Identité du groupe du Tas de Sable sur des grilles rectangulaires

Yvan Le Borgne
Labri, Université Bordeaux 1
Dominique Rossin
LIX, École polytechnique

Abstract

In 1991, Dhar [6],[7] proves that the recurrent configurations of the sandpile automaton form an abelian group for the addition operator $\oplus$. In this article we study the identity element of this group for the sandpile automaton on rectangular grids of size $p \times q$. We prove that for $q \geq p(2+3\sqrt{2})/2$, this identity is made of 3 parts ($x < \frac{p(2+3\sqrt{2})}{4}, \frac{p(2+3\sqrt{2})}{4} < x < p - \frac{p(2+3\sqrt{2})}{4}$, $x > p - \frac{p(2+3\sqrt{2})}{4}$.) Extremal parts are symmetric whereas the central one has 2 grains of sand on every vertex. We give a new method to compute the identity element of the group. This method is twice as fast experimentally as the other known methods.

Résumé

En 1991, Dhar [6],[7] montre que l'on peut munir les états récurrents de l'automate cellulaire du Tas de Sable d'une structure de groupe abélien fini. Le but de cet article est d'étudier la structure de l'identité de ce groupe dans le cas où l'automate est défini sur une grille rectangulaire de taille $p \times q$. Dans cet article, nous montrons que pour $q \geq p(2+3\sqrt{2})/2$ alors il existe une bande 2-uniforme de taille $p \times (q - 2\frac{p(2+3\sqrt{2})}{4})$ au centre de la configuration. Enfin, nous donnons une nouvelle méthode pour calculer l'identité du groupe. Cette méthode se révèle expérimentalement 2 fois plus rapide que les autres méthodes connues.

1 L'automate cellulaire du Tas de Sable

Dans cette partie, nous définissons de manière formelle le modèle du Tas de Sable et nous énonçons les principaux résultats algébriques connus.

Cet automate introduit par Bak, Tang et Wiesenfeld [2] se comporte de manière semblable à différents phénomènes physiques. [1],[3],[8].

L'automate cellulaire est défini dans cet article sur une grille finie ou infinie mais la généralisation à un graphe quelconque de ces définitions est triviale.

1.1 Description

Soit une grille à maille carrée dont les cellules sont repérées par un couple $(x, y) \in [-n..n]^2$. Chaque cellule (i, j) est reliée à quatre cellules $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$.

Une configuration $u = (u_{-n,-n}, u_{-n,-n+1}, \cdots, u_{n,n}) \in \mathbb{Z}^{(2n+1)^2}$ est l'assignation de la valeur $u_{i,j}$ au sommet (i, j). Une configuration est dite *positive* si $u_{i,j} \geq 0$ pour tout $(i, j) \in \{1 \cdots n\}^2$.

Dans le cas du modèle du Tas de Sable, les sommets du graphe représentent les cellules de l'automate et le nombre $u_{i,j}$ représente la hauteur de la pile de sable sur le sommet (i, j).

Dans la suite de l'article on supposera qu'un sommet ou un ensemble de sommets est distingué : Dans le cas de la grille, on crée un sommet supplémentaire ρ qui sera le puits. Les cellules du bord $(i, j = \pm n)$ sont reliées par une arête au puits tandis que les 4 coins de la grille sont reliés par deux arêtes au sommet ρ.

On dira que deux configurations sont égales si le nombre de grains sur chaque sommet est identique sauf éventuellement pour le puits.

Ainsi les configurations pouvant être additionnées ou soustraites, l'espace des configurations est isomorphe à $\mathbb{Z}^{(2n+1)^2}$.

La règle de transition de l'automate est la suivante : Si un sommet (i, j) possède 4 grains de sable au moins, alors ce sommet s'éboule, perdant 4 grains de sable et donne 1 grains à chacun de ses quatre voisins. Le puits, par contre, peut recevoir des grains mais ne peut jamais en donner. Cette règle équivaut à l'addition de la configuration $(\Delta_{i,j})$ à la configuration u, où $(\Delta_{i,j})_{i,j} = -4$ et $(\Delta_{i,j})_{k,l} = 1$ où (k,l) est un voisin de (i,j). Nous noterons $u \longrightarrow v$ s'il existe (i,j) tel que $v = u + \Delta_{i,j}$.

