Numéro d'ordre : 101

UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

RAPPORT SCIENTIFIQUE

présenté par

Mireille BOUSQUET-MÉLOU

pour obtenir

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Thème : COMBINATOIRE ÉNUMÉRATIVE

Soutenance le 20 décembre 1996

Rapporteurs	Philippe Flajolet	Directeur de recherche à l'INRIA Rocquencourt
	Anthony J. Guttmann	Professeur à l'Université de Melbourne
	Doron Zeilberger	Professeur à l'Université de Temple, Philadelphie
Examinateurs	Philippe Cassou-Noguès	Professeur à l'Université Bordeaux I
	Dominique Gouyou-Beauchamps	Professeur à l'Université Paris Sud
	Xavier Viennot	Directeur de recherche au CNRS, Université Bordeaux I
	Alexandre Zvonkine	Professeur à l'Université Bordeaux I

Au mois de mai dernier était reconstituée au Panthéon l'expérience du pendule de Foucault. Peut-être s'y trouve-t-elle encore. Une page de l'Illustration, datée du 1$^{\text{er}}$ novembre 1902, relatait une reconstitution antérieure de la même expérience. S'y trouvaient également les vers suivants, en vérité assez alambiqués, mais qui devraient apporter une pierre historique à un débat contemporain : les sciences au féminin.

De Monsieur Lalande à Madame Hortense Lepaute (XVIII$^{\text{ième}}$ siècle)

De tables de sinus toujours environnée,
Vous suivez avec nous Hipparque et Ptolémée,
Mais ce serait trop peu que de suivre leurs traces
Et d'être au rang de ceux que nous comblons d'honneurs,
Reine, si vous n'étiez et le sinus des grâces,
Et la tangente de nos cœurs.

C'est-il point beau...

Lettre à tous ceux qui (y sont pour quelque chose)

Eh voilà ! Je vais soutenir mon habilitation, ça n'a jamais été aussi sûr. En cette fin d'année, veille de candidatures, je vois beaucoup de doctorants s'apprêter à soutenir leur thèse, et je me remémore bien sûr la mienne, au point d'ailleurs de commettre de temps à autre quelques lapsus rajeunissants. Comparer les deux événements m'amène à souhaiter de tout cœur à ces nouveaux docteurs de passer un jour une habilitation : non seulement parce que ce sera le signe certain qu'ils sont restés dans la "maison", et c'est là le vœu de beaucoup d'entre eux, ensuite parce que passer une habilitation, c'est (encore) bien plus agréable que passer une thèse.

La différence majeure, en dehors de l'épineuse question du recrutement, est qu'on connaît tout un peu mieux. À la fois son domaine, son entourage scientifique, et... son jury. J'ai eu le sentiment de m'offrir un petit luxe en réunissant un jury formé de gens que j'apprécie tous personnellement, alors qu'il est semble-t-il courant que les jurys de thèse comportent une part de semi-inconnus, d'autant plus impressionnants qu'on ne les connaît qu'à travers la renommée de leurs travaux.

Je voudrais donc remercier d'abord mes rapporteurs, en commençant par Philippe Flajolet. J'admire beaucoup le travail de son équipe à l'INRIA, et c'est grandement sa faute si mes visites là-bas font atteindre à ma "comprenette", sommée d'engranger soudainement trop d'informations toutes intéressantes, son point de saturation. Je le remercie particulièrement de l'attention qu'il a portée à ce document.

Tony Guttmann peut se considérer, à sa guise, comme un physicien, un mathématicien, ou un martien : il n'en est pas moins mon premier interlocuteur pour les questions reliées à la physique. Il guide mes lectures à l'intérieur d'un domaine dont les préoccupations, le fond, sont parfois proches de la combinatoire, mais les formes très différentes. Je le remercie de son assistance, et je suis très contente qu'il figure dans ce jury.

Doron Zeilberger a accepté d'être rapporteur. Pour moi, c'est Le Zeilberger, celui qui a tordu le cou aux matrices à signes alternants, fait prouver par son ordinateur, dans un claquement de doigts, des identités abominables farcies de coefficients binomiaux, tout en conduisant une réflexion originale sur ce que sont les math(ématique)s et sur la façon de les diffuser. Autant dire que je ne suis pas peu flattée de sa présence parmi les rapporteurs de cette habilitation.

Môssieu le Professeur Cassou-Noguès... hem, Philippe, donc, joue dans ce jury le rôle, légendairement ingrat, du "matheux de service", du moins aux yeux de ceux qui ignorent notre amitié ; pour les autres, sa présence ici n'est qu'une honteuse manifestation de copinage. Dans l'espoir d'atténuer ce genre de soupçons, je le remercie de son intérêt pour les séries génératrices, hélas concomitant de celui qu'il porte à la course à pied. Je trouverai bien ailleurs l'occasion de le féli-

citer de son goût pour les productions les plus avancées de la culture béarnaise : la garbure et le pyrénéisme.

Dominique Gouyou-Beauchamps connaît bien le sujet de mes travaux. À l'occasion d'un séjour à Montréal, j'ai eu le plaisir de travailler avec lui et je garde de ces moments un souvenir très agréable. Je le remercie de sa présence dans ce jury.

Xavier Viennot m'a fait faire mes premiers pas en combinatoire, m'arrachant aux sirènes des probabilités et autres statistiques. Après les hésitations initiales, dont je suis coutumière, je n'ai eu qu'à me féliciter de cette orientation. Elle est sans conteste le fruit de l'enthousiasme, de l'inventivité scientifique et des talents pédagogiques de Xavier Viennot, et je suis heureuse qu'il soit dans ce jury, assurant ainsi une certaine continuité avec ma thèse.

À propos de thèse... Sacha Zvonkin(e) m'a laissé miroiter qu'il me prendrait peut-être en thèse quand j'aurai passé mon habilitation, et je considère sa présence dans ce jury comme un signe encourageant. Sans plaisanter, ses travaux me paraissent tellement élégants et vivants que je me laisse parfois aller à envisager une tentative de (très relative) reconversion.

On a assez dit que la recherche de type mathématique était une activité de solitaire ; cela me paraît assez juste, du moins en ce qui concerne le travail "de base". Par réaction peut-être, je ne rêve qu'"échanges scientifiques" et autres "interactions", lesquels peuvent revêtir (au moins) deux aspects : la diffusion des résultats, et le travail en collaboration. À peu près deux minutes après avoir envisagé un sujet de recherche qui me plaît, je me surprends à imaginer, non seulement, bien sûr, que j'ai trouvé une solution, mais également le type de méthodes (élégantes, forcément élégantes) qui y conduisent, et surtout la façon dont je présenterai résultats et méthodes dans l'inévitable article qui suivra et les exposés qui l'accompagneront. Bien entendu, la suite n'est jamais conforme à mes scénarios, et je devrais rougir de ce jeu. Mais cette faim de diffusion, dont je veux croire qu'elle est plus une faim de communication qu'une faim de succès, éclairera peut-être le très grand plaisir que j'ai à travailler avec d'autres personnes. C'est à mes yeux, non seulement l'une des façons les plus agréables d'apprendre un sujet un peu nouveau, mais aussi une source renouvelée de motivation. À ce titre, je voudrais remercier mes co-auteurs, et plus généralement tous ceux avec qui j'ai eu des papotages scientifiques répétés. Pour citer quelques noms en particulier, je mentionnerai Jean-Paul Allouche, qui, au sortir de ma thèse, m'a appris un peu de combinatoire des mots ; Laurent Habsieger, à qui je suis redevable d'une année passée à "sécher" sur les matrices à signes alternants ; François Bergeron, même si notre maigre production commune ne reflète que mal la masse des choses qu'il m'a apprises, Jean-Marc Fédou, dont l'énergie m'a convaincue qu'on pouvait faire quelque chose des polygones convexes, et bien sûr mon cher Kimmo Eriksson, qui m'a livré sur un plateau un problème en or. Notre collaboration, dont je garde un souvenir tout ébloui, a débouché sur des résultats qui, plus d'un an après, continuent de m'étonner et restent mes "favoris". J'ajouterai à cette liste deux personnes avec qui il est manifeste que j'aurais *dû* écrire (au moins) un article, j'ai nommé le Manu (Roblet) et le Svante (Linusson).

Un peu dans le même ordre d'idées, je voudrais remercier ici les personnes qui m'ont accueillie dans les universités étrangères où j'ai eu l'occasion de séjourner. Je pense ici aux montréalais de l'Université du Québec, et notamment à François Bergeron, Srećko Brlek et Pierre Leroux : même s'ils n'ont pas réussi à provoquer une vraie bonne tempête de neige, j'ai tout de même eu droit aux lacs, aux érables, à quelques castors et même à un hypothétique indien. Un grand merci aussi aux membres de l'Université de Melbourne, à Richard Brak, Tony Guttmann et Aleks Owczarek, ainsi qu'à Chris Soteros que je ne sais trop où placer, entre kangourous et castors.

Il serait injuste que cette page exotique fasse oublier qu'il fait également bon sous nos latitudes (si j'oublie la météo morose qui nous accable ces temps-ci), ce dont je remercie chaleureusement mes collègues et amis. Je porte, comme on le comprendra bien, une reconnaissance particulière à ceux qui m'ont aidée alors que j'étais aux prises avec LATEX, et notamment Pierre Castéran, qui

m'a convertie (croit-il) à LATEX2ϵ, Jérôme Olivier Durand-Lose, Olivier Guibert, et Antoine Rauzy, qui a bien failli m'apprendre à modifier les fichiers de style de BIBTEX[1]. À propos d'Antoine, je dois dire que la qualité de son mémoire d'habilitation m'a réveillée, et que c'est grâce à lui (ou par sa faute) que le mien dépasse les quinze pages. Pour finir, je remercie tous ceux parmi vous qui me feront part des inévitables coquilles qu'ils trouveront dans ces pages, ainsi que ceux qui l'ont déjà fait, en particulier Serge Dulucq.

Bordeaux, le 4 décembre 1996.

[1]. Que Bétréma se rassure cependant, ses théories ne sont pas invalidées : ce n'est pas un succès *complet*.

Table des matières

Ce document est une présentation de travaux que j'ai effectués depuis 1989. Il est composé de quatre chapitres visant des objectifs distincts, et donc de style et de forme assez variés.

