arbre vide soit une racine sur laquelle on a greffé deux arbres binaires.

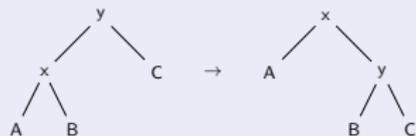


Arbres binaires de recherche



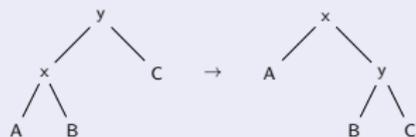
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



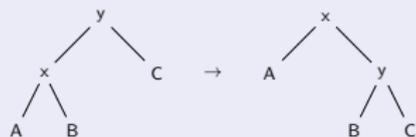
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



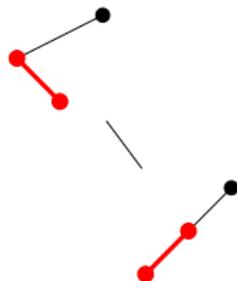
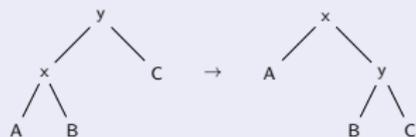
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



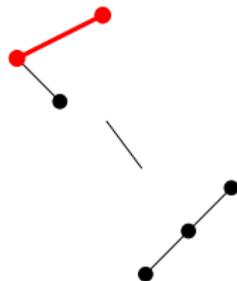
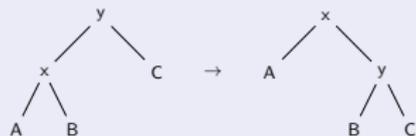
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



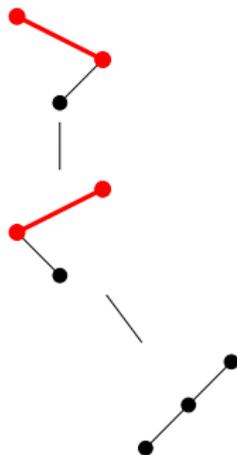
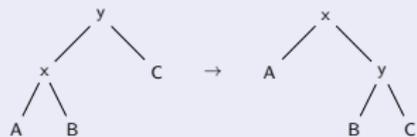
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



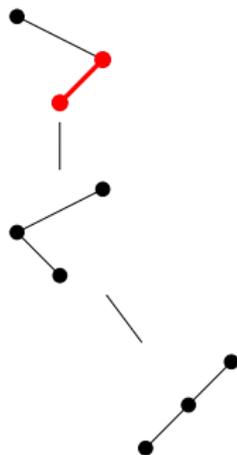
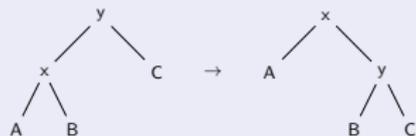
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



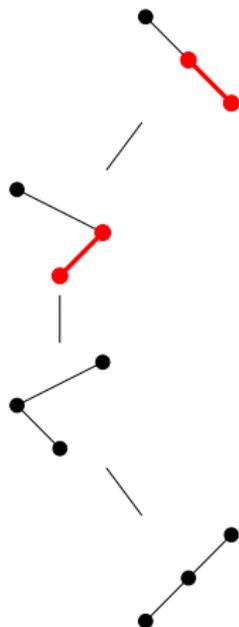
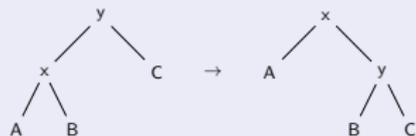
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



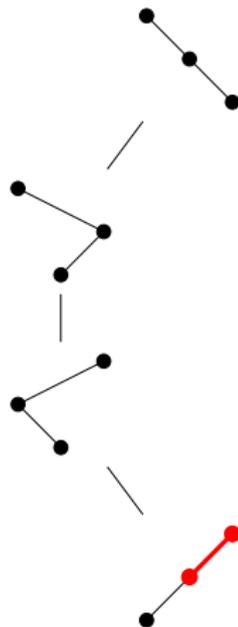
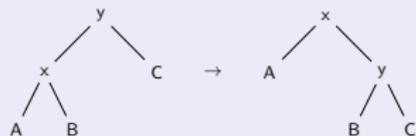
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



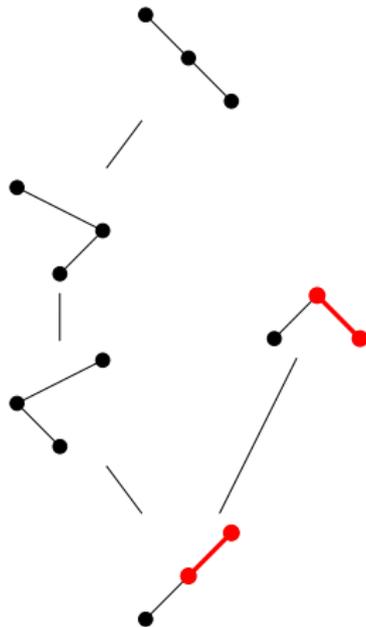
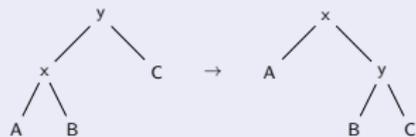
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



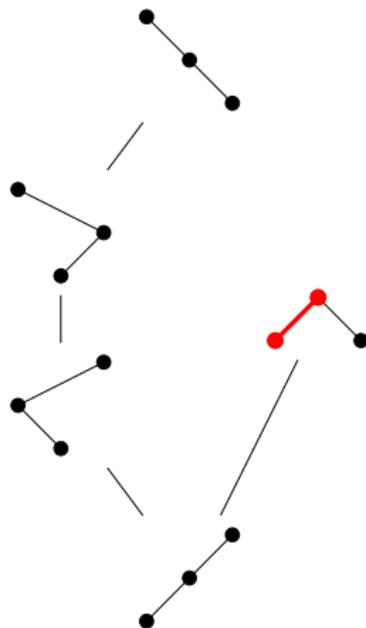
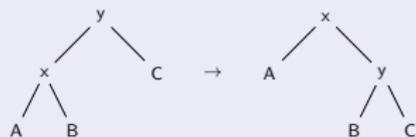
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



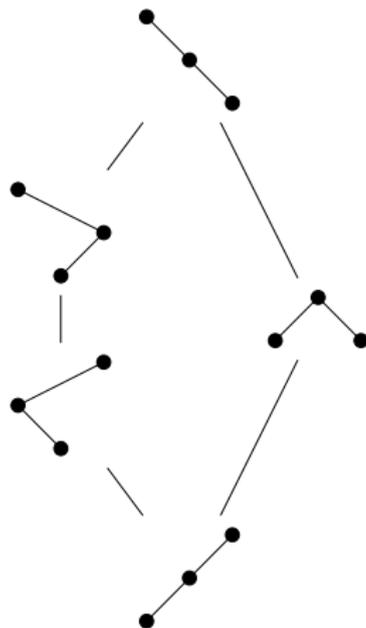
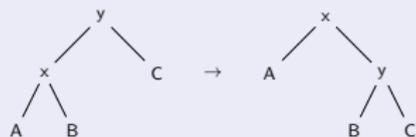
Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite

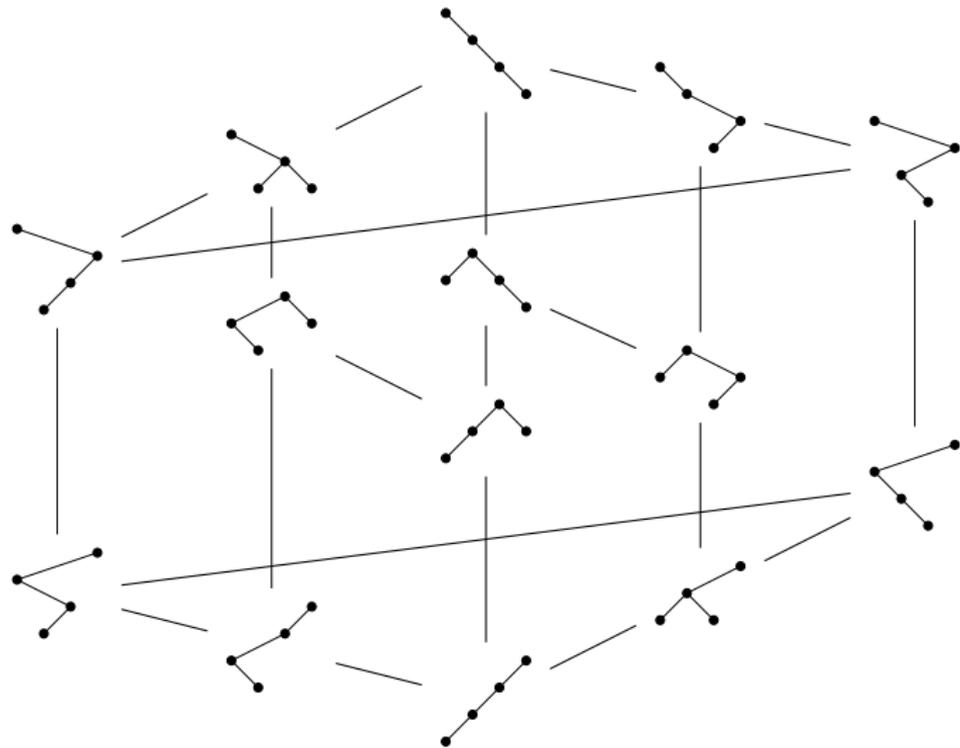


Ordre de Tamari sur les arbres binaires

Rotation droite



Ordre de Tamari



Quelques résultats sur l'ordre de Tamari

- 1962, Tamari : ordre sur les parenthésages formels,

Quelques résultats sur l'ordre de Tamari

- 1962, Tamari : ordre sur les parenthésages formels,
- 1972, Huang, Tamari : structure de treillis,

Quelques résultats sur l'ordre de Tamari

- 1962, Tamari : ordre sur les parenthésages formels,
- 1972, Huang, Tamari : structure de treillis,
- 2007, Chapoton : nombre d'intervalles,

$$\frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}$$

Quelques résultats sur l'ordre de Tamari

- 1962, Tamari : ordre sur les parenthésages formels,
- 1972, Huang, Tamari : structure de treillis,
- 2007, Chapoton : nombre d'intervalles,

$$\frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}$$

- 2014, Pournin : diamètre du graphe correspondant.

$$2n - 4$$

Insertion dans un arbre binaire de recherche

$$P(15324) = 4$$

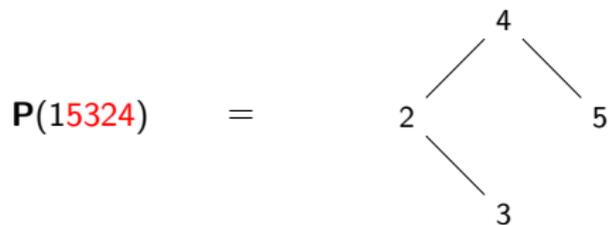
Insertion dans un arbre binaire de recherche

$$P(15324) = \begin{array}{c} & & 4 \\ & & / \\ 2 & & \end{array}$$

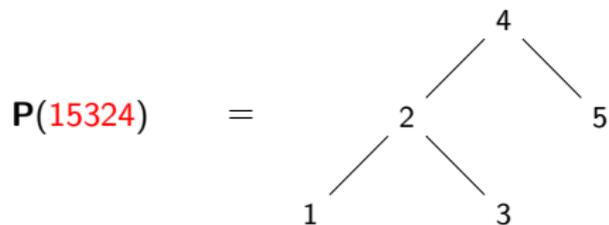
Insertion dans un arbre binaire de recherche



Insertion dans un arbre binaire de recherche



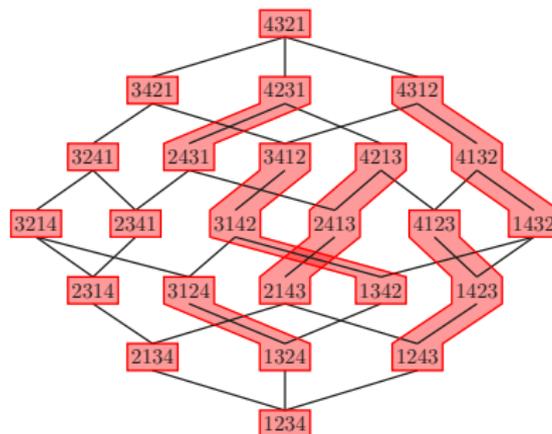
Insertion dans un arbre binaire de recherche



Ordre de Tamari et ordre faible

Proposition [Loday, Ronco 2002]

\mathbf{P} est un homomorphisme de treillis de l'ordre faible sur les permutations vers l'ordre de Tamari.



Vocabulaire

- Base : façon de voir un objet ;
- Produit : somme sur toutes les différentes façons d'assembler deux objets ;
- Coproduit : somme sur toutes les différentes façons de désassembler un objet.

Vocabulaire

- Base : façon de voir un objet ;
- Produit : somme sur toutes les différentes façons d'assembler deux objets ;
- Coproduit : somme sur toutes les différentes façons de désassembler un objet.

Produit

$$\mathbb{F}_\sigma \cdot \mathbb{F}_\tau = \sum_{\dots} \mathbb{F}_\gamma$$

Vocabulaire

- Base : façon de voir un objet ;
- Produit : somme sur toutes les différentes façons d'assembler deux objets ;
- Coproduit : somme sur toutes les différentes façons de désassembler un objet.

Produit

$$\mathbb{F}_\sigma \cdot \mathbb{F}_\tau = \sum_{\dots} \mathbb{F}_\gamma$$

Coproduit

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\dots} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

Vocabulaire

- Base : façon de voir un objet ;
- Produit : somme sur toutes les différentes façons d'assembler deux objets ;
- Coproduit : somme sur toutes les différentes façons de désassembler un objet.