La clôture transitive de $\longrightarrow$ est noté $\stackrel{*}{\longrightarrow}$. Ainsi on dira que $u \stackrel{*}{\longrightarrow} v$ si on peut passer de u à v par une suite d'éboulements.

La clôture symétrique de $\stackrel{*}{\longrightarrow}$sera notée $\equiv$. Ainsi $u \equiv v$ si et seulement s'il existe une suite de configurations $w_1 = u, \cdots, w_k = v$ telle que pour tout i de $\{1, \cdots, k-1\}$ on ait soit $w_i \longrightarrow w_{i+1}$ soit $w_{i+1} \longrightarrow w_i$.

Grâce à la connexité du graphe et l'interdiction d'ébouler le puits, on peut montrer que si u est une configuration positive alors il existe une série d'éboulements partant de u et conduisant à une configuration *stable* où tous les sommets ont un nombre de grains strictement inférieur à 4. De plus la configuration stable obtenue ne dépend pas de l'ordre choisi pour réaliser les éboulements.

Nous noterons par $\hat{u}$ la configuration stable obtenue après éboulement de la configuration u.

1.2 Configurations récurrentes

Le concept de configuration récurrente est important dans ce modèle, car ce sont ces configurations qui interviennent lors de l'étude des différents phénomènes critiques.

Une configuration est dite *récurrente* si elle apparaıt un nombre infini de fois lors de l'évolution d'un système. Cette évolution nous est donnée ici par une chaine de Markov. Soit u une configuration positive stable. On répète les étapes suivantes :

1. On choisit un sommet (i, j) du graphe aléatoirement
2. On ajoute 1 sur le sommet (i, j) dans la configuration u
3. On éboule la nouvelle configuration pour obtenir une nouvelle configuration stable u'

On obtient ainsi une suite de configurations stables. Dans ces configurations, certaines apparaissent un nombre fini de fois, on les appellera configurations *transcientes*, d'autres un nombre infini de fois, elles seront dites *récurrentes*.

Cette relation peut se traduire d'une manière plus intrinsèque aux configurations.

Définition 1. *Une configuration u est dite récurrente si elle est positive, stable et s'il existe une configuration positive $v \neq 0$ telle que $u + v \stackrel{*}{\longrightarrow} u$.*

On définit l'opérateur $\oplus$ sur les configurations positives de la manière suivante :

Définition 2. *Soient u et v deux configurations positives. On notera $u \oplus v$ la configuration w telle que $w = \widehat{u+v}$.*

Proposition 1. *([7]) L'ensemble des configurations récurrentes muni de l'opérateur $\oplus$ forme un groupe abélien fini.*

Une autre manière de voir les configurations récurrentes est de considérer la clôture symétrique $\equiv$. En effet, si l'on considère les classes d'équivalence de cette clôture alors on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 2. *[4] Dans chaque classe d'équivalence il existe une et une seule configuration récurrente.*

De plus les classes d'équivalence peuvent être vues comme le quotient

$$\mathbb{Z}^{(2n+1)^2}/\{\Delta_{1,1}, \cdots, \Delta_{2n+1,2n+1}\}$$

2 Éboulement d'une pile de sable sur une grille uniforme

Dans cette partie, nous travaillons sur une grille infinie dont chaque case sera numérotée par $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ où i est l'abscisse et j l'ordonnée de la case. Il n'y a donc pas de puits dans cet automate.

Par raison de symétrie, nous travaillerons la plupart du temps sur un huitième de plan Π défini par les cellules (i,j), $i \geq 0$, $j \geq 0$, $i \geq j$.

Nous étudions dans cette section la chute d'une pile de n grains sur la case $(0,0)$ d'une grille infinie uniforme remplie de 0. Remarquons tout d'abord que l'éboulement d'une telle pile est fini.

Nous utilisons l'algorithme parallèle d'éboulement à savoir qu'à chaque étape t on éboule tous les sommets instables en parallèle le nombre maximal de fois : Par exemple si un sommet possède 9 grains de sable, alors on l'éboule 2 fois donnant 2 grains à chacun de ses voisins et gardant 1 grain.