Le premier, fort originalement intitulé *Généralités*, est surtout destiné à un lecteur qui ne serait pas familier avec la combinatoire énumérative [2]. Il ne prétend bien sûr pas décrire *toute* la combinatoire énumérative, mais plutôt donner, via des exemples, quelques repères permettant de mieux cerner le cadre général de mon travail.

Le deuxième chapitre est assez court ; il est consacré à des travaux récents sur l'énumération des partitions d'entiers, effectués sous l'impulsion de, et en collaboration avec, Kimmo Eriksson. Nous avons obtenu des identités remarquables (me semble-t-il...) et jusque-là insoupçonnées, ce qui est d'autant plus surprenant que le sujet est très classique.

Le troisième chapitre est le plat de résistance, ce qui est assez normal puisqu'il porte sur le sujet principal de mes travaux : l'énumération d'animaux (ou polyominos) et de polygones non intersectants sur des réseaux de dimension deux, ou parfois trois. Il se présente comme un article de synthèse, au fil duquel sont égrenées mes propres contributions ; il devrait donner une vue d'ensemble du sujet. J'ai essayé de soigner tout particulièrement la bibliographie, qui comprend des articles publiés aussi bien dans des revues de physique que de mathématiques ou d'informatique.

Dans le dernier chapitre sont décrits brièvement quelques travaux traduisant mon intérêt épisodique, mais néanmoins vivace, pour la combinatoire des mots, dont Jean-Paul Allouche et Srećko Brlek m'ont fait faire la connaissance. Le moins qu'on puisse dire est que je n'ai pas eu le sentiment qu'un grand fossé séparait la combinatoire énumérative de la combinatoire des mots, les deux disciplines revenant — pour l'essentiel — à comprendre la structure d'objets discrets.

Un *curriculum vitae* et une liste de publications terminent ce document.

[2]. Par exemple quelqu'un qui ne me laisserait pas assez parler en courant...

Chapitre 1

Généralités

1.1 Vous avez dit "compter" ?

La formulation générique d'un problème de combinatoire énumérative est la suivante : on dispose d'un ensemble S d'objets, sur lequel est défini un paramètre $p : S \to \mathbb{N}$, appelé la *taille* ; de plus, on sait que le nombre a_n d'éléments de S de taille n est fini. *Énumérer les objets de S selon le paramètre p*, c'est (idéalement...) donner une "formule générale" pour a_n. Encore faut-il savoir ce qu'on attend d'une telle formule. Prenons donc quelques exemples.

Le nombre de permutations sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire d'éléments du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, est

$$|\mathcal{S}_n| = 1.2.3...n = n!, \tag{1.1}$$

et personne ne contestera le fait que cette identité résolve le "problème" de l'énumération des permutations sur un ensemble fini. Mais il n'est pas nécessaire de s'intéresser à des objets bien mystérieux pour aboutir à des expressions moins clairement satisfaisantes que (1.1). Par exemple, le nombre I_n d'involutions sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ est

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!},$$

et on peut se demander s'il n'existe pas de formule plus concise. De même, le nombre d_n de *dérangements* sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire de permutations σ telles que $\sigma(i) \neq i$ pour tout i, est donné par

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \tag{1.2}$$

et on peut préférer dire que d_n est l'entier le plus proche de $n!/e$.

Il est courant de s'intéresser à plusieurs paramètres $p_1, \ldots, p_k$ simultanément, et donc de chercher à exprimer le nombre $a_{n_1,\ldots,n_k}$ d'objets A tels que $p_i(A) = n_i$ pour tout i. Par exemple, le nombre d'arbres binaires à n sommets (fig. 1.1) est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}, \tag{1.3}$$

mais on peut raffiner ce résultat en évaluant le nombre $C_{p,q}$ d'arbres binaires ayant p fils droits et q fils gauches :

$$C_{p,q} = \frac{1}{p+q+1}\binom{p+q+1}{p}\binom{p+q+1}{q} = \frac{(p+q)!(p+q+1)!}{p!(p+1)!q!(q+1)!}. \tag{1.4}$$

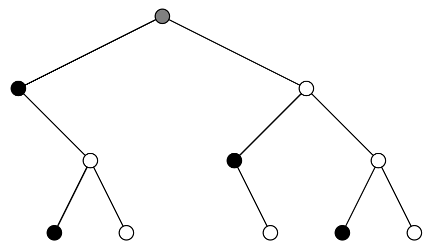


FIG. 1.1 – *Un arbre binaire ayant 4 fils gauches et 6 fils droits (sommets noirs et blancs).*

Toutes les formules que nous venons de donner expriment des nombres en termes de factorielles. Plus généralement, une formule doit exprimer une suite de nombres en termes de fonctions classiques. Voici par exemple le nombre s_n de facteurs de *suites de Sturm* de longueur n (cf. chap. 4 et [93, 175]) :

$$s_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1)\varphi(i),$$

où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler, définie par $\varphi(n) = |\{m < n : \mathrm{pgcd}(m, n) = 1\}|$.

On conçoit que la notion de fonction classique soit assez subjective. De même, il est difficile de savoir ce qu'est une formule satisfaisante ; il est en tous cas souhaitable qu'elle permette un calcul de a_n, pour une valeur de n fixée, plus rapide que le recensement effectif des objets de taille n. Une formule *a priori* fort compliquée peut être remarquablement efficace de ce point de vue là. Prenons l'exemple des *partitions d'entiers* : une partition de l'entier n est une suite d'entiers $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ telle que $1 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_m$ et $\mu_1 + \cdots + \mu_m = n$. Alors le nombre p_n de partitions de n est donné par l'incroyable formule de Hardy-Ramanujan-Rademacher :

$$p_n = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k\geq 1} \sqrt{k} A_k(n) f_k(n) \tag{1.5}$$

où

$$f_k(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sinh\left[\pi/k\sqrt{2/3(x - 1/24)}\right]}{\sqrt{x - 1/24}}, \quad A_k(n) = \sum_{1\leq h\leq k,\ (h,k)=1} \omega_{h,k} \exp(-2\pi i n h/k)$$

et $\omega_{h,k}$ est une racine $24k^{\text{ième}}$ de l'unité, dépendant de h et k. Cette formule se révèle étonnamment efficace. Par exemple, 8 termes de la série (1.5) suffisent pour calculer p_{200} [10, chap. 5].

Il est souvent commode de décrire une suite de nombres a_n par la donnée d'une série formelle appelée *série génératrice* des a_n. Les séries génératrices *ordinaires* $\sum_n a_n t^n$ et *exponentielles* $\sum_n a_n t^n/n!$ sont les plus couramment utilisées, parce que certaines opérations sur les objets correspondent à des opérations simples (produit, dérivation,...) sur les séries génératrices associées ; mais rien n'interdit d'utiliser des séries génératrices plus exotiques. En guise d'entraînement, réexaminons les quelques exemples ci-dessus, en les transcrivant en termes de séries génératrices.

La série génératrice exponentielle des permutations (on devrait dire “des nombres a_n comptant les permutations sur n éléments”) est :

$$\sum_{n\geq 0} n! \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-t}.$$

Celle des involutions est

$$\sum_{n\geq 0} I_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right), \tag{1.6}$$

tandis que celle des dérangements est

$$\sum_{n\geq 0} d_n \frac{t^n}{n!} = \frac{\exp(-t)}{1-t}.$$

Les résultats suivants s'expriment mieux en termes de séries génératrices ordinaires. Celle des nombres de Catalan est

$$\sum_{n\geq 1} C_n t^{n-1} = \frac{1-2t-\sqrt{1-4t}}{2t^2}. \tag{1.7}$$

Les séries formelles à plusieurs variables permettent de transcrire les résultats d'une énumération selon plusieurs paramètres. Par exemple, la série génératrice ordinaire des arbres binaires, comptés selon les nombres de fils droits et de fils gauches, est

$$\sum_{p,q\geq 0} C_{p,q} x^p y^q = \frac{1-x-y-\sqrt{1-2x-2y-2xy+x^2+y^2}}{2xy}. \tag{1.8}$$

Si une simple inversion de Lagrange permet d'exprimer C_n à partir de (1.7), ou encore $C_{p,q}$ à partir de (1.8), il faut parfois un travail d'analyse énorme pour déduire une expression satisfaisante des coefficients a_n à partir de l'expression de leur série génératrice. Par exemple, il est facile de prouver que la série génératrice ordinaire des partitions d'entiers est

$$\sum_{n\geq 0} p_n t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\dots} = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-t^i}, \tag{1.9}$$

mais passer de cette formule à l'identité (1.5) requiert un chapitre entier du livre d'Andrews sur les partitions [10]. Encore y admet-on une formule décisive.

Les séries génératrices ne sont pas seulement une façon de coder les résultats d'une énumération. Elles permettent aussi d'exploiter ces résultats. En particulier, il est souvent possible de déduire des singularités de la série génératrice, prise comme une fonction de la variable complexe, le comportement asymptotique de ses coefficients [115, 117, 118, 119]. On peut également, dans le cas d'une énumération selon plusieurs paramètres, calculer par dérivation la valeur moyenne d'un paramètre p_1 sur les objets de taille p_2 fixée, ou même étudier la distribution des objets autour de cette moyenne [120, 121]. Mais l'intérêt majeur des séries génératrices réside dans le fait qu'elles sont souvent de véritables *outils* pour l'énumération, comme l'illustrera le paragraphe suivant.

Pour conclure en termes généraux, on peut dire qu'énumérer un ensemble d'objets, c'est parvenir à caractériser (de façon non tautologique !) la suite $(a_n)_n$ qui donne le nombre d'objets de taille n ; cette caractérisation doit permettre d'évaluer rapidement les nombres a_n, et peut prendre des formes variées : formule explicite pour les a_n ou leur série génératrice, relations de récurrence, équations fonctionnelles sur la série génératrice... Chaque type de réponse peut avoir ses avantages. Le premier chapitre du livre de Stanley "Enumerative combinatorics" fournit une discussion plus consistante sur le sujet [206].