Produit

$$\mathbb{F}_\sigma . \mathbb{F}_\tau = \sum_{\dots} \mathbb{F}_\gamma$$

Coproduit

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\dots} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

Compatibilité

$$\Delta(\mathbb{F}_\sigma . \mathbb{F}_\tau) = \Delta(\mathbb{F}_\sigma) . \Delta(\mathbb{F}_\tau)$$

FQSym (aka Algèbre de Malvenuto-Reutenauer)

Produit

Base

La base \mathbb{F} de l'algèbre FQSym est indicée par des permutations.

Mélange et mélange décalé

$$12 \sqcup 21 = 12 \sqcup 43 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312$$

FQSym (aka Algèbre de Malvenuto-Reutenauer)

Produit

Base

La base \mathbb{F} de l'algèbre FQSym est indicée par des permutations.

Mélange et mélange décalé

$$12 \bar{\sqcup} 21 = 12 \sqcup 43 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312$$

Produit sur la base \mathbb{F}

$$\mathbb{F}_\sigma \cdot \mathbb{F}_\tau = \sum_{\gamma \in \sigma \bar{\sqcup} \tau} \mathbb{F}_\gamma$$

$$\mathbb{F}_{213} \cdot \mathbb{F}_1 = \sum_{\gamma \in 213 \bar{\sqcup} 1} \mathbb{F}_\gamma = \mathbb{F}_{2134} + \mathbb{F}_{2143} + \mathbb{F}_{2413} + \mathbb{F}_{4213}$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Coproduct sur la base \mathbb{F}

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma = u.v, \\ \sigma = \text{std}(u), \\ \tau = \text{std}(v).}} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{F}_{25143}) &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}_{25143} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{132} \\ &\quad + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{25143} \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Coproduct sur la base \mathbb{F}

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma=uv, \\ \sigma=\text{std}(u), \\ \tau=\text{std}(v).}} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{F}_{25143}) &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}_{25143} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{132} \\ &\quad + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{25143} \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Coproduct sur la base \mathbb{F}

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma=u.v, \\ \sigma=\text{std}(u), \\ \tau=\text{std}(v).}} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{F}_{25143}) &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}_{25143} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{132} \\ &\quad + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{25143} \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Coproduct sur la base \mathbb{F}

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma=uv, \\ \sigma=\text{std}(u), \\ \tau=\text{std}(v).}} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{F}_{25143}) &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}_{25143} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{132} \\ &\quad + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{25143} \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Coproduct sur la base \mathbb{F}

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma = u.v, \\ \sigma = \text{std}(u), \\ \tau = \text{std}(v).}} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{F}_{25143}) &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}_{25143} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{132} \\ &\quad + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{25143} \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Coproduct sur la base \mathbb{F}

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma = u.v, \\ \sigma = \text{std}(u), \\ \tau = \text{std}(v).}} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{F}_{25143}) &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}_{25143} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{132} \\ &\quad + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{25143} \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Standardisation

$$\text{std}(134292131) = 168495273$$

Coproduct sur la base \mathbb{F}

$$\Delta(\mathbb{F}_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma=uv, \\ \sigma=\text{std}(u), \\ \tau=\text{std}(v).}} \mathbb{F}_\sigma \otimes \mathbb{F}_\tau$$

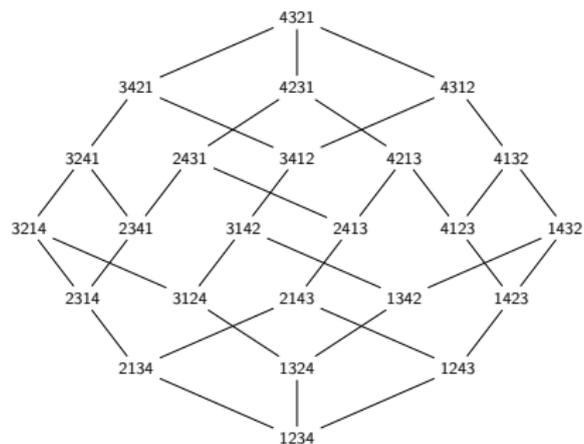
$$\begin{aligned} \Delta(\mathbb{F}_{25143}) &= \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}_{25143} + \mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{12} \otimes \mathbb{F}_{132} \\ &\quad + \mathbb{F}_{231} \otimes \mathbb{F}_{21} + \mathbb{F}_{2413} \otimes \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_{25143} \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Théorème [Malvenuto, Reutenauer 1995]

FQSym est une algèbre de Hopf.

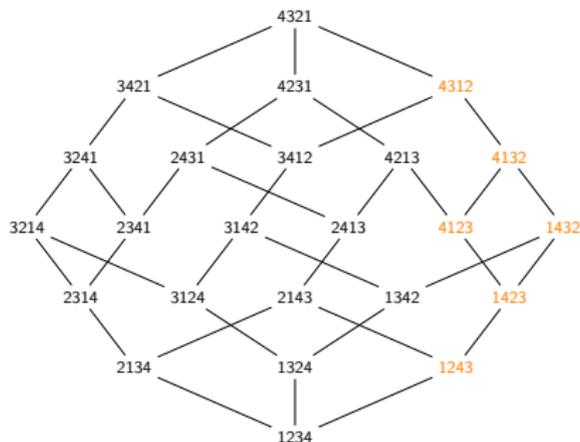
FQSym et l'ordre faible

Produit de $\mathbb{F} \rightarrow$ somme sur un intervalle de l'ordre faible.



Produit de $\mathbb{F} \longrightarrow$ somme sur un intervalle de l'ordre faible.

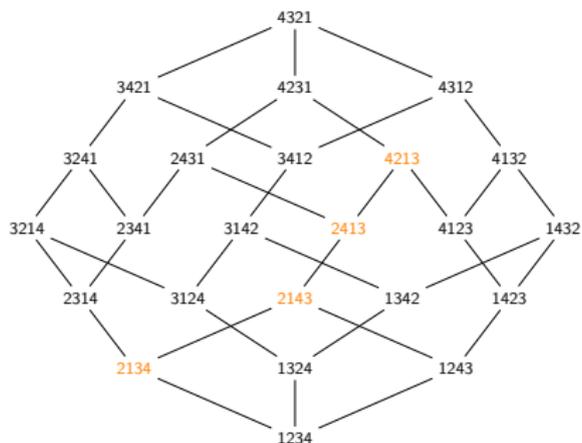
$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{12} \cdot \mathbb{F}_{21} &= \mathbb{F}_{1243} + \mathbb{F}_{1423} + \mathbb{F}_{1432} + \mathbb{F}_{4123} + \mathbb{F}_{4132} + \mathbb{F}_{4312} \\ &= \sum_{\gamma \in [1243, 4312]} \mathbb{F}_{\gamma} \end{aligned}$$



FQSym et l'ordre faible

Produit de $\mathbb{F} \rightarrow$ somme sur un intervalle de l'ordre faible.