2.1 Étude de la forme du champ d'éboulement

$u_{i,j}(t)$ est le nombre de grains sur la cellule (i,j) à l'instant t.

Nous noterons $n_{i,j}(t)$ le nombre de grains de sable tombés dans la cellule (i,j) à l'instant t et par $c_{i,j}(t)$ le nombre de grains de sable qui sont tombés dans la cellule (i,j) entre l'instant 0 et l'instant t. Par raison de symétrie, les suites sont définies sur les cellules de Π.

Remarque 1.

$$c_{i,j}(t) = \sum_{\tau=0}^{t} n_{i,j}(\tau) \tag{1}$$

$$c_{i,j}(t+1) = \lfloor \frac{c_{i+1,j}(t)}{4} \rfloor + \lfloor \frac{c_{i-1,j}(t)}{4} \rfloor + \lfloor \frac{c_{i,j+1}(t)}{4} \rfloor + \lfloor \frac{c_{i,j-1}(t)}{4} \rfloor \tag{2}$$

$$n_{i,j}(t) = \lfloor \frac{u_{i+1,j}(t)}{4} \rfloor + \lfloor \frac{u_{i-1,j}(t)}{4} \rfloor + \lfloor \frac{u_{i,j+1}(t)}{4} \rfloor + \lfloor \frac{u_{i,j-1}(t)}{4} \rfloor \tag{3}$$

$$u_{i,j}(t+1) = u_{i,j}(t) - 4\lfloor \frac{u_{i,j}(t)}{4} \rfloor + \sum_{v \text{ voisin de } (i,j)} \lfloor \frac{u_v(t)}{4} \rfloor \tag{4}$$

Théorème 1. *Pour tout t, l, m les suites $(c_{l,2i+m})_{i\in\mathbb{N}}$,$(c_{2i+m,l})_{i\in\mathbb{N}}$,$(c_{l+i,l-i})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(c_{l+i,i})_{i\in\mathbb{N}}$ restreintes à Π sont décroissantes.*

Démonstration. Le résultat est vrai pour $t = 1$. Supposons maintenant qu'il est vrai pour $t \leq t_0$.

La première partie de la démonstration consiste à regarder le cas des deux dernières suites.

Soient deux cellules voisines a et b correspondant à des termes consécutifs dans une des suites - par exemple $(l+i, l-i)$ et $(l+i+1, l-i-1)$. Pour $t = t_0$, on a $c_{l+i,l-i}(t_0) \geq c_{l+i+1,l-i-1}(t_0)$. Pour montrer cette relation pour t_0+1 on met en correspondance par une bijection ϕ les voisins de la première cellule avec ceux de la deuxième cellule de sorte que

$$c_v(t_0) \geq c_{\phi(v)}(t_0) \tag{5}$$

pour tout v voisin de la cellule a.

Dans le cas de la suite $c_{l+i,l-i}$ la bijection ϕ est définie par :

$$\phi(x, y) = (x+1, y-1)$$

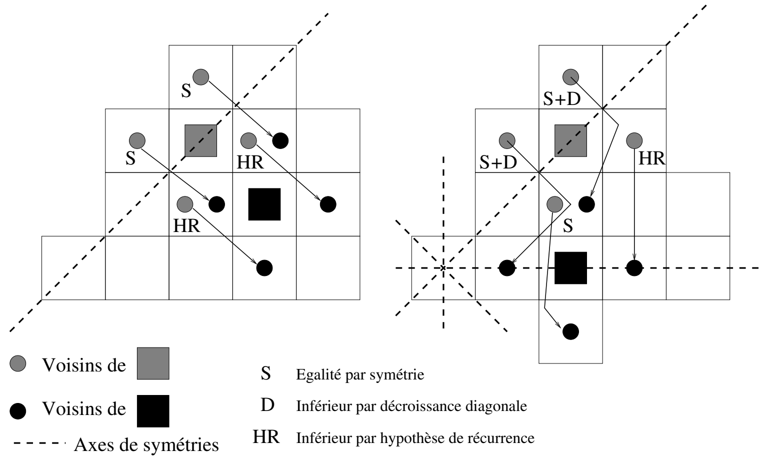
pour les cellules (x, y) strictement à l'intérieur de Π.