1.2 Compter, c'est plus que compter

Je voudrais ici promouvoir la thèse selon laquelle l'obtention de formules n'est pas le véritable objectif, ou du moins pas le seul, de la combinatoire énumérative. À mes yeux, parvenir à énumérer une classe d'objets est surtout la garantie qu'on a compris quelque chose à leur structure — et c'est sans doute là le plus intéressant. Car pour obtenir quelque information sur un nombre d'objets, il faut pouvoir décrire une manière de les construire, transcriptible en termes mathématiques. Pour prendre un exemple simpliste, l'expression (1.1) donnant le nombre de permutations σ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, provient du fait qu'une fois le choix de $\sigma(n)$ effectué, il reste essentiellement à choisir une permutation sur $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Cet argument élémentaire correspond donc à la relation de récurrence $n! = n(n-1)!$. Pour prendre un exemple un peu moins idiot, la formule donnant le nombre I_n d'involutions sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ provient d'une partition de l'ensemble des involutions qui les classe selon leurs points fixes. Plus précisément :

$$I_n = \sum_{E \subset \{1,\ldots,n\}} |\{\sigma \text{ involution } : \sigma(i) = i \Leftrightarrow i \in E\}|.$$

Le nombre d'involutions sans points fixes sur $2k$ éléments étant clairement $(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1$, le calcul se poursuit en :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{E \subset \{1,\ldots,n\}, n-|E| \text{ pair}} (n-|E|-1)(n-|E|-3)\ldots 3.1 \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (2k-1)(2k-3)\ldots 3.1 \binom{n}{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}. \end{aligned}$$

Alternativement, I_n s'obtient en développant la série génératrice $\exp(t + t^2/2)$, qui peut être obtenue *directement* grâce à la théorie des espèces [26]. Dans le vocabulaire de cette théorie, une involution est une *assemblée de cycles de longueur un et deux*, et cette remarque suffit à écrire (1.6). Deux méthodes sont donc possibles pour énumérer les involutions, mais toutes deux exigent de comprendre comment on peut les fabriquer.

L'expression (1.2) donnant le nombre de dérangements sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ provient quant à elle du bon vieux principe d'inclusion-exclusion, selon lequel

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{E \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|E|} |\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma(i) = i \quad \forall i \in E\}| \\ &= \sum_{E \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|E|} (n-|E|)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! \binom{n}{k} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Alternativement, d_n s'obtient en développant la série génératrice $\exp(-t)/(1-t)$, que la théorie des espèces permet de nouveau de calculer directement : les dérangements sont des *assemblées de cycles de longueur au moins deux*, et donc

$$\sum_{n \geq 0} d_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \cdots\right) = \exp(-\log(1-t) - t) = \frac{\exp(-t)}{1-t}.$$

Continuons notre inventaire. Un arbre binaire est soit réduit à un seul sommet, soit formé d'un sommet auquel sont rattachés un sous-arbre droit et/ou un sous-arbre gauche. Cette construction fournit $C_1 = 1$ et pour $n \geq 2$,

$$C_n = 2C_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} C_k C_{n-k-1}. \tag{1.10}$$

Il n'est pas forcément évident de déduire de cette relation de récurrence l'expression classique (1.3) des nombres de Catalan. Il est plus commode de passer par la série génératrice $\mathcal{C} = \sum_{n\geq 1} C_n t^{n-1}$. L'équation (1.10) ci-dessus se traduit sur $\mathcal{C}$ par

$$\mathcal{C} = 1 + 2t\mathcal{C} + t^2\mathcal{C}^2,$$

qui se résout pour donner (1.7). On peut alors appliquer la formule d'inversion de Lagrange (voir par exemple [63]) pour obtenir l'expression de C_n.

Un peu d'habitude permet en général d'écrire directement des équations sur les séries génératrices, sans passer par les relations de récurrence satisfaites par leurs coefficients. Ainsi, notre factorisation d'un arbre binaire en deux sous-arbres fournit, pour la série $\bar{\mathcal{C}} = \sum_{p,q\geq 0} C_{p,q} x^p y^q$ qui compte les arbres selon les nombres de fils droits et gauches, l'équation suivante :

$$\bar{\mathcal{C}} = 1 + x\bar{\mathcal{C}} + y\bar{\mathcal{C}} + xy\bar{\mathcal{C}}^2,$$

dont la résolution donne d'abord (1.8), puis (1.4) via la formule d'inversion de Lagrange.

Notre dernier exemple sera celui des partitions d'entiers $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$. Elles s'obtiennent en juxtaposant un certain nombre de μ_i égaux à 1, suivis d'un certain nombre de μ_i égaux à 2, etc. Cette juxtaposition correspond au *produit* des séries génératrices correspondantes, qui sont respectivement $1/(1-q)$, $1/(1-q^2)$, etc. On obtient ainsi l'identité (1.9). Il est facile de vérifier, en développant "naïvement" le produit infini qui y apparaît, que celui-ci compte bien les partitions.

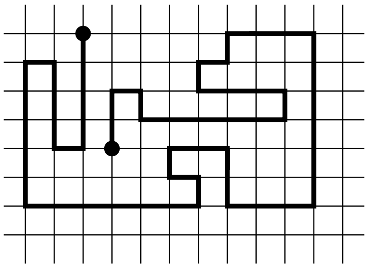


FIG. 1.2 – *Un chemin auto-évitant.*

Les exemples ci-dessus illustrent les deux ingrédients d'une procédure d'énumération classique[1]. Le premier est la description d'une façon de construire les objets, qui peut combiner des constructions récursives, le principe d'inclusion-exclusion, différents codages, etc. Ce premier ingrédient doit aboutir à une information mathématique sur la suite de nombres cherchée (expression plus ou moins simple, relations de récurrences...). Le deuxième ingrédient est d'ordre analytique. Il s'agit de tirer de l'information obtenue les résultats les plus agréables possibles sur la suite de nombres a_n. Ce peut être par exemple une formule explicite pour leur série génératrice ou pour eux-mêmes, des relations de récurrence plus simples, ou leur comportement asymptotique. Chacune de ces deux étapes peut présenter des difficultés majeures. Par exemple, on ne sait pas décrire de construction traduisible en termes mathématiques pour les *chemins auto-évitants* de la figure 1.2 (et du chapitre 3). Pour illustrer la difficulté potentielle du deuxième ingrédient, on peut évoquer l'énumération des *partitions planes totalement symétriques et auto-complémentaires*. Le dernier obstacle à leur énumération consistait à prouver l'identité suivante [208] :

$$\det(a_{ij})_{0\leq i,j\leq n-1} = (-1)^n \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} \right]^2,$$

[1] Il en existe bien sûr des moins classiques...

avec $a_{ii} = -1$, $a_{ij} = -a_{ji}$ si $i > j$ et pour $0 \leq i < j$:

$$a_{ij} = \sum_{r=2i-j+1}^{2j-i} \binom{i+j}{r}.$$

Il a fallu tout le talent et l'énergie de G. Andrews, conjugués à ceux de son ordinateur, pour parvenir à prouver cette identité [8].

Parmi les outils pouvant permettre la description d'une construction des objets étudiés, nous avons mentionné les *codages*, sans que les exemples ci-dessus illustrent cette assertion. Le principe des codages est d'établir une bijection (respectant la taille) entre l'ensemble S des objets qu'on cherche à énumérer et un ensemble S' formé d'objets de structure plus limpide. Un certain nombre d'objets classiques (mots de langages algébriques, arbres...) sont des candidats idéaux pour l'ensemble S' : ce sont ceux qu'une technique standard permettra d'énumérer. Il existe en effet plusieurs théories générales permettant de résoudre de vastes classes de problèmes de comptage : nous avons déjà mentionné, et illustré, la théorie montréalaise des espèces [26]. Citons encore celle du composé partitionnel [122], les grammaires d'objets [94], et le logiciel $\Lambda\Upsilon\Omega$ [116] : ce dernier met le combinatoriste au chômage, ou du moins le contraint à élever ses ambitions ; il se nourrit de la donnée de règles de construction d'objets, et donne en sortie le comportement asymptotique des nombres cherchés, parfois accompagné d'une expression de leur série génératrice. Citons aussi quelques théories plus spécialisées, mais précieuses, comme l'énumération des couplages parfaits ou des configurations de chemins ne se coupant pas par des permanents, déterminants, pfaffiens et autres haffniens, qui ont récemment fourni de très beaux résultats [129, 208, 156].

Nous avons illustré dans cette partie le fait que les résultats d'énumération ne font que traduire en termes mathématiques l'existence d'un procédé de construction des objets que l'on compte. Poussée à l'extrême, cette idée suggère que des identités ou théories mathématiques variées peuvent cacher des objets combinatoires, et que restituer à ces théories la combinatoire sous-jacente permettrait de mieux les comprendre. C'est ainsi que des domaines classiques comme l'algèbre linéaire, la théorie des polynômes orthogonaux [217] ou celle des approximants de Padé [199], ont été récemment dotés d'un éclairage combinatoire.

1.3 Classes de séries formelles

Pour décrire une série génératrice sans en donner les détails, il est courant de commencer par dire qu'elle est, par exemple, rationnelle, ou algébrique, ou que c'est une q-série. De même que la forme des récurrences qu'on peut obtenir provient souvent des propriétés de structure des objets étudiés, il me semble que la *nature* d'une série génératrice donne un certain type d'information, même vague, sur les objets qu'elle énumère : par exemple sur le type de construction par lequel on peut espérer les décrire, ou sur le comportement asymptotique possible des nombres a_n qui les énumèrent, ou sur la rapidité avec laquelle on peut espérer les calculer. Par ailleurs, un certain nombre de familles ont des propriétés de clôture intéressantes. Pour toutes ces raisons, la notion de classes de séries me paraît importante, et mériter un petit exposé. Nous évoquerons ici cinq familles de séries : les quatre premières sont incluses les unes dans les autres, la cinquième est en quelque sorte transversale.

Dans ce qui suit, on considère une série formelle $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1.3.1 Les séries rationnelles

La série $f(t)$ est dite *rationnelle* s'il existe deux polynômes $P(t)$ et $Q(t)$ tels que $Q(0) \neq 0$ et

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}.$$

De façon équivalente, les coefficients a_n satisfont une récurrence linéaire à coefficients constants : il existe un entier k, des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ et un entier n_0 tels que pour $n \geq n_0$,

$$a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k} = 0.$$

Le calcul des coefficients se fait par l'évaluation des puissances d'une matrice, et demande donc un nombre d'opérations arithmétiques logarithmique. La décomposition en éléments simples de $f(t)$ (sur $\mathbb{C}$) permet d'expliciter les coefficients a_n comme somme de termes de la forme $A\mu^n n^\gamma$ où γ est un entier. Le comportement asymptotique de a_n s'en déduit ; il est en général de la forme $A\mu^n n^\gamma$, sauf lorsque $Q(t)$ a plusieurs racines de module minimal, auquel cas il faut être un peu plus prudent (voir [134] pour un algorithme de calcul effectif).