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{213} \cdot \mathbb{F}_1 &= \mathbb{F}_{2134} + \mathbb{F}_{2143} + \mathbb{F}_{2413} + \mathbb{F}_{4213} \\ &= \sum_{\gamma \in [2134, 4213]} \mathbb{F}_\gamma\end{aligned}$$



L'algèbre des arbres binaires comme sous-algèbre de FQSym

L'algèbre des arbres binaires := sous-espace PBT de FQSym engendré par

$$\mathbb{P}_T := \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{G} \\ \mathbf{P}(\tau) = T}} \mathbb{F}_\tau,$$

pour tout arbre binaire T .

$$\mathbb{P} \begin{array}{c} & & 3 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 1 & & & & 4 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 2 & & \end{array} = \mathbb{F}_{2143} + \mathbb{F}_{2413} + \mathbb{F}_{4213}$$

Théorème [Loday, Ronco 1998]

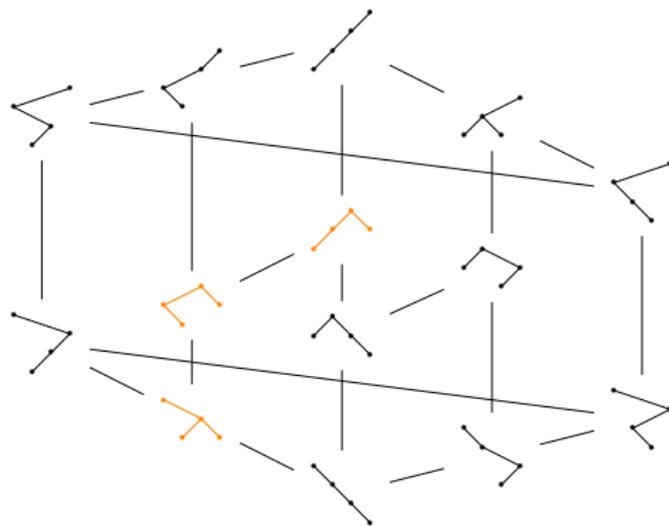
PBT est une sous-algèbre de Hopf de FQSym.

Exemple de produit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P}_{\begin{array}{c} 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}} &= \mathbb{F}_1 \cdot (\mathbb{F}_{132} + \mathbb{F}_{312}) &= & \begin{array}{c} (\mathbb{F}_{1243} \\ + \mathbb{F}_{1423} \\ + \mathbb{F}_{4123} \end{array} + \begin{array}{c} (\mathbb{F}_{2143} \\ + \mathbb{F}_{2413} \\ + \mathbb{F}_{4213} \end{array} + \begin{array}{c} (\mathbb{F}_{2431} \\ + \mathbb{F}_{4231} \end{array}) \\
 &= \mathbb{P}_{\begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \quad 4 \end{array}} + \mathbb{P}_{\begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 4 \\ \quad 2 \end{array}} + \mathbb{P}_{\begin{array}{c} 1 \\ \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}}
 \end{aligned}$$

PBT et l'ordre de Tamari

$$\mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P} \begin{array}{c} 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} = \mathbb{P} \begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \quad 4 \end{array} + \mathbb{P} \begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 4 \\ \quad \quad \quad \backslash \\ \quad \quad \quad 2 \end{array} + \mathbb{P} \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \quad \quad \quad \backslash \\ \quad \quad \quad 4 \end{array} = \sum_{\tau \in [\begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \quad 4 \\ \quad \quad \quad \backslash \\ \quad \quad \quad 4 \end{array} , \begin{array}{c} 1 \\ \backslash \\ 2 \quad 3 \\ \quad \quad \quad \backslash \\ \quad \quad \quad 4 \end{array}]} \mathbb{P}_\tau$$

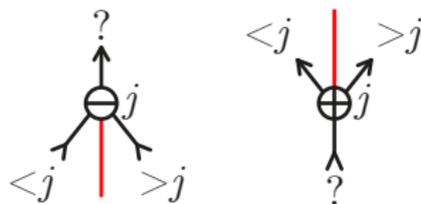


- 1 Algèbre des arbres binaires
 - Ordres
 - Permutations, ordre faible et treillis
 - Arbres binaires et treillis de Tamari

- 2 Algèbre Cambrienne
 - Combinatoire
 - Algèbre
 - Résultats supplémentaires

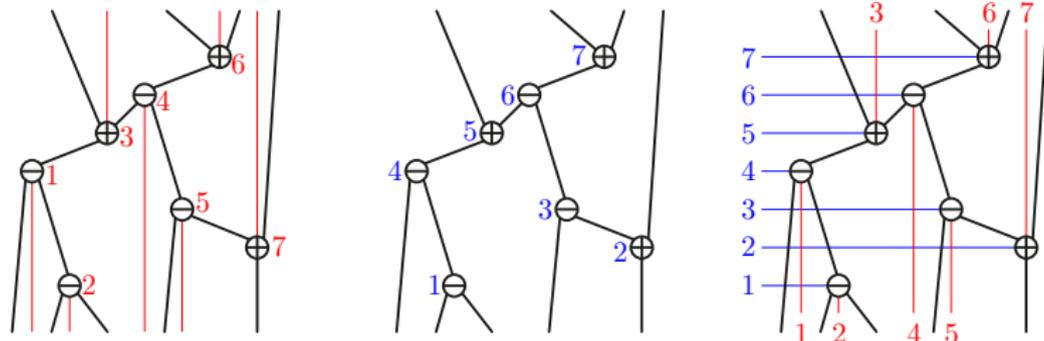
Arbres Cambriens

Arbre Cambrien := arbre orienté et étiqueté tel que



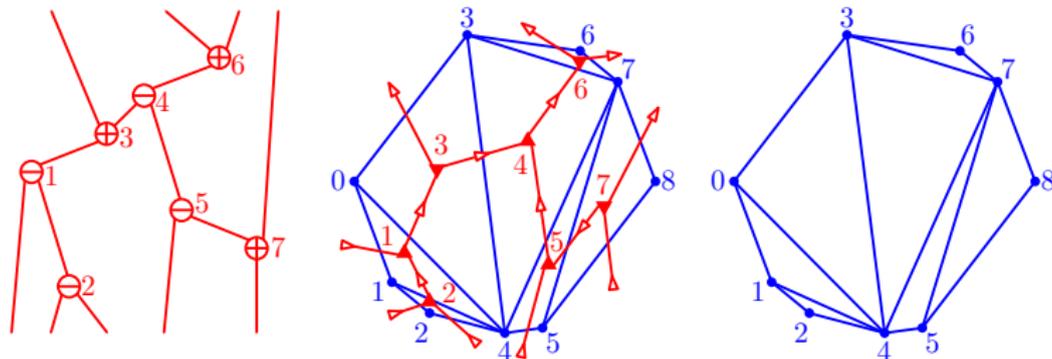
arbre décroissant := arbre orienté et étiqueté tel que les étiquettes soient décroissantes sur les chemins des racines vers les feuilles.