Pour les cellules situées au bord de Π il faut tenir compte des symétries du problème comme décrit sur la figure ci-dessous.

Ainsi, par l'égalité (2) et l'inégalité (5), on déduit l'inégalité pour t_0+1.

La figure suivante décrit certains cas particuliers de la bijection ϕ.

Dans ces figures, les flèches indiquent les images par la fonction ϕ, leur étiquetage la raison de la décroissance ou de l'égalité des suites. Une flèche étiquetée par S indique que les cellules correspondantes ont la même valeur de c par symétrie du problème. L'étiquette HR ou D indique que l'on a décroissance par l'hypothèse de récurrence du théorème 1 à l'instant t.



Notons que pour les suites horizontales et verticales, nous avons montré la décroissance pour des cases éloignées de 2. En effet, si l'on considère plutôt des cases adjacentes alors il n'existe pas de fontion ϕ vérifiant les propriétés requises. Néanmoins il apparait expérimentalement que le théorème est vrai pour les suites $(c_{l,i})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(c_{i,l})_{i\in\mathbb{N}}$.

$\square$

2.2 Rayon d'éboulement sur une grille vide

Soit une grille infinie et une configuration u telle que $u_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \neq (0,0)$ et $u_{0,0} = n$. On définit le support de l'éboulement par

$$S_n = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2, \exists t \in \mathbb{N}, n_{i,j}(t) > 0\}$$

Nous allons ici borner ce support à l'intérieur de deux boules centrées à l'origine. Nous définissons ainsi :

$$I_r = \{(x,y), |x| + |y| \leq r\}$$

$$B_r = \{(x,,y), |x| \leq r, |y| \leq r\}$$

Remarquons que I_r est la boule de rayon r pour la distance de Manhattan et B_r la boule de rayon r pour la norme infinie.

Théorème 2. *Il existe r_0 fini tel que :*

$$I_{r_0-1} \subseteq S_n \subseteq B_{r_0}$$

On appelera r_0 le rayon d'éboulement de cette configuration.

Démonstration. On appellera cellule *active* une cellule qui s'est éboulée pendant la relaxation de la pile de n grains.

Lemme 1. *Si $(i,j) \in \Pi$ est active alors $(i-1,j)$ est active.*

Démonstration. Si (i,j) active alors par le théorème 1 $(i-2,j)$ est active. Par suite $(i-1,j+1)$ est active. Enfin, $(i-1,j-1)$ est donc active.

Par conséquence comme les 4 voisins de la cellule $(i-1,j)$ sont actifs cette cellule est aussi active. □

Soit r_0 la distance maximale (pour la norme infinie) des cellules actives au centre de la grille.

Par définition de r_0 l'inclusion $S_n \subseteq B(0,r_0)$ est évidente.

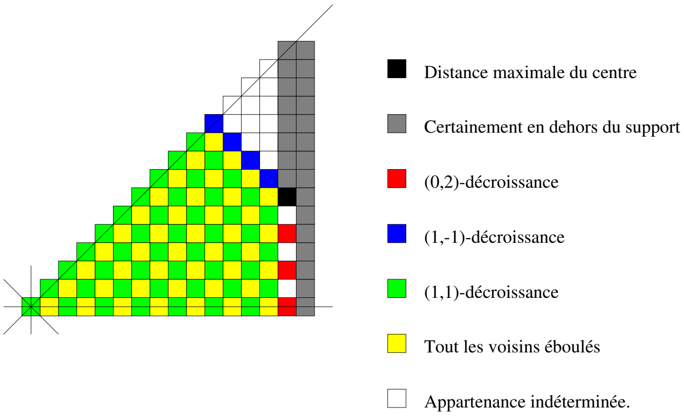
Comme l'éboulement de cette configuration est fini, on note (i,j) une cellule active à distance maximale r_0 de l'origine. Par symétrie on suppose que cette cellule est située dans Π.

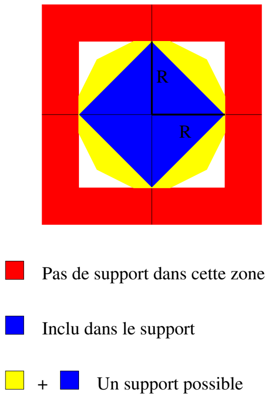
Par le théorème 1, toutes les cellules $(i',j') \in \Pi$ avec $i'+j' = i+j$ sont aussi actives. Par le lemme 1 on déduit que les cellules $(i',j') \in \Pi$ avec $i' < i$ et $i'+j'+1 = i+j$ sont actives.