Par exemple, pour $k \geq 1$, la série génératrice des partitions $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ telles que $\mu_i \leq k$ pour tout i est :

$$\sum_{\mu : \mu_i \leq k} t^{\mu_1 + \cdots + \mu_m} = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)}.$$

C'est donc une série rationnelle. Son dénominateur se factorise sous la forme

$$Q(t) = \prod_{\xi \in R_k} (1 - \xi t)^{e_\xi},$$

où R_k est l'ensemble des racines $i^{\text{ièmes}}$ de l'unité, $1 \leq i \leq k$. L'exposant e_ξ est maximal (et égal à k) lorsque $\xi = 1$, ce qui permet de montrer que le nombre de partitions de n en parts inférieures ou égales à k est équivalent à $n^{k-1}/k!$ lorsque n tend vers l'infini.

1.3.2 Les séries algébriques et la méthodologie de Schützenberger

La série $f(t)$ est dite *algébrique* s'il existe un polynôme $P(X)$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}(t)$ des fractions rationnelles en t tel que $P(f(t)) = 0$. Les séries rationnelles sont bien sûr algébriques. Le développement de $f(t)^k$,

$$f(t)^k = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_k}$$

permet d'imaginer le type de récurrence que satisfont les coefficients a_n.

Un exemple simple est celui des arbres binaires : nous avons vu que leur série génératrice $\mathcal{C}$ satisfait l'équation $\mathcal{C} = t + 2t\mathcal{C} + t\mathcal{C}^2$. Les coefficients de cette série sont les nombres de Catalan C_n, dont le comportement asymptotique, obtenu par exemple grâce à la formule de Stirling, est

$$C_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4^n n^{-3/2}.$$

Des résultats généraux existent sur le comportement asymptotique des coefficients d'une série algébrique ; voir [24, 153].

Les séries algébriques occupent depuis une vingtaine d'années une place particulière en combinatoire énumérative, en partie en raison de la *méthodologie de Schützenberger* notamment promue par les travaux de l'école bordelaise. Cette méthodologie consiste tout d'abord à coder les objets qu'on veut énumérer par les mots d'un langage algébrique $\mathcal{L}$, non inhéremment ambigu, de telle sorte que la taille des objets devienne, par exemple, la longueur des mots qui les codent. Ensuite, la donnée d'une grammaire non ambiguë engendrant $\mathcal{L}$ permet d'écrire des équations algébriques portant sur la série génératrice (éventuellement non commutative) des mots de $\mathcal{L}$, puis sur celle des objets initiaux. On constate que cette méthodologie respecte le schéma général d'énumération évoqué plus haut : codage, puis décomposition des objets du code par la description d'une grammaire.

Cette méthodologie a été très largement utilisée, d'abord pour mieux comprendre l'algébricité de séries génératrices déjà connues, puis pour en calculer de nouvelles. Elle s'est révélée particulièrement efficace dans des problèmes d'énumération de cartes [71, 72] et de polyominos (cf. chapitre 3 et [77, 79, 80, 83]. Toutefois, il est souvent possible de "court-circuiter" le codage, et de décrire directement les règles de construction sur les objets qu'on veut compter. C'est un peu l'esprit des grammaires d'objets [94]. Des exemples seront donnés dans le chapitre 3, ou sera aussi évoquée une extension de la méthodologie de Schützenberger menant à des *q-analogues* d'équations algébriques.

Un peu dans le même esprit, la connexion séries algébriques – langages algébriques permet d'exhiber des langages algébriques inhéremment ambigus : une des étapes de la preuve d'un tel résultat consiste à prouver que la série génératrice de ces langages *n'est pas* algébrique [93, 175, 113].

1.3.3 Les séries différentiellement finies et le paquetage GFUN

La série $f(t)$ est dite *différentiellement finie* ou *D-finie* si ses dérivées $f(t), f'(t), f''(t), \ldots$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}(t)$ [204]. Ceci n'est qu'une façon savante (mais utile pour la généralisation à plusieurs variables, voir [168, 169] et aussi [224]) de dire que f satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux : il existe un entier k et des polynômes $P_0(t), \ldots, P_k(t)$ à coefficients complexes tels que $P_0(t) \neq 0$ et

$$P_0(t)f(t) + P_1(t)f'(t) + \cdots + P_k(t)f^{(k)}(t) = 0.$$

De façon équivalente, les coefficients a_n satisfont une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux : il existe un entier k, des polynômes à coefficients complexes $\alpha_0(n), \ldots, \alpha_k(n)$ et un entier n_0 tels que $\alpha_0(n) \neq 0$ et pour $n \geq n_0$,

$$\alpha_0(n)a_n + \alpha_1(n)a_{n-1} + \cdots + \alpha_k(n)a_{n-k} = 0.$$

Les séries D-finies les plus simples sont sans doute les séries *hypergéométriques*, c'est-à-dire les séries telles que a_{n+1}/a_n soit une fraction rationnelle (fixée) en n. Les séries algébriques sont également D-finies.

Les coefficients a_n se calculent en temps linéaire. Leur comportement asymptotique peut prendre des formes beaucoup plus variées que celui des coefficients des suites algébriques. Par exemple, la série génératrice exponentielle des involutions est $f(t) = \exp(t + t^2/2)$. Elle satisfait

$$f'(t) - (1+t)f(t) = 0,$$

et est donc D-finie. Ses coefficients ont le comportement asymptotique suivant [119] :

$$\frac{I_n}{n!} \sim \frac{e^{-1/4}}{\sqrt{2\pi n}} n^{-n/2} e^{n/2+\sqrt{n}}.$$

L'un des attraits des séries D-finies est l'existence d'un paquetage de MAPLE appelé GFUN, développé par le projet Algorithmes de l'INRIA, qui leur est consacré. Ce paquetage comprend deux types de fonctions : celles qui “devinent” des séries génératrices, et celles qui calculent. Les fonctions qui devinent prennent en entrée une suite $a_0, a_1, \ldots, a_N$ *finie*, et recherchent une récurrence polynomiale qu'elle pourrait satisfaire. Des fonctions spécialisées sont adaptées à la recherche de séries rationnelles, algébriques et hypergéométriques. De telles fonctions sont évidemment très précieuses pour deviner la solution de problèmes d'énumération. Bien sûr, il reste ensuite à *prouver* que la série cherchée satisfait l'équation donnée par GFUN. Dans certain cas, cette preuve peut être automatisée, grâce aux algorithmes de Wilf et Zeilberger [186]. Quant aux fonctions de calcul de GFUN, elles jouent notamment sur la dualité équation différentielle/récurrence polynomiale, et travaillent sur les propriétés de clôture (paragraphe 1.3.5) des séries D-finies, produisant l'équation différentielle satisfaite par la somme ou le produit de deux séries. Cette petite page publicitaire ne peut en aucun cas se substituer ni à la lecture de [201], ni à l'utilisation de GFUN.

1.3.4 Les séries différentiellement algébriques

La série $f(t)$ est dite *différentiellement algébrique* s'il existe un entier k et un polynôme $P(X_0, \ldots, X_k)$ à coefficients dans $\mathbb{C}(t)$ tels que

$$P\left(f(t), f'(t), \ldots, f^{(k)}(t)\right) = 0.$$

Bien évidemment, une série D-finie est différentiellement algébrique. Il existe d'autres familles intéressantes de séries différentiellement algébriques, par exemple les séries CDF (constructiblement différentiellement algébriques) [27]. La série $f(t)$ est CDF s'il existe des séries $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)$ avec $f = f_1$, et des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ à k variables, à coefficients complexes, tels que :

$$f_1' = P_1(f_1, f_2, \ldots, f_k),$$
$$f_2' = P_2(f_1, f_2, \ldots, f_k),$$
$$\ldots$$
$$f_k' = P_k(f_1, f_2, \ldots, f_k).$$

À ma connaissance, les séries différentiellement algébriques font l'objet de travaux moins nombreux que les séries D-finies. En particulier, je ne connais pas de logiciel qui leur soit consacré, bien que deviner qu'une série est différentiellement algébrique ne fasse appel qu'à la résolution de systèmes linéaires (très gros, ce qui est peut-être le problème).

1.3.5 Propriétés d'inclusion et de clôture

La figure 1.3 rappelle les propriétés d'inclusion des cinq classes de séries que nous venons d'évoquer.

Le tableau qui la suit décrit leurs propriétés de stabilité[2]. Précisons que par l'*inverse* de la série formelle $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$, nous entendons l'inverse pour la multiplication, $1/f(t)$, qui n'est une série formelle que si $a_0 \neq 0$. La série obtenue par substitution de $g(t) = \sum_{n\geq 0} b_n t^n$ dans $f(t)$ est $f(g(t)) = \sum_{n\geq 0} a_n [g(t)]^n$. Elle n'est définie que si $b_0 = 0$. La série t est l'élément neutre pour la substitution. L'*inverse de* $f(t)$ *pour la substitution* est l'unique série $g(t)$ telle que $f(g(t)) = g(f(t)) = t$. Cet inverse n'existe que si $a_0 = 0$. Enfin, le *produit de Hadamard* de $f(t)$ et $g(t)$ est $\sum_{n\geq 0} a_n b_n t^n$, le produit usuel étant $\sum_n t^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

[2]. Je n'ai pas trouvé dans la littérature les propriétés des séries différentiellement algébriques. Références bienvenues...