arbre Cambrien à niveaux := arbre orienté et muni d'un étiquetage Cambrien et d'un étiquetage décroissant



Arbres Cambriens et triangulations

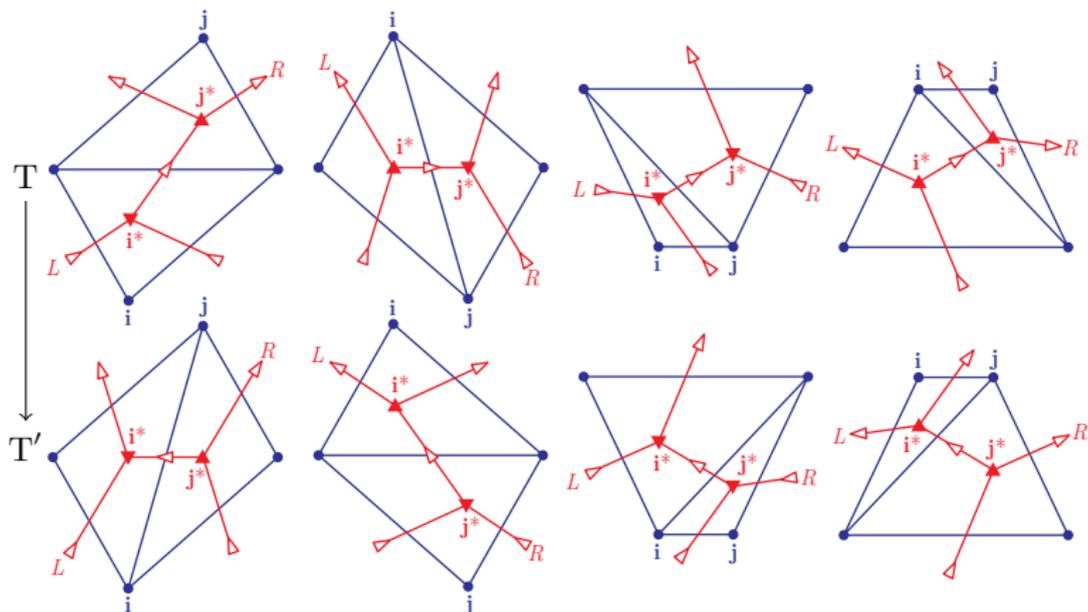
Les arbres Cambriens sont les objets **duaux des triangulations** de polygone.



signature \longleftrightarrow sommets au dessus ou en dessous de la droite $[0, 8]$
 sommet j \longleftrightarrow triangle $i < j < k$

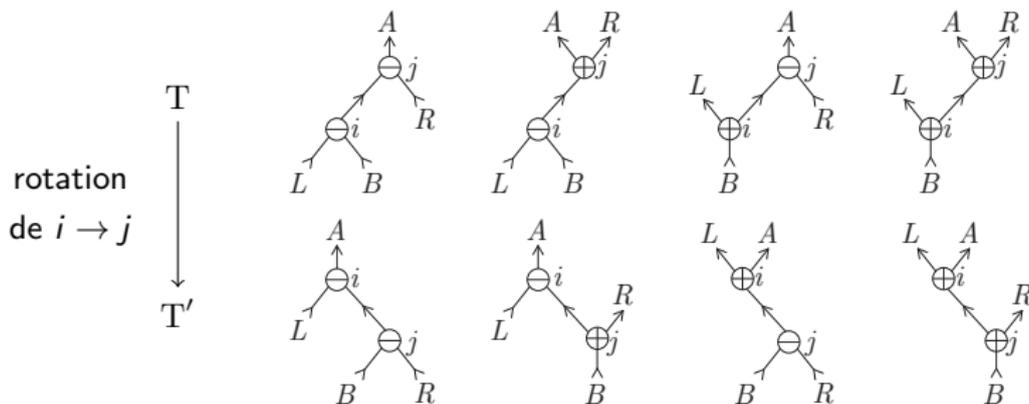
Pour chaque signature ε , il y a $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres ε -Cambriens.

Rotation dans les arbres Cambriens \longleftrightarrow flips dans les triangulations.



Rotation et treillis Cambriens

L'opération de rotation préserve les arbres Cambriens :

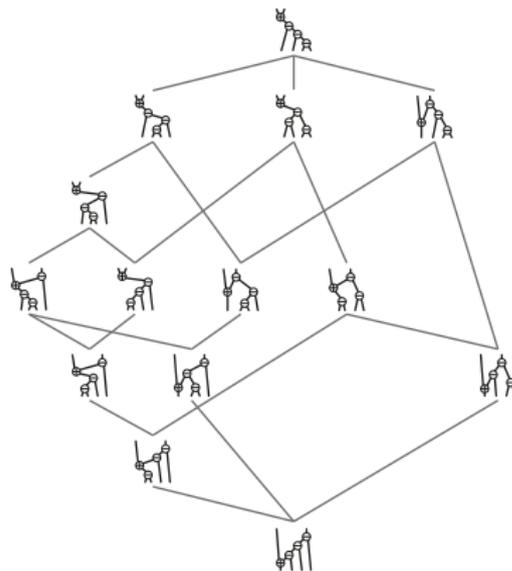
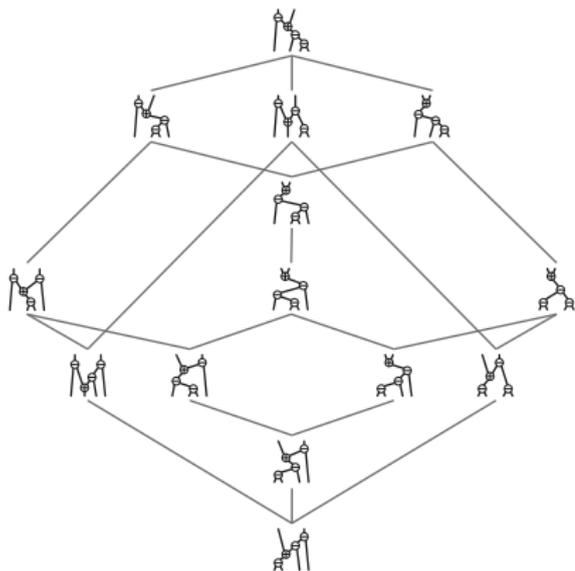


rotation croissante := rotation d'une arête $i \rightarrow j$ où $i < j$

Proposition [Reading 2006]

La clôture transitive du graphe des rotations croissantes est le **treillis Cambrien**.