Par $(0,-2)$ croissance et $(-1,-1)$ croissance on déduit que toutes les cellules $(i',j') \in \Pi$ avec $i' < i$ et $i'+j' \leq i+j$ sont actives.

Par symétrie du problème on déduit que toutes les cellules situées dans un octogone sont actives donc à fortiori celles de I_{r_0-1}.

La figure ci-dessous montre les encadrements précédents.





□

Muni de cet encadrement nous pouvons maintenant trouver une majoration du rayon d'éboulement r_0. Pour cela nous admettrons le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit une configuration u. Soit S l'ensemble des cellules actives lors du calcul de l'éboulement de la configuration u en $\hat{u}$.*

Alors la configuration $\hat{u}$ restreinte aux cellules de S est récurrente.

Ainsi, la configuration restreinte à I_r est récurrente. Or le nombre minimal de grains de sable sur une configuration récurrente est au moins égal au nombre d'arêtes internes du graphe. Or, dans I_r, il y a $2r(r-1)$ sommets internes donc $4r(r-1)$ arêtes internes. Donc on a $4r(r-1) \leq n$, le nombre de grains de sable initialement sur la grille, d'où la proposition suivante :

Proposition 3. *Le rayon d'éboulement sur une grille 0-uniforme satisfait :*

$$r_0 \leq \sqrt{n}/2$$

2.3 Extension aux cas des grilles 1 et 2-uniformes

Le résultat précédent peut s'étendre assez facilement au cas de la grille 1 ou 2-uniforme. On obtient les majorations suivantes :

Théorème 3.

$$r_0 \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

$$r_1 \leq \frac{3}{4}\sqrt{n}$$

$$r_2 \leq \frac{3}{2}\sqrt{n}$$

Remarque 2. *Expérimentalement on obtient les approximations suivantes :*

$$r_0 \approx 0.383\sqrt{n}$$

$$r_1 \approx 0.484\sqrt{n}$$

$$r_2 \approx 0.800\sqrt{n}$$

Démonstration. Considérons par exemple le cas d'une grille 1-uniforme avec une pile de n grains située en $(0,0)$. Pour calculer la configuration stable obtenue après éboulement, nous utiliserons l'algorithme suivant :

1. Ébouler la configuration formée d'une pile de $n-1$ grains sur une grille 0-uniforme.
2. Ajouter 1 grain sur toutes les cellules
3. ébouler cette nouvelle configuration

Le premier point de cet algorithme a été traité précédemment et conduit à une configuration stable dont le rayon est majoré par $\sqrt{n}/2$.

On peut majorer cette configuration stable par la configuration us suivante :

$$\begin{cases} us_{i,j} = 3 \text{ si } i \leq r_0 \text{ et } j \leq r_0 \\ us_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour cette démonstration nous allons coder une configuration u par la suite $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où

$$v_i = \max\{\{u_{x,y}, (x = \pm i \text{ et } |y| \leq i\} \tag{6}$$

$$\bigcup\{u_{x,y}, (y = \pm i \text{ et } |x| \leq i\}\} \tag{7}$$

Ainsi la configuration us peut être représentée par $\underbrace{333\cdots3}_{r_0}000\cdots$. Après la deuxième phase de l'algorithme on obtient la configuration $\underbrace{444\cdots4}_{r_0}111\cdots$. On peut démontrer très simplement les règles de réécriture suivantes :

- $41 \to 32$, $42 \to 33$
- $43\cdots32 \to 43\cdots33$
- $43\cdots31 \to 43\cdots32$

Ces règles sont une conséquence directe des règles d'éboulement du Tas de Sable et de la majoration de la valeur d'un sommet par une valeur plus élevée. Cette majoration intervient pour le cas des coins des carrés centrés en $(0,0)$.

Grâce à ces règles, on peut écrire le mot associé à us en $\underbrace{3\cdots3}_{3r_0/2}11\cdots$ démontrant ainsi la deuxième majoration. Le cas de la dernière majoration est identique au précédent si l'on ajoute quelques règles de réécriture.