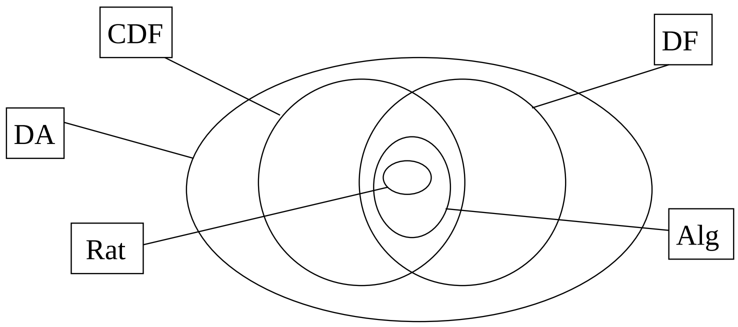


FIG. 1.3 – *Propriétés d'inclusion.*

	Rationnelle	Algébrique	D-finie	CDF	Diff. Alg.
Somme	o	o	o	o	?
Produit	o	o	o	o	?
Inverse	o	o	N	o	o
Substitution	o	o	N	o	o
Inverse subst.	N	o	N	o	o
Intégration	N	N	o	o	o
Dérivation	o	o	o	o	o
Produit de H.	o	N	o	N	?

1.3.6 Les q-séries

Les q-séries apparaissent dans les domaines les plus variés des mathématiques et de la physique [12]. Elles sont classiques en analyse, sont depuis très longtemps reliées à la combinatoire des partitions d'entiers, et, par ce biais, à l'étude des représentations du groupe symétrique et du groupe linéaire, et à la théorie (additive) des nombres. Plus récemment, leur importance s'est accrue en théorie des nombres[3], et surtout en physique, depuis qu'elles se sont révélées au centre de la solution du modèle des hexagones durs [22, 11, 21] et des identités bosons-fermions (voir par exemple [28, 29]).

Les q-séries sont une notion moins précise que, par exemple, les séries D-finies évoquées plus haut. Les présenter nécessite sans doute de commencer par définir le *q-analogue* $[n]$ d'un entier positif n :

$$[n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}.$$

Ce polynôme en q est un *q-analogue* de n parce qu'il redonne n dans la limite $q \to 1$. L'étape suivante nous fait faire connaissance avec le q-analogue de la factorielle :

$$[n]! = [1][2]\ldots[n] = 1(1+q)\ldots(1+q+\cdots+q^{n-1}) = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q)^n} = \frac{(q)_n}{(1-q)^n}.$$

Ce polynôme énumère les permutations de $\mathcal{S}_n$ selon le nombre d'inversions. Nous avons utilisé la notation classique $(q)_n$, qui est un cas particulier de la notation plus générale suivante :

$$(x)_n = (1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^{n-1}).$$

[3]. Les bordelais se procureront aisément le texte de l'exposé de J. Coates sur les nombres congruents [62].

On remarquera que la variable q est implicite dans cette écriture : on utilise parfois la notation $(x;q)_n$ pour lever toute ambiguïté. Après les factorielles viennent tout naturellement les *coefficients q-binomiaux*, ou *polynômes gaussiens* :

$$\begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]![n]!} = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n+m})}{(1-q)\dots(1-q^m)(1-q)\dots(1-q^n)}.$$

Ce sont des *polynômes* en q, qui énumèrent les partitions dont la taille et le nombre de parts sont bornés (par n et m dans le cas ci-dessus). Ils apparaissent aussi dans des problèmes d'énumération liés aux corps finis : par exemple, si q est un nombre premier, un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{F}_q$ a $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$ sous-espaces de dimension m [10, chap. 13].

Les mieux peignées des q-séries sont les *séries hypergéométriques basiques*. On les définit comme suit :

$${}_r\Phi_s\left(\begin{array}{c} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{array} ;x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n\dots(a_r)_n}{(q)_n(b_1)_n\dots(b_s)_n} x^n.$$

Remarquons que la variable q est de nouveau implicite dans les notations. Une des séries hypergéométriques basiques les plus simples est le q-analogue suivant de l'exponentielle :

$$E_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(q)_n} = {}_0\Phi_0\left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array} ;x\right).$$

Une autre exponentielle peut être définie par passage à la limite dans ${}_1\Phi_0$:

$$E_2(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{\binom{n}{2}}}{(q)_n} = \lim_{a\to+\infty} {}_1\Phi_0\left(\begin{array}{c} a \\ - \end{array} ;-\frac{x}{a}\right).$$

Ces deux exponentielles classiques sont liées par la remarquable identité :

$$E_1(x)E_2(-x) = 1.$$

Plus généralement, les séries hypergéométriques basiques satisfont de nombreuses identités constituant à elles seules un vaste sujet d'étude [126].

Les q-séries s'expriment en général en fonction des ingrédients que nous venons de présenter : les q-factorielles, les séries hypergéométriques basiques et leurs diverses limites. Ces q-séries sont parfois solutions de *q-équations*, c'est-à-dire d'équations liant $f(x), f(xq), \dots, f(xq^k)$. Par exemple, une équation de la forme

$$P(f(x), f(xq), \dots, f(xq^k)) = 0$$

où P est un polynôme à $(k+1)$ variables à coefficients dans $\mathbb{C}[x,q]$ sera dite *q-algébrique*. On pourra parfois la résoudre grâce à l'un des nombreux q-analogues de la formule d'inversion de Lagrange [125, 127, 155]. Une équation de la forme

$$P_0(x,q)f(x) + P_1(x,q)f(xq) + \dots + P_k(x,q)f(xq^k) = 0$$

où les P_i sont des polynômes, peut être appelée *q-linéaire*. Mais c'est en fait une équation *q-différentielle linéaire*, en vertu de l'existence de l'opération de q-dérivation, définie comme suit :

$$D_q(f)(x) = \frac{f(x) - f(xq)}{x(1-q)}.$$

Cette opération satisfait des propriétés fort agréables pour une dérivation, par exemple

$$D_q(x^n) = [n]x^{n-1}$$

et

$$D_q(fg)(x) = f(xq)D_q(g)(x) + g(x)D_q(f)(x).$$

1.4 MAPLE

Nous avons déjà évoqué l'importance du paquetage GFUN de MAPLE consacré aux séries différentiellement finies. Plus généralement, que serait le combinatoriste énumérateur sans MAPLE (ou tout autre logiciel de calcul formel) ?

J'utilise pour ma part MAPLE de deux façons différentes, à savoir en aval et en amont du travail de recherche. L'utilisation en aval du travail, c'est-à-dire postérieure à lui, est sans doute la plus traditionnelle : elle consiste à vérifier une identité qu'on vient d'établir — à la corriger le cas échéant. L'utilisation de MAPLE en amont, ou pendant la recherche, est beaucoup plus enthousiasmante, du moins lorsqu'elle est fructueuse.

Face à une nouvelle classe d'objets qu'on veut étudier, le premier réflexe est de trouver à la main ceux de petite taille, puis de prolonger ce travail en écrivant un programme de génération exhaustive. Les données obtenues peuvent ensuite être offertes en pâture à GFUN, au cas où la chance voudrait que la série génératrice cherchée soit différentiellement finie.

Plus généralement, MAPLE peut être utilisé à tout instant pour deviner des identités entre nombres ou séries, et formuler des conjectures. Je suis ainsi redevable à MAPLE de trois résultats (au moins !) dont j'ignore si j'aurais pu les découvrir sans le recours à l'ordinateur. Le premier de ces résultats est en fait un ensemble de résultats, à savoir toutes les identités sur les partitions d'entiers décrites dans le chapitre 2 (à l'exception de la première, découverte par Kimmo Eriksson, et qui a amorcé nos travaux dans ce domaine). Les deux autres résultats sont moins fondamentaux, et concernent respectivement l'énumération des polygones verticalement convexes [45] et celle des polygones convexes en dimension trois [51].

Chapitre 2

Lecture hall partitions

L'énumération des partitions d'entiers est un domaine de recherche ancien et prestigieux, fréquenté par des grands noms de la combinatoire, et donc à la fois attirant et assez périlleux. Je voudrais raconter dans ce chapitre comment le hasard m'a cependant conduite vers ce domaine, en compagnie de Kimmo Eriksson [48, 49]. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler sur ce sujet, et il me semble que la chance nous a souri de façon peu commune : j'espère que la lecture de ce qui suit fera partager au lecteur un peu de notre surprise et de notre enthousiasme.

Mais commençons par le commencement. En avril 95, je reçus un courrier électronique de Kimmo Eriksson, qui était arrêté par un problème de combinatoire énumérative. En utilisant une représentation des éléments du groupe de Coxeter affine $\widetilde{C}_n$ en termes de permutations de $\mathbb{Z}$ [98, 99], il avait ramené la preuve de la formule de Botts [36] qui énumère selon leur *longueur* les éléments de $\widetilde{C}_n$ à la preuve du résultat suivant : pour $n \geq 1$, soit

$$\mathcal{L}_n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n : 0 \leq \frac{\lambda_1}{1} \leq \frac{\lambda_2}{2} \leq \ldots \leq \frac{\lambda_n}{n} \right\};$$

alors la série génératrice des éléments de $\mathcal{L}_n$ est :

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_n} q^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - q^{2i+1}}. \tag{2.1}$$

Il est possible que cette représentation de $\widetilde{C}_n$ n'ait pas été la meilleure façon de re-démontrer la formule de Botts : l'identité (2.1), sous des dehors innocents, était non seulement nouvelle, mais de surcroît difficile à démontrer. Nous n'y sommes en tous cas parvenus qu'après des efforts assez conséquents. Notre première preuve, basée sur une étude fine de la structure des éléments de $\mathcal{L}_n$, était assez abominable de complexité. Depuis, de raccourci en raccourci, nous sommes parvenus à en extraire la substantifique moelle, et nous disposons désormais d'une preuve fort simple, mais difficile à découvrir, que j'exposerai plus loin. Cette preuve fournit en fait un raffinement de l'identité (2.1) ; en outre, elle se généralise à toute une famille d'identités du même type, dont voici un petit aperçu : définissons les nombres de Fibonacci, de façon classique, par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pour $i \geq 2$; alors la série génératrice des n-uplets d'entiers $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$0 \leq \frac{\lambda_1}{1} \leq \frac{\lambda_2}{3} \leq \frac{\lambda_3}{8} \leq \ldots \leq \frac{\lambda_n}{F_{2n-1}}$$

est

$$\sum_{\lambda} q^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = \frac{1}{(1-q^1)(1-q^{1+3})(1-q^{3+8})(1-q^{8+21}) \cdots (1-q^{F_{2n-3}+F_{2n-1}})}. \tag{2.2}$$

Le paragraphe suivant comporte quelques rappels intéressés sur l'énumération de partitions : ils doivent permettre au lecteur de se remémorer, ou de découvrir, quelques résultats élémentaires, mais aussi de mieux comprendre la signification de l'identité (2.1). Le paragraphe 2.2 regroupe nos résultats les plus frappants, tandis que la dernière partie de ce chapitre présente quelques prolongements possibles de notre travail.