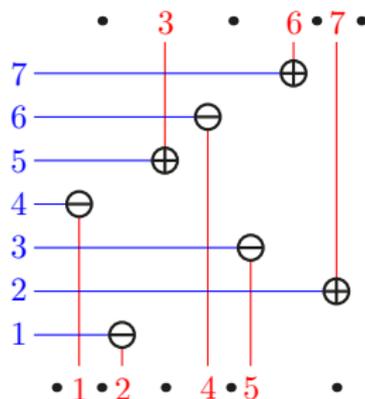
Exemple de treillis Cambriens en taille 4



Permutations signées vers les arbres Cambriens à niveaux

La correspondance Cambrienne = permutations signées \mapsto arbres Cambriens à niveaux.

Ex : permutation signée $\underline{2}\bar{7}\underline{5}\underline{1}\bar{3}\underline{4}\bar{6}$

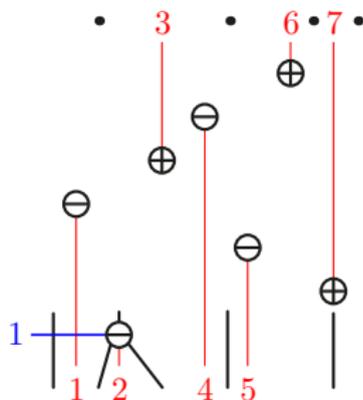


Reading. Cambrian lattices. 2006
Lange-Pilaud. Associahedra via spines. 2015

Permutations signées vers les arbres Cambriens à niveaux

La correspondance Cambrienne = permutations signées \mapsto arbres Cambriens à niveaux.

Ex : permutation signée $\underline{2}\bar{7}\underline{5}\underline{1}\bar{3}\underline{4}\bar{6}$

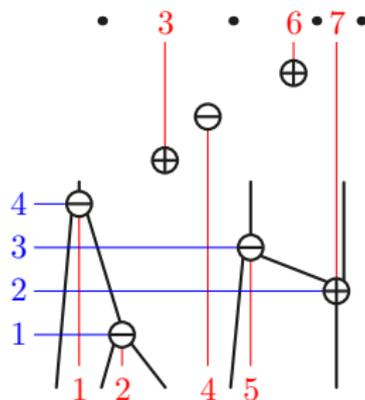


Reading. Cambrian lattices. 2006
Lange-Pilaud. Associahedra via spines. 2015

Permutations signées vers les arbres Cambriens à niveaux

La correspondance Cambrienne = permutations signées \mapsto arbres Cambriens à niveaux.

Ex : permutation signée $\underline{2}\bar{7}\underline{5}\underline{1}\bar{3}\underline{4}\bar{6}$

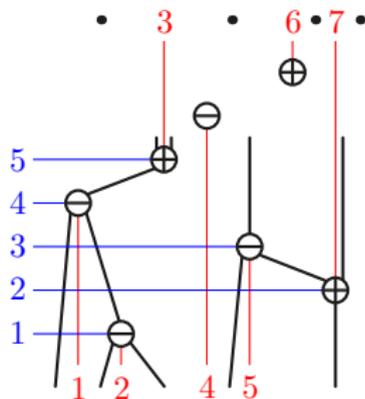


Reading. Cambrian lattices. 2006
Lange-Pilaud. Associahedra via spines. 2015

Permutations signées vers les arbres Cambriens à niveaux

La correspondance Cambrienne = permutations signées \mapsto arbres Cambriens à niveaux.

Ex : permutation signée $\underline{2}\bar{7}\underline{5}\underline{1}\bar{3}\underline{4}\bar{6}$

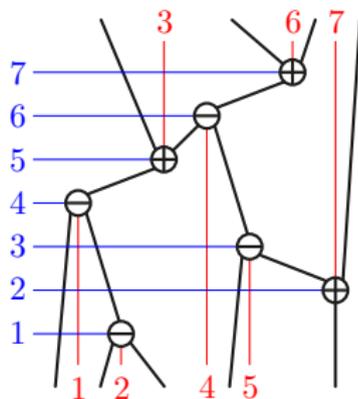


Reading. Cambrian lattices. 2006
Lange-Pilaud. Associahedra via spines. 2015

Permutations signées vers les arbres Cambriens à niveaux

La correspondance Cambrienne = permutations signées \mapsto arbres Cambriens à niveaux.

Ex : permutation signée $\underline{2}\overline{7}5\underline{1}\overline{3}4\overline{6}$

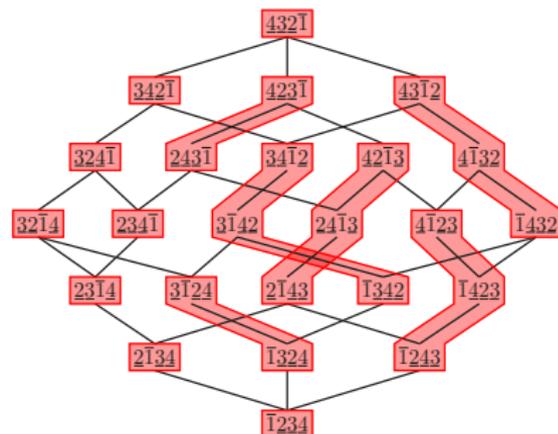
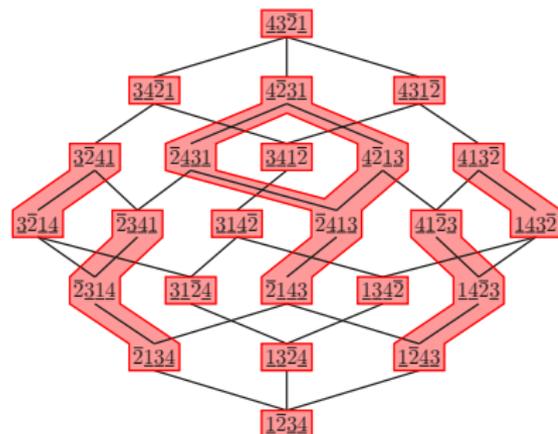


$\mathbf{P}(\tau)$ = **P**-symbole de τ := arbre Cambrien produit par cette correspondance

$\mathbf{Q}(\tau)$ = **Q**-symbole de τ = arbre décroissant produit par cette correspondance.

Proposition [Reading 2006]

\mathbf{P} est un homomorphisme de treillis de l'ordre faible sur les permutations vers le treillis Cambrien.