□

3 Identité sur la grille rectangulaire

Dans cette partie, nous allons donner les différentes méthodes de calcul de l'identité puis nous en adapterons une pour donner une nouvelle caractérisation de cette configuration. Cette caractérisation se traduira par un nouvel algorithme rapide de calcul de l'identité.

3.1 Calcul direct de l'identité

Dhar montre que l'identité du groupe peut s'écrire comme une somme de trois configurations de la manière suivante :

Proposition 4.

$$Id = \delta \oplus \overline{\delta \oplus \delta}$$

où $\overline{u}$ *est la configuration* v *telle que* $v_i = 4 - 1 - u_i$.

3.2 Calcul par classe d'équivalence

Notons C_{Id} la classe de l'identité, celle-ci contient la configuration 0 ainsi que la configuration β tel que $\beta_{i,j}$ est le nombre d'arêtes reliant le sommet (i,j) au puits.

De proche en proche, on peut montrer que $k\beta \in C_{Id}$ avec k arbitrairement grand. On peut montrer qu'à partir d'un certain k, la configuration $\widehat{k\beta}$ est récurrente, stationnaire et dans C_{Id}. Ceci donne lieu à un algorithme de calcul de l'identité appelé algorithme de combustion.

3.3 Calcul sur une grille rectangulaire

Nous restreignons maintenant notre discussion au cas de la grille rectangulaire de taille $p \times q$. Nous prendrons $q \geq (p(2 + 3\sqrt{2})/2)$.

Nous allons montrer dans cette partie le théorème suivant :

Théorème 4. *L'identité sur une grille rectangulaire est égale par* $\hat{D}$ *où* D *est la configuration suivante :*

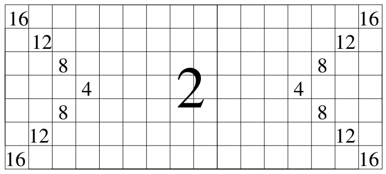


FIG. 1: Configuration D

Démonstration. Nous allons définir les configurations $D^{(i)}$ de la manière suivante :

- Sur un sommet à distance i du puits il y a 1 grain de sable.
- $D^{(i)}_{j,j} = 2$ si $j \leq i$
- $D^{(i)}_{n-j,j} = 2$ si $j \leq i$
- $D^{(i)}_{j,p-j} = 2$ si $j \leq i$
- $D^{(i)}_{n-j,p-j} = 2$ si $j \leq i$

Les premières valeurs de $D^{(i)}$ sont égales à :

2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1															1
1															1
1															1
1															1
1															1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

2															2
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	
	1													1	
	1													1	
	1													1	
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	
2															2

FIG. 2: Configrations $D^{(1)}$ et $D^{(2)}$

On remarque que $D^{(1)} = \beta$ donc $D^{(1)} \in C_{Id}$.

Proposition 5. *Les configurations $D^{(i)}$ sont équivalentes à l'identité.*

Démonstration. Supposons que la proposition soit vraie pour $D^{(1)}$,$D^{(2)}$,$\cdots$,$D^{(l)}$. Considérons maintenant la configuration $\lambda = D^{(1)} + D^{(l)}$ et forçons l'éboulement des sommets à distance plus petite ou égale à l. On obtient $D^{(l+1)}$. Comme $\lambda \in C_{Id}$ on a $D^{(l+1)} \in C_{Id}$. □

La fin de la preuve du théorème 4 découle du fait que

$$D = \sum_{i=1}^{p/2} 2D^{(i)}$$

□

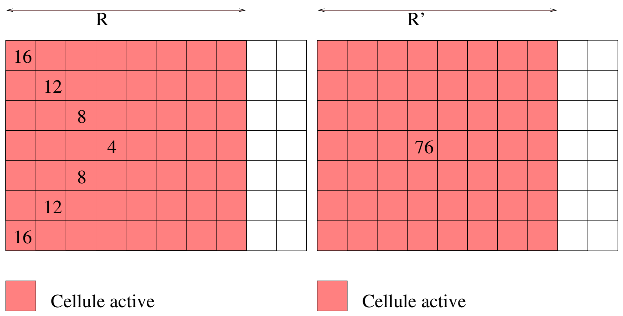
La configuration D est telle que $D_i \geq 2$ pour tout i. Or la configuration 2-uniforme est récurrente,il en est donc de même pour $\hat{D}$.