2.1 Énumération de partitions : mise en jambes

Une partition[1] d'un entier $n \geq 0$ est une suite croissante d'entiers strictement positifs $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ telle que $\mu_1 + \cdots + \mu_m = n$. Le *poids* de la partition μ, noté $|\mu|$, est n, les μ_i sont les *parts* de μ, et le nombre m de ces parts est la *longueur* $\ell(\mu)$ de μ. Les partitions sont classiquement représentées par des *diagrammes de Ferrers*, dont l'orientation est sujette à de nombreuses variations trans-continentales : nous adopterons dans ce texte la convention suédoise, illustrée par la figure 2.1 (et à peu près nulle part ailleurs).

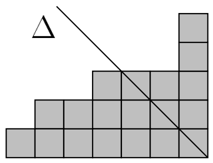


FIG. 2.1 – *La partition* $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 5)$.

Énumérer une famille $\mathcal{P}$ de partitions, c'est calculer sa série génératrice selon le poids, $\sum_{\mu \in \mathcal{P}} q^{|\mu|}$, ou selon le poids et la longueur, $\sum_{\mu \in \mathcal{P}} t^{\ell(\mu)} q^{|\mu|}$. Une énorme littérature, étroitement reliée aux identités sur les q-séries, est consacrée à ce sujet [10, 12].

Commençons en douceur, en énumérant *toutes* les partitions : on les obtient en juxtaposant un certain nombre de parts égales à 1, puis un certain nombre de parts égales à 2, etc. Ce procédé conduit au résultat suivant, déjà connu d'Euler[2] [101] :

$$\sum_{\mu \text{ partition}} t^{\ell(\mu)} q^{|\mu|} = \frac{1}{(1-tq)(1-tq^2)(1-tq^3)\dots} = \frac{1}{(tq)_\infty},$$

en utilisant une notation classique dans l'étude des q-séries. On peut raffiner ce résultat, en énumérant de même les partitions dont les parts appartiennent à un ensemble $I \subset \mathbb{N}$ fixé :

$$\sum_{\mu : \mu_i \in I} t^{\ell(\mu)} q^{|\mu|} = \prod_{i \in I} \frac{1}{1-tq^i}. \tag{2.3}$$

Par exemple, la série génératrice des partitions à parts inférieures ou égales à k est $\prod_{1 \leq i \leq k} (1-q^i)^{-1}$. En faisant pivoter le diagramme de Ferrers correspondant autour de l'axe Δ (fig. 2.1), on constate que c'est aussi la série génératrice des partitions ayant au plus k parts.

Montons maintenant légèrement la barre, toujours aux côtés d'Euler, pour énumérer les partitions μ à parts *distinctes*, c'est-à-dire telles que $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m$. Notre procédé de juxtaposition

---

1. Un *partage*, dit-on au Québec : c'est plein de bon sens, ça permet de distinguer les partitions d'entiers des partitions d'ensembles.

2. Dont l'éditeur était vraisemblablement quelque béarnais passé des pâturages pyrénéens à ceux de la Suisse...

de parts s'applique encore, et donne :

$$\sum_{\mu:\mu_1<\cdots<\mu_m} q^{|\mu|} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \prod_{i\geq 1}(1+q^i) = \prod_{i\geq 1}\frac{1-q^{2i}}{1-q^i} = \prod_{i\geq 0}\frac{1}{1-q^{2i+1}}. \tag{2.4}$$

En comparant avec (2.3), nous découvrons donc que tout entier a autant de partitions en parts distinctes que de partitions en parts impaires (Euler [101]).

Un résultat de formulation voisine, mais certainement plus profond (et en tous cas plus difficile), concerne les *D-partitions*, qui sont les partitions dont les parts diffèrent de deux au moins. Pour les compter, remarquons qu'une D-partition $(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ est la somme de la partition "minimale" $(1,3,5,\ldots,2m-1)$ et d'un m-uplet $(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ d'entiers positifs croissants, lequel est donc une partition en au plus m parts. Ceci fournit la série génératrice des D-partitions sous la forme :

$$\sum_{\mu\text{ D-partition}} q^{|\mu|} = \sum_{m\geq 0}\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}.$$

Mais la première des identités de Rogers-Ramanujan (1894),

$$\sum_{m\geq 0}\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)} = \prod_{i\geq 0}\frac{1}{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})},$$

implique alors qu'un entier fixé admet autant de D-partitions que de partitions en parts congrues à ± 1 modulo 5. Ce résultat attend toujours une explication directe en termes de partitions.

Revenons sagement aux partitions à parts impaires. Le membre de droite de l'identité (2.1) énumère celles dont les parts sont inférieures ou égales à $2n-1$. Le membre de gauche énumère des n-uplets d'entiers qui peuvent être nuls, et ne sont donc pas, *stricto sensu*, des partitions. Qu'à cela ne tienne : en supprimant des éléments de $\mathcal{L}_n$ les entrées égales à zéro, on constate que le membre de gauche de l'identité (2.1) énumère les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_n$ suivant :

$$\mathcal{D}_n = \left\{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)\in\mathbb{N}^m : \ m\leq n \ \text{ et } \ 0<\frac{\mu_1}{n-m+1}\leq\frac{\mu_2}{n-m+2}\leq\ldots\leq\frac{\mu_m}{n}\right\}.$$

Mais l'inégalité

$$\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\geq\frac{n-m+i+1}{n-m+i} = 1+\frac{1}{n-m+i} > 1$$

implique que les éléments de $\mathcal{D}_n$ sont des partitions à parts distinctes. L'identité (2.1) apparaît donc comme une *version finie* de l'identité d'Euler (2.4) : elle décrit une famille de partitions à parts distinctes en bijection avec les partitions à parts impaires inférieures ou égales à $2n-1$. De plus, les ensembles $\mathcal{D}_n$ forment une suite croissante qui tend vers l'ensemble des partitions à parts distinctes : dans la limite $n\to\infty$, l'identité (2.1) redonne le résultat classique d'Euler.

2.2 Énumération de "lecture hall partitions"

Revenons au mois d'avril 95, au moment où K. E. m'envoya l'identité :

$$\sum_{0\leq\frac{\lambda_1}{1}\leq\frac{\lambda_2}{2}\leq\ldots\leq\frac{\lambda_n}{n}} q^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1-q^{2i+1}}. \tag{2.5}$$

Tout en cherchant à démontrer cette formule (dont le lecteur consciencieux aura déjà vérifié les cas $n=1,2$ et 3), j'essayai de remplacer les dénominateurs $1,2,\ldots,n$ par d'autres entiers $a_1,a_2,\ldots,a_n$

et de voir dans quelle mesure on obtenait des résultats aussi élégants que (2.5). Définissant donc l'ensemble des $(a_1, \ldots, a_n)$-*partitions* par

$$\mathcal{L}_{(a_1,\ldots,a_n)} = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n : 0 \leq \frac{\lambda_1}{a_1} \leq \frac{\lambda_2}{a_2} \leq \ldots \leq \frac{\lambda_n}{a_n} \right\} \tag{2.6}$$

et la série génératrice correspondante

$$S_{(a_1,\ldots,a_n)} = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{(a_1,\ldots,a_n)}} q^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n},$$

je constatai d'abord que, comme on pouvait s'y attendre, les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ "quelconques" ne donnaient rien de bon,

$$S_{(1,2,5,14,42)} = \frac{1+q^{13}+q^{26}+q^{39}+q^{40}+q^{52}+q^{53}+q^{62}+q^{75}+q^{88}}{(1-q)(1-q^4)(1-q^{61})(1-q^{63})(1-q^{64})},$$

mais que, pour quelques suites particulières, on obtenait des résultats pratiquement aussi simples que (2.5) (merci MAPLE),

$$S_{(1,3,5,12)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^4)(1-q^7)(1-q^{17})}, \tag{2.7}$$

$$S_{(1,3,5,12,19)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^8)(1-q^{13})(1-q^{31})}, \tag{2.8}$$

$$S_{(1,3,5,12,19,45)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^4)(1-q^7)(1-q^{17})(1-q^{27})(1-q^{64})}, \tag{2.9}$$

ou à peine plus compliqués :

$$S_{(1,3,5,7,9)} = \frac{(1-q^{21})}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^{16})(1-q^{24})}, \tag{2.10}$$

$$S_{(1,3,5,7,9,11)} = \frac{(1-q^{27})(1-q^{35})}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^9)(1-q^{20})(1-q^{32})(1-q^{36})}. \tag{2.11}$$

On remarquera que les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ des identités (2.7), (2.8) et (2.9) sont préfixes d'une même suite, tandis que les exposants apparaissant dans le membre de droite de ces identités semblent alternativement extraits de deux suites distinctes.

Le Kimmo-à-l'œil-vif diagnostiqua sans tarder les propriétés des suites $(a_1, \ldots, a_n)$ "sympathiques" : pour chacune d'elles, il existe deux entiers k et ℓ, supérieurs ou égaux à deux, tels que pour $i \geq 3$:

$$a_i = \begin{cases} \ell a_{i-1} - a_{i-2} & \text{si } i \text{ est pair} \\ k a_{i-1} - a_{i-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avant d'expliquer les identités ci-dessus, il est grand temps d'éclaircir le titre de ce chapitre (une invention de Kimmo Eriksson). Imaginez donc quelques instants que vous soyez architecte, et amené à bâtir un nouvel amphithéâtre, comportant n rangées de sièges de hauteur $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ disposées respectivement à distance $a_1, \ldots, a_n$ de l'orateur. En bon architecte, vous veillez à ce que chaque siège fournisse une vue dégagée sur l'orateur, c'est-à-dire à ce que la suite des pentes λ_i/a_i soit croissante, ce qui correspond à la définition (2.6) de l'ensemble $\mathcal{L}_{(a_1,\ldots,a_n)}$. On pourrait bien sûr traduire l'expression *lecture hall partition* en français, par *partition amphithéâtre* par exemple, mais on perdrait un peu du sel de l'expression initiale : celle-ci comporte en effet une *fausse* allusion aux polynômes de Hall[3], popularisés en combinatoire par le livre de I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials* [172]. Nantel Bergeron a frôlé la traduction parfaite en proposant d'appeler nos partitions "partitions de la salle" — ou de Lassalle ? — mais le mathématicien Michel Lassalle [158] n'est pas (encore) aussi célèbre que le vénérable Philip Hall. Mon dictionnaire m'a également fourni un révolutionnaire allemand du siècle dernier et de même patronyme[4], mais il est à craindre que ce type d'honneur le laisse indifférent : bref, je m'en suis tenue aux *lecture hall partitions* d'origine (Fig. 2.2).