Généralisation signée du mélange décalé :

$$\underline{1\bar{2}} \sqcup \underline{\bar{2}1} = \underline{1\bar{2}} \sqcup \underline{\bar{4}3} = \underline{1\bar{2}\bar{4}3} + \underline{1\bar{4}\bar{2}3} + \underline{1\bar{4}3\bar{2}} + \underline{\bar{4}1\bar{2}3} + \underline{\bar{4}13\bar{2}} + \underline{\bar{4}31\bar{2}}$$

Généralisation signée de la standardisation :

$$\text{std}(\underline{1\bar{3}\bar{4}\bar{2}9\underline{2}\bar{1}\underline{3}\bar{1}}) = \underline{1\bar{6}\bar{8}\bar{4}\bar{9}\bar{5}\bar{2}\bar{7}\bar{3}}$$

Analogie signée de l'algèbre de Malvenuto-Reutenauer [Novelli, Thibon 2010]

FQSym $_{\pm}$ = Algèbre de Hopf avec une base $(\mathbb{F}_{\tau})_{\tau \in \mathfrak{S}_{\pm}}$ telle que

$$\mathbb{F}_{\sigma} \cdot \mathbb{F}_{\tau} = \sum_{\gamma \in \sigma \sqcup \tau} \mathbb{F}_{\gamma} \quad \text{et} \quad \Delta(\mathbb{F}_{\gamma}) = \sum_{\substack{\gamma = u \cdot v, \\ \sigma = \text{std}(u), \\ \tau = \text{std}(v)}} \mathbb{F}_{\sigma} \otimes \mathbb{F}_{\tau}$$

L'algèbre Cambrienne comme sous-algèbre de FQSym_\pm

L'algèbre Cambrienne := sous-espace Camb de FQSym_\pm engendré par

$$\mathbb{P}_T := \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_\pm \\ \mathbf{P}(\tau) = T}} \mathbb{F}_\tau$$

pour tout arbre Cambrien T .


$$\begin{aligned} \mathbb{P}_T = & \mathbb{F}_{\underline{2137546}} + \mathbb{F}_{\underline{2173546}} + \mathbb{F}_{\underline{2175346}} + \mathbb{F}_{\underline{2713546}} + \mathbb{F}_{\underline{2715346}} \\ & + \mathbb{F}_{\underline{2751346}} + \mathbb{F}_{\underline{7213546}} + \mathbb{F}_{\underline{7215346}} + \mathbb{F}_{\underline{7251346}} + \mathbb{F}_{\underline{7521346}} \end{aligned}$$

Théorème [C., Pilaud 2015]

Camb est une sous-algèbre de Hopf de FQSym_\pm .

Produit dans l'algèbre Cambrienne

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} &= \mathbb{F}_{\underline{12}} \cdot (\mathbb{F}_{\underline{213}} + \mathbb{F}_{\underline{231}}) \\
 &= \left(\begin{array}{l} \mathbb{F}_{\underline{12435}} + \mathbb{F}_{\underline{12453}} + \mathbb{F}_{\underline{14235}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{14253}} + \mathbb{F}_{\underline{14523}} + \mathbb{F}_{\underline{41235}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{41253}} + \mathbb{F}_{\underline{41523}} + \mathbb{F}_{\underline{45123}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathbb{F}_{\underline{14325}} + \mathbb{F}_{\underline{14352}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{14532}} + \mathbb{F}_{\underline{41325}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{41352}} + \mathbb{F}_{\underline{41532}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{45132}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathbb{F}_{\underline{43125}} + \mathbb{F}_{\underline{43152}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{43512}} + \mathbb{F}_{\underline{45312}} \end{array} \right) \\
 &= \mathbb{P} + \mathbb{P} + \mathbb{P}
 \end{aligned}$$

Produit dans l'algèbre Cambrienne

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} &= \mathbb{F}_{\underline{12}} \cdot (\mathbb{F}_{\underline{213}} + \mathbb{F}_{\underline{231}}) \\
 &= \left(\begin{array}{l} \mathbb{F}_{\underline{12435}} + \mathbb{F}_{\underline{12453}} + \mathbb{F}_{\underline{14235}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{14253}} + \mathbb{F}_{\underline{14523}} + \mathbb{F}_{\underline{41235}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{41253}} + \mathbb{F}_{\underline{41523}} + \mathbb{F}_{\underline{45123}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathbb{F}_{\underline{14325}} + \mathbb{F}_{\underline{14352}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{14532}} + \mathbb{F}_{\underline{41325}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{41352}} + \mathbb{F}_{\underline{41532}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{45132}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathbb{F}_{\underline{43125}} + \mathbb{F}_{\underline{43152}} \\ + \mathbb{F}_{\underline{43512}} + \mathbb{F}_{\underline{45312}} \end{array} \right) \\
 &= \mathbb{P} + \mathbb{P} + \mathbb{P}
 \end{aligned}$$

Proposition [C.-Pilaud]

Pour tous arbres Cambriens T et T' ,

$$\mathbb{P}_T \cdot \mathbb{P}_{T'} = \sum_{\substack{T \nearrow \bar{T}' \\ \leq_{\text{Camb}} S \leq_{\text{Camb}} T \nwarrow \bar{T}'}} \mathbb{P}_S$$

Produit dans l'algèbre Cambrienne

Proposition [C.-Pilaud]

Pour tous arbres Cambriens T et T' ,

$$\mathbb{P}_T \cdot \mathbb{P}_{T'} = \sum_{\substack{T \nearrow \overline{T'} \\ \leq_{\text{Camb}} S \leq_{\text{Camb}} T \nwarrow \overline{T'}}} \mathbb{P}_S$$

- Pour tout arbre Cambrien T , $\mathbf{P}^{-1}(T)$ est un intervalle de l'ordre faible.

Proposition [C.-Pilaud]

Pour tous arbres Cambriens T et T' ,

$$\mathbb{P}_T \cdot \mathbb{P}_{T'} = \sum_{\substack{T \nearrow \overline{T'} \\ \leq_{\text{Camb}} S \leq_{\text{Camb}} T \nwarrow \overline{T'}} \mathbb{P}_S$$

- Pour tout arbre Cambrien T , $\mathbf{P}^{-1}(T)$ est un intervalle de l'ordre faible.
- $[\sigma, \tau] \sqcup [\sigma', \tau'] = [\sigma\overline{\sigma'}, \overline{\tau'}\tau]$.

Proposition [C.-Pilaud]

Pour tous arbres Cambriens T et T' ,

$$\mathbb{P}_T \cdot \mathbb{P}_{T'} = \sum_{\substack{T \nearrow \overline{T'} \\ \leq_{\text{Camb}} S \leq_{\text{Camb}} T \nwarrow \overline{T'}} \mathbb{P}_S$$

- Pour tout arbre Cambrien T , $\mathbf{P}^{-1}(T)$ est un intervalle de l'ordre faible.
- $[\sigma, \tau] \sqcup [\sigma', \tau'] = [\sigma\overline{\sigma'}, \overline{\tau'}\tau]$.
- $\mathbf{P}^{-1}(T) = [\sigma, \tau]$, $\mathbf{P}^{-1}(T') = [\sigma', \tau']$

$$\mathbf{P}(\sigma\overline{\sigma'}) = \begin{array}{c} \nearrow \overline{\sigma'} \\ T \end{array} \quad \mathbf{P}(\overline{\tau'}\tau) = \begin{array}{c} T \nwarrow \\ \overline{\tau'} \end{array}$$

Proposition [C.-Pilaud]

Pour tous arbres Cambriens T et T' ,

$$\mathbb{P}_T \cdot \mathbb{P}_{T'} = \sum_{\substack{T \nearrow \overline{T'} \\ \leq_{\text{Camb}} S \leq_{\text{Camb}} T \nwarrow \overline{T'}} \mathbb{P}_S$$

- Pour tout arbre Cambrien T , $\mathbf{P}^{-1}(T)$ est un intervalle de l'ordre faible.
- $[\sigma, \tau] \sqcup [\sigma', \tau'] = [\sigma\overline{\sigma'}, \overline{\tau'}\tau]$.
- $\mathbf{P}^{-1}(T) = [\sigma, \tau], \mathbf{P}^{-1}(T') = [\sigma', \tau']$

$$\mathbf{P}(\sigma\overline{\sigma'}) = \begin{array}{c} \nearrow \overline{\tau'} \\ T \end{array} \quad \mathbf{P}(\overline{\tau'}\tau) = \begin{array}{c} T \\ \nwarrow \overline{\tau'} \end{array}$$

- Les permutations de $[\sigma\overline{\sigma'}, \overline{\tau'}\tau]$ forment une union de classes Cambriennes car Camb est une sous-algèbre de FQSym_{\pm} .