Pour démontrer l'existence d'une bande de cellule ayant pour valeur 2 au centre de l'identité nous allons montrer que l'éboulement des cellules instables de D ne se propage pas jusqu'au centre.

Restreignons notre discussion à une moitié de la grille ($p \times q/2$). Par symétrie, le résultat s'étend à l'ensemble de la grille.

Il est possible de traiter l'éboulement de ces sommets par le même mécanisme que l'éboulement d'une pile de grains sur une grille uniforme.

Une autre méthode consiste à considérer les deux rayons suivants :



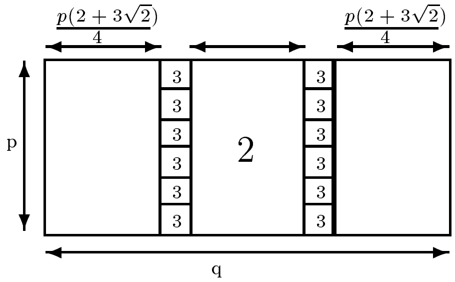
R est la distance à laquelle va s'ébouler la configuration D tandis que R' est la distance à laquelle va s'ébouler la configuration formée par une pile unique sur une grille 2-uniforme. La hauteur de cette pile est la même que la somme des valeurs de tous les sommets instables de D.

En conjecturant que $R' \geq R$, on peut utiliser les encadrements trouvés dans le théorème 3 pour majorer le rayon R.

Cette conjecture est basé sur des intuitions provenant du phénomène physique modélisé. Nous avons une preuve plus complète et rigoureuse qu'il serait trop long d'exposer ici.

La pile de grains ayant ici une hauteur de $p^2/2$, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 5. *L'identité sur une grille rectangulaire de côtés p par q ($q \geq \frac{p(2+3\sqrt{2})}{2}$) est formée de deux bords symétriques l'un de l'autre de taille $\frac{p(2+3\sqrt{2})}{4} \times p$ et d'une bande centrale 2-uniforme de taille $q - 2\frac{p(2+3\sqrt{2})}{4}$ bordée de deux colonnes formées de trois grains dans chaque case.*



Démonstration. Il reste à démontrer l'existence des deux colonnes de 3 à la bordure de la zone d'éboulement.

Notons A l'ensemble des cellules actives lors de l'éboulement de D. Soit une cellule extérieure à A. Cette cellule avait deux grains à l'origine dans la configuration D. Comme cette cellule ne s'est pas éboulée elle n'a pas perdu de grains pendant le calcul de $\hat{D}$.

Cette cellule a donc gagnée au maximum un grain de sable. Cela veut dire qu'au plus 1 voisin de cette cellule est actif.

Cela implique que la frontière des cellules actives est une ligne. Dans ce cas les cellules non actives voisines de la frontière ont gagné un grain donc en possèdent 3. □

4 Conclusion

Nous avons étudié ici l'éboulement d'une pile de sable de hauteur n dans le modèle en dimension 2. Ainsi, nous avons prouvé le fait que l'on obtient un support d'aire en $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ comme observé expérimentalement par D. Dhar [5].

De plus l'algorithme de calcul de l'identité du groupe que nous proposons semble plus performant que les algorithmes connus -par addition ou algorithme de combustion- comme l'attestent les résultats expérimentaux suivants.