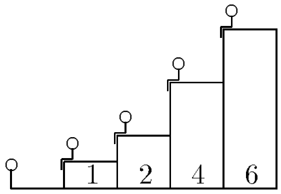


FIG. 2.2 – *Les plans d'un amphithéâtre de quatre rangs correspondant à la partition* $(1, 2, 4, 6)$.

2.2.1 Résultats principaux

Nous allons maintenant dérouler la liste des résultats auxquels nous a peu à peu conduits l'identité (2.5). Au cours de nos travaux, il est apparu que ces résultats se comprennent mieux en raffinant l'énumération : plutôt que de prendre simplement en compte le poids des partitions, nous considérerons leurs *poids pair et impair*, définis respectivement[5] par :

$$|\lambda|_e = \lambda_n + \lambda_{n-2} + \lambda_{n-4} \cdots \quad \text{et} \quad |\lambda|_o = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-3} + \lambda_{n-5} \cdots$$

En conséquence, nous évaluerons des séries génératrices du type suivant :

$$T_{(a_1,\ldots,a_n)}(x,y) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{(a_1,\ldots,a_n)}} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o}.$$

Voici donc notre résultat central.

Théorème 2.2.1 *Soient k et ℓ deux entiers supérieurs ou égaux à deux. Soit $a_1 = 1$, $a_2 = \ell$, et, pour $i \geq 3$,*

$$a_i = \begin{cases} \ell a_{i-1} - a_{i-2} & \text{si } i \text{ est pair} \\ k a_{i-1} - a_{i-2} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors les séries génératrices des "lecture hall partitions" associées aux suites $(a_1, \ldots, a_{2n})$ et $(a_1, \ldots, a_{2n-1})$ sont respectivement :

$$T_{(a_1,\ldots,a_{2n})}(x,y) = \prod_{i=1}^{2n} \frac{1}{1 - x^{a_i} y^{a_{i^*}}}$$

et

$$T_{(a_1,\ldots,a_{2n-1})}(x,y) = \prod_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{1 - x^{a^*_{i+1}} y^{a_{i-1}}},$$

où la suite $(a_i^*)_i$ est définie par les conditions initiales $a_1^* = 0$, $a_2^* = 1$ et la relation de récurrence (2.12). On pose également $a_0 = 0$.

[3] Qui décrivent la structure des sous-groupes d'un p-groupe abélien.
[4] Encore un béarnais en exil ?
[5] Pardon pour les notations peu francophones...

Ce théorème se généralise quelque peu pour produire des identités du type (2.10) et (2.11).

Théorème 2.2.2 *Soient k et ℓ deux entiers supérieurs ou égaux à deux. Soient a_1 et a_2 deux entiers strictement positifs satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

$$a_2 = a_1\ell \quad ou \quad a_2 = a_1\ell - 1 \quad ou \quad a_1 = 1.$$

Pour $i \geq 3$, définissons a_i par la relation de récurrence (2.12). Alors les séries génératrices des "lecture hall partitions" associées aux suites $(a_1, \ldots, a_{2n})$ et $(a_1, \ldots, a_{2n-1})$ sont respectivement :

$$T_{(a_1,\ldots,a_{2n})}(x,y) = \prod_{i=1}^{2n} \frac{1}{1 - x^{b_i} y^{b_i^*}} \prod_{i=n+1}^{2n} \frac{1 - \left(x^{b_i} y^{b_i^*}\right)^{a_{2n-i+1}}}{1 - x^{b_{2n-i+1} a_i} y^{b^*_{2n-i+2} a_{i-1}}}$$

et

$$T_{(a_1,\ldots,a_{2n-1})}(x,y) = \prod_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{1 - x^{b^*_{i+1}} y^{b_{i-1}}} \prod_{i=n+1}^{2n-1} \frac{1 - \left(x^{b^*_{i+1}} y^{b_{i-1}}\right)^{a_{2n-i}}}{1 - x^{b^*_{2n-i+1} a_i} y^{b_{2n-i} a_{i-1}}}$$

où les suites $(b_i)_i$ et $(b_i^*)_i$ sont définies par les conditions initiales $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_1^* = 0$, $b_2^* = 1$ et la relation de récurrence (2.12).

Exemples

1. Le cas $k = \ell = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 2$ donne $a_i = i$, c'est-à-dire que nous retrouvons le problème original. Le théorème 2.2.1 s'applique. La suite d'exposants $(a_i^*)_i$ est donnée par $a_i^* = i - 1$, et on obtient :

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{(1,2,\ldots,n)}} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x^i y^{i-1}}.$$

Bien sûr, la spécialisation $x = y = q$ redonne notre identité (2.5) de départ. Le changement de variables $x = qt$, $y = qt^{-1}$ mène à :

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{(1,2,\ldots,n)}} t^{|\lambda|_e - |\lambda|_o} q^{|\lambda|} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - tq^{2i-1}},$$

qui implique que les paramètres $|\lambda|$ et $\delta(\lambda) = |\lambda|_e - |\lambda|_o$ ont même distribution sur les $(1, 2, \ldots, n)$-partitions que les paramètres poids et longueur sur les partitions à parts impaires inférieures ou égales à $2n - 1$.

2. Le cas $k = \ell = 3$, $a_1 = 1, a_2 = 3$ donne $a_i = F_{2i-1}$, et le théorème 2.2.1 s'applique de nouveau. La suite d'exposants $(a_i^*)_i$ est donnée par $a_i^* = F_{2i-3}$, et on obtient :

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{(F_1,F_3,\ldots,F_{2n-1})}} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{F_{2i-1}} y^{F_{2i-3}}}.$$

Cette identité raffine l'identité (2.2) annoncée plus haut.

3. Le cas $k = 2$, $\ell = 3$, $a_1 = 1, a_2 = 3$ fournit en particulier les identités (2.7), (2.8) et (2.9).

4. Le cas $k = \ell = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 3$ donne $a_i = 2i - 1$ pour tout i, et relève de notre deuxième théorème. Les suites d'exposants $(b_i)_i$ et $(b_i^*)_i$ sont données par $b_i = i$ et $b_i^* = i - 1$, et on obtient :

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}_{(1,3,\ldots,2n-1)}} x^{|\lambda|_e} y^{|\lambda|_o} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - x^{i+1} y^i} \prod_{i=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n-1} \frac{1 - \left(x^{i+1} y^i\right)^{2n-2i-1}}{1 - \left(x^{2i+1} y^{2i-1}\right)^{n-i}}.$$

Les cas $n = 5$ et $n = 6$ impliquent respectivement les identités (2.10) et (2.11).

2.2.2 Théorèmes limite

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment le résultat d'Euler liant les partitions à parts distinctes et à parts impaires se déduit de l'identité initiale (2.5) par passage à la limite $n \to \infty$. Ce procédé s'étend aux suites $(a_1, \ldots, a_n)$ du théorème 2.2.1 et fournit des généralisations remarquables, jusque-là inconnues et sans doute difficiles à deviner, du résultat d'Euler. Voici par exemple le théorème limite correspondant au cas où $k = \ell$.

Corollaire 2.2.3 *Soit k un entier supérieur ou égal à deux. Soit $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des partitions $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ telles que le quotient μ_{i+1}/μ_i de deux parts consécutives soit toujours strictement plus grand que $\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$. La série génératrice des partitions de $\mathcal{E}_k$ est :*

$$\sum_{\mu \in \mathcal{E}_k} x^{|\mu|_e} y^{|\mu|_o} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^{a_i} y^{a_{i-1}}},$$

où la suite $(a_i)_i$ est définie par les conditions initiales $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = k$ et la relation de récurrence (2.12).

Exemples

1. Le cas $k = 2$ fournit un raffinement jusque-là inconnu du résultat d'Euler :

$$\sum_{\mu : \mu_1 < \ldots < \mu_m} t^{|\mu|_e - |\mu|_o} q^{|\mu|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - tq^{2i-1}} = \sum_{\mu : \mu_i \text{ impair}} t^{\ell(\mu)} q^{|\mu|}.$$

2. Pour $k \geq 3$, le nombre $\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ est irrationnel. Les résultats obtenus sont assez surprenants : on ne s'attend guère à trouver de belles séries génératrices en imposant des conditions aussi exotiques sur les quotients de parts consécutives. Pour le plaisir, énonçons le résultat “à la Euler” correspondant à $k = 3$:

> *tout entier admet autant de partitions telles que le quotient de deux parts consécutives soit supérieur à $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (le carré du nombre d'or...) que de partitions dont les parts appartiennent à l'ensemble $\{1, 4, 11, \ldots, F_{2i-1} + F_{2i+1}, \ldots\}$, où F_i est le $i^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci.*

Qui l'eût cru...

2.2.3 Une petite preuve

Je ne résiste pas à l'envie d'exposer une très courte preuve du théorème 2.2.1. Cet exposé devrait éclairer le propos selon lequel cette preuve était extrêmement simple, mais difficile à découvrir. Mais interrogeons-nous tout d'abord sur ce que pourrait être une preuve simple de ce théorème :

– une bijection, directe et élégante, entre les “lecture hall partitions” associées aux suites $(a_1, \ldots, a_n)$ et les partitions à parts dans un ensemble prescrit (ambitieux...) ;

– la description d'un procédé de construction des “lecture hall partitions” de longueur $n + 1$ à partir des “lecture hall partitions” de longueur n, qui permette de prouver le théorème *par récurrence* sur n.

C'est un tel procédé que nous avons trouvé, et que voici.