Proposition [C.-Pilaud]

Pour tous arbres Cambriens T et T' ,

$$\mathbb{P}_T \cdot \mathbb{P}_{T'} = \sum_{\substack{T \nearrow \overline{T'} \\ \leq_{\text{Camb}} S \leq_{\text{Camb}} T \nwarrow \overline{T'}}} \mathbb{P}_S$$

- Pour tout arbre Cambrien T , $\mathbf{P}^{-1}(T)$ est un intervalle de l'ordre faible.
- $[\sigma, \tau] \sqcup [\sigma', \tau'] = [\sigma\overline{\sigma'}, \overline{\tau'}\tau]$.
- $\mathbf{P}^{-1}(T) = [\sigma, \tau]$, $\mathbf{P}^{-1}(T') = [\sigma', \tau']$

$$\mathbf{P}(\sigma\overline{\sigma'}) = \begin{array}{c} \nearrow \overline{\tau'} \\ T \end{array} \quad \mathbf{P}(\overline{\tau'}\tau) = \begin{array}{c} T \\ \nwarrow \overline{\tau'} \end{array}$$

- Les permutations de $[\sigma\overline{\sigma'}, \overline{\tau'}\tau]$ forment une union de classes Cambriennes car Camb est une sous-algèbre de FQSym_{\pm} .
- Ces arbres forment un intervalle du treillis Cambrien car \mathbf{P} est un homomorphisme de treillis.

Coproduit dans l'algèbre Cambrienne

$$\begin{aligned}
 \Delta^{\mathbb{P}} \text{ (diagram)} &= \Delta(F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) \\
 &= 1 \otimes (F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) + F_{\underline{1}} \otimes F_{\underline{12}} + F_{\underline{1}} \otimes F_{\underline{21}} + F_{\underline{21}} \otimes F_{\underline{1}} + F_{\underline{12}} \otimes F_{\underline{1}} + (F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} \otimes (\text{ (diagram)} \cdot \text{ (diagram)}) + \text{ (diagram)} \otimes \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} \otimes \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} \otimes \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} \otimes 1.
 \end{aligned}$$

Coproduct dans l'algèbre Cambrienne

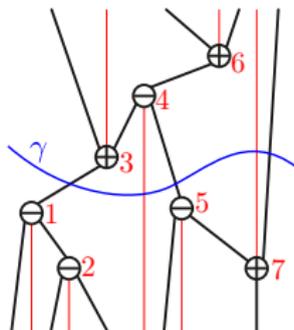
$$\begin{aligned}
 \Delta^{\mathbb{P}} &= \Delta(F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) \\
 &= 1 \otimes (F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) + F_{\bar{1}} \otimes F_{\underline{12}} + F_{\bar{1}} \otimes F_{\underline{21}} + F_{\underline{21}} \otimes F_{\bar{1}} + F_{\underline{12}} \otimes F_{\bar{1}} + (F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes (\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}) + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes 1.
 \end{aligned}$$

Proposition [C.-Pilaud]

Pour tout arbre Cambrien S ,

$$\Delta \mathbb{P}_S = \sum_{\gamma} \left(\prod_{T \in B(S, \gamma)} \mathbb{P}_T \right) \otimes \left(\prod_{T' \in A(S, \gamma)} \mathbb{P}_{T'} \right)$$

où γ parcourt toutes les coupes de S , et $A(S, \gamma)$ et $B(S, \gamma)$ sont les forêts Cambriennes respectivement au-dessus et en dessous de γ .



Coproduct dans l'algèbre Cambrienne

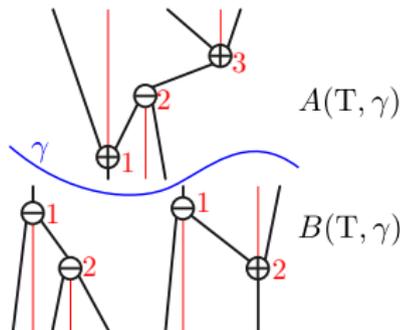
$$\begin{aligned}
 \Delta^{\mathbb{P}} &= \Delta(F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) \\
 &= 1 \otimes (F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) + F_{\underline{1}} \otimes F_{\underline{12}} + F_{\underline{1}} \otimes F_{\underline{21}} + F_{\underline{21}} \otimes F_{\underline{1}} + F_{\underline{12}} \otimes F_{\underline{1}} + (F_{\underline{213}} + F_{\underline{231}}) \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes (\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}) + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} + \mathbb{P} \otimes 1.
 \end{aligned}$$

Proposition [C.-Pilaud]

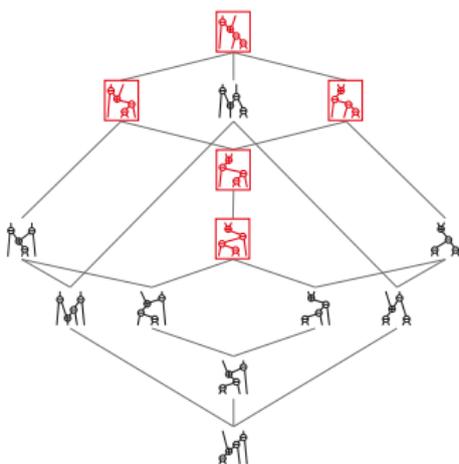
Pour tout arbre Cambrien S ,

$$\Delta \mathbb{P}_S = \sum_{\gamma} \left(\prod_{T \in B(S, \gamma)} \mathbb{P}_T \right) \otimes \left(\prod_{T' \in A(S, \gamma)} \mathbb{P}_{T'} \right)$$

où γ parcourt toutes les coupes de S , et $A(S, \gamma)$ et $B(S, \gamma)$ sont les forêts Cambriennes respectivement au-dessus et en dessous de γ .



- Étude des bases multiplicatives.



Résultats supplémentaires

- Étude des bases multiplicatives.
- Algèbre de Hopf sur les arbres Cambriens jumeaux (nombres de Baxter).
- Algèbre de Hopf sur les arbres Schröder-Cambriens (nombres de Schröder).