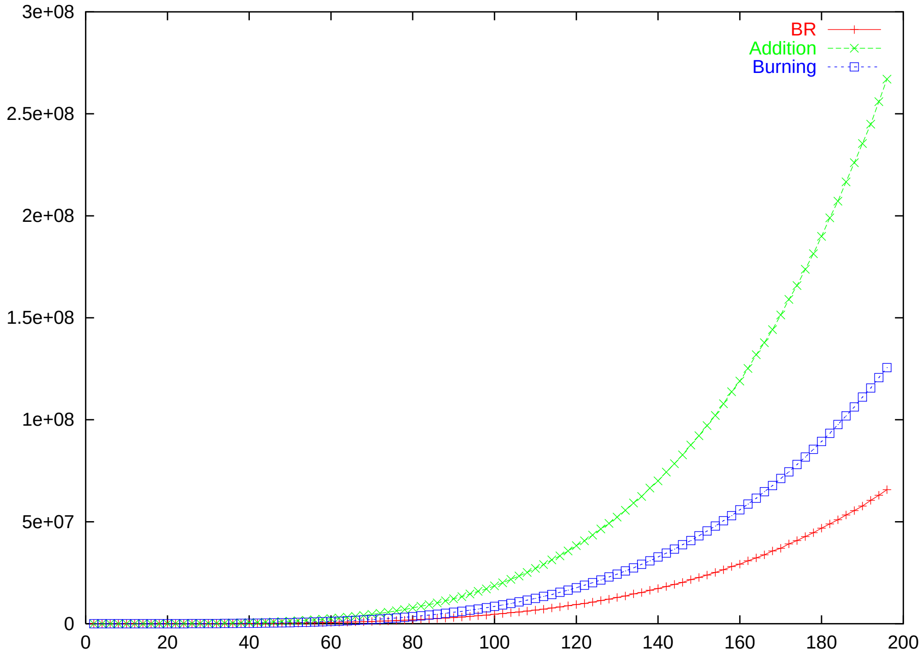
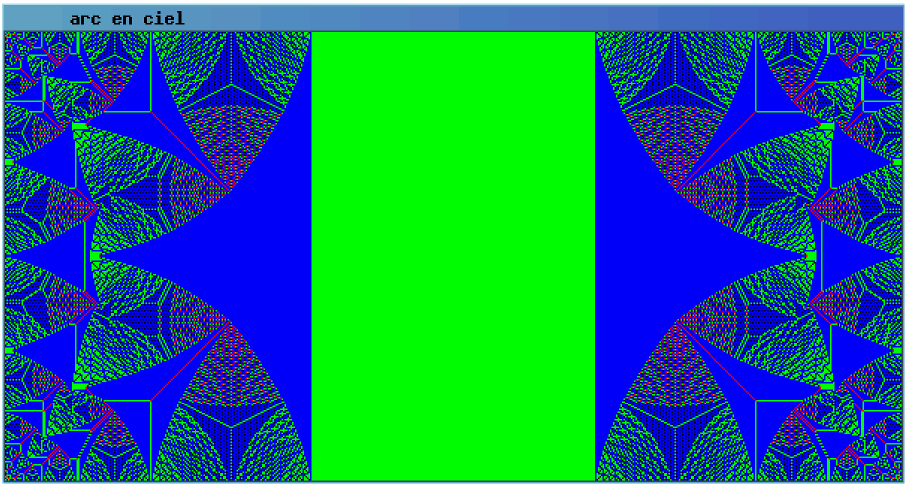


FIG. 3: Nombre d'éboulements dans le calcul de l'identité

L'algorithme nommé BR représente l'algorithme basé sur l'éboulement de la configuration D.

Enfin, nous avons pu caractériser la forme de la configuration identité pour une grille rectangulaire.

La forme de l'identité sur la grille carrée reste encore à ce jour une question ouverte.



Références

[1] P. Bak and K. Chen. The physics of fractals. *Physica D*, 38 :5–12, 1989.

[2] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality : An explanation of $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 59(4) :381–384, July 1987.

[3] K. Chen, P. Bak, and S.P. Obukhov. Self-organized criticality in a crack propagation model of earthquakes. *Phys. Rev. A*, 43 :625–30, 1991.

[4] R. Cori and D. Rossin. On the sandpile group of a graph. *to appear in European Journal of Combinatorics*, 2000.

[5] D. Dhar. Studying self organized criticality with exactly solved models. Cours donné à l'École Polytechnique de Lausanne. Disponible sur la page www de l'auteur.

[6] D. Dhar. Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Physical Review Letters*, 64(14) :1613–1616, 1990.

[7] D. Dhar, P. Ruelle, S. Sen, and D. Verma. Algebraic aspects of abelian sandpile models. *Journal of Physics A*, 28 :805–831, 1995.

[8] A. Sornette and D. Sornette. Self-organised criticality of earthquakes. *Europhys. Lett.*, 9 :197–202, 1989.