Proposition 2.2.4 *Soit* $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ *une suite croissante d'entiers strictement positifs. Soit* Υ *l'application suivante :*

$$\begin{array}{rlcl} \Upsilon: & \mathcal{L}_{(a_1,\dots,a_n)} \times \{0,1,\dots,a_{n+1}-1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{n+1} \\ & [(\lambda_1,\dots,\lambda_n); i] & \longmapsto & \lambda^* = (\lambda_1^*,\dots,\lambda_n^*,\lambda_{n+1}^*) \end{array}$$

où le n-uplet λ^* *est défini par*

$$\begin{cases} \lambda^*_{n+1} = \left\lceil \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\lambda_n \right\rceil + i, \\ \lambda^*_{n-2k} = \lambda_{n-2k}, \\ \lambda^*_{n-2k-1} = \left\lceil \dfrac{a_{n-2k-1}}{a_{n-2k-2}}\lambda_{n-2k-2} \right\rceil + \left\lfloor \dfrac{a_{n-2k-1}}{a_{n-2k}}\lambda_{n-2k} \right\rfloor - \lambda_{n-2k-1}. \end{cases}$$

Alors Υ *induit une bijection de* $\mathcal{L}_{(a_1,\dots,a_n)} \times \{0,1,\dots,a_{n+1}-1\}$ *sur* $\mathcal{L}_{(a_1,\dots,a_{n+1})}$*. De plus, si* $(a_1,\dots,a_{n+1})$ *satisfait les hypothèses du théorème* 2.2.1 *et si* $\lambda^* = \Upsilon(\lambda, i)$*, alors*

$$|\lambda^*|_o = |\lambda|_e, \qquad et \qquad |\lambda^*|_e = \begin{cases} i + k|\lambda|_e - |\lambda|_o & si\ n\ est\ pair, \\ i + \ell|\lambda|_e - |\lambda|_o & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$$

Cette proposition, une fois énoncée, est simple à vérifier, mais le choix (décisif) de λ^*_{n-2k-1} ne s'invente pas. Elle implique bien sûr les relations de récurrence suivantes :

$$T_{(a_1,\dots,a_{2n+1})}(x,y) = \frac{1}{1-x} T_{(a_1,\dots,a_{2n})}(x^k y, x^{-1}) \quad \text{et} \quad T_{(a_1,\dots,a_{2n})}(x,y) = \frac{1}{1-x} T_{(a_1,\dots,a_{2n-1})}(x^\ell y, x^{-1}),$$

qui, combinées à la condition initiale $T_{(a_1)}(x,y) = 1/(1-x)$, achèvent de prouver le théorème 2.2.1. La preuve du théorème 2.2.2 nécessite une étape supplémentaire, mais repose sur la même construction.

2.3 Quoi d'autre ?

Nous avons exposé dans le paragraphe précédent une famille de résultats assez remarquables, parfois même surprenants : le corollaire 2.2.3 a lui seul aurait suffi à me réjouir, tant les conditions qu'il impose sur les partitions énumérées me paraissent farfelues. Mais les plus grands enthousiasmes s'émoussent (et *a fortiori* les moins grands), et une interrogation point lentement dans l'esprit du mathématicien toujours plus gourmand : dans quelle mesure ces résultats sont-ils isolés ?

2.3.1 Une conjecture

Une des interprétations les plus restrictives de cette question amène à chercher une caractérisation des suites $(a_1,\dots,a_n)$ pour lesquelles la série génératrice $S_{(a_1,\dots,a_n)}$ est, disons l'inverse d'un polynôme. En attendant une meilleure terminologie, nous appellerons *suites polynomiques* de telles suites. Le théorème 2.2.1 décrit une famille de suites polynomiques indexées par deux entiers k et ℓ. Mais il y en existe d'autres. En particulier, si les quotients a_{i+1}/a_i sont entiers, les conditions sur les parts des "lecture hall partitions" associées à $(a_1,\dots,a_n)$ s'écrivent $\lambda_{i+1} \geq k_i\lambda_i$, où k_i est un entier ; ces conditions ne recèlent pas grand mystère, mais mènent à une série génératrice de la forme $\prod_{i\in I}(1-q^i)^{-1}$, pour un certain ensemble I. Donc ces suites sont également, et trivialement, des suites polynomiques. Nous conjecturons que toute suite polynomique s'obtient par concaténation d'une suite polynomique "triviale" et d'une suite du théorème 2.2.1, multipliée par un entier adéquat.

Conjecture 2.3.1 *Soit $(a_1,\ldots,a_n)$ une suite "polynomique", et soit m le plus petit entier tel que a_{m+1} ne divise pas a_{m+2}. Alors, il existe deux entiers k et ℓ supérieurs ou égaux à deux tels que $a_{m+1}=\ell a_m$ et pour $m+2\le i\le n$,*

$$a_i=\begin{cases}\ell a_{i-1}-a_{i-2} & \text{si } m+i+1 \text{ est pair}\\ k a_{i-1}-a_{i-2} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Cette conjecture repose sur une recherche de suites polynomiques faite par ordinateur. Elle implique plusieurs résultats plus faibles que nous ne savons pas non plus prouver, en particulier que a_1 divise a_i, $1\le i\le n$, dans toute suite polynomique. Il est en revanche facile de vérifier que pour les suites $(a_1,\ldots,a_n)$ de la conjecture ci-dessus, la série génératrice $S_{(a_1,\ldots,a_n)}$ est de la forme $\prod_{i\in I}(1-q^i)^{-1}$.

2.3.2 Réciprocité

L'énumération des *lecture hall partitions* n'est qu'un cas particulier d'une théorie plus vaste : celle de l'énumération des solutions positives des systèmes d'équations diophantiennes linéaires, initialement développée par Macmahon [173, Vol. 2], et reprise plus récemment par Stanley [206, 205]. Plus précisément, nos partitions rentrent dans le cadre de la théorie d'Ehrhart sur l'énumération des points à coordonnées entières situés dans les multiples entiers d'un polytope convexe rationnel. En effet, soit $a=(a_1,\ldots,a_n)$ une suite croissante d'entiers positifs, et soit $\mathcal{P}$ le polytope convexe de $\mathbb{R}^n$ suivant:

$$\mathcal{P}=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_1+\cdots+x_n=1 \ \text{ et } \ 0\le\frac{x_1}{a_1}\le\ldots\le\frac{x_n}{a_n}\right\}.$$

Alors les points à coordonnées entières de $m\mathcal{P}$ sont les *lecture hall partitions* de poids m associées à $(a_1,\ldots,a_n)$.

C'est sur les conseils de P. Flajolet, suivis des indications de S. Kerov, que nous avons re-situé nos partitions dans ce contexte général. La lecture d'un article de Stanley [203] sur les théorèmes de réciprocité nous a ensuite conduits vers le développement suivant, et vers notre unique résultat *caractérisant* une famille de suites $(a_1,\ldots,a_n)$ ayant une belle propriété, donnée en termes des lecture hall partitions associées.

Soit donc $a=(a_1,\ldots,a_n)$ une suite croissante d'entiers strictement positifs. L'ensemble $\mathcal{L}_a$ désigne toujours l'ensemble des a-partitions. Soit $\bar{\mathcal{L}}_a$ l'ensemble des a-partitions *strictes* :

$$\bar{\mathcal{L}}_a=\left\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n:\ 0<\frac{\lambda_1}{a_1}<\ldots<\frac{\lambda_n}{a_n}\right\}.$$

Les *séries génératrices complètes* de $\mathcal{L}_a$ et $\bar{\mathcal{L}}_a$ sont définies par :

$$G_a(X)=\sum_{\lambda\in\mathcal{L}_a}X_1^{\lambda_1}\ldots X_n^{\lambda_n} \qquad \text{et} \qquad \bar{G}_a(X)=\sum_{\lambda\in\bar{\mathcal{L}}_a}X_1^{\lambda_1}\ldots X_n^{\lambda_n}$$

où X désigne le n-uplet $(X_1,\ldots,X_n)$. Remarquons que $G_a(X)$ et $\bar{G}_a(X)$ décrivent complètement les ensembles $\mathcal{L}_a$ et $\bar{\mathcal{L}}_a$. Récemment, G. Andrews a donné une nouvelle preuve de l'identité initiale (2.1) basée sur l'étude de la série génératrice complète correspondante [9].

Nous avons trouvé une manière de décomposer les a-partitions (strictes) en a-partitions *standard* et a-partitions *réduites* (strictes) qui permet de prouver combinatoirement le résultat suivant, lequel n'est qu'un avatar d'un théorème de réciprocité général s'appliquant aux systèmes diophantiens linéaires [203].

Proposition 2.3.2 *Les séries génératrices complètes $G_a(X)$ et $\bar{G}_a(X)$ des a-partitions et des a-partitions strictes sont des fractions rationnelles en $X_1, \ldots, X_n$ de la forme :*

$$G_a(X) = \frac{R(X)}{\prod_{i=1}^n (1 - X_i^{a_i} \cdots X_n^{a_n})} \quad et \quad \bar{G}_a(X) = \frac{\bar{R}(X)}{\prod_{i=1}^n (1 - X_i^{a_i} \cdots X_n^{a_n})}$$

où $R(X)$ et $\bar{R}(X)$ sont des polynômes en $X_1, \ldots, X_n$. De plus, ces deux fractions sont reliées par l'identité suivante :

$$\bar{G}_a(X) = (-1)^n G_a(1/X),$$

où $G_a(1/X) = G_a(1/X_1, \ldots, 1/X_n)$. En particulier, les séries génératrices des a-partitions et des a-partitions strictes, comptées selon leur poids (ou selon leurs poids pair et impair) satisfont une relation de réciprocité semblable. Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 permettent donc d'énumérer les a-partitions strictes pour certaines suites a.

Exemple. La série génératrice des partitions (λ_1, λ_2) satisfaisant $0 \leq \lambda_1/3 \leq \lambda_2/4$ est

$$G_{(3,4)}(X_1, X_2) = \frac{1 + X_1 X_2^2 + X_1^2 X_2^3}{(1 - X_2)(1 - X_1^3 X_2^4)}$$

et celle des partitions (λ_1, λ_2) satisfaisant $0 < \lambda_1/3 < \lambda_2/4$ est

$$\bar{G}_{(3,4)}(X_1, X_2) = X_1 X_2^2 \frac{1 + X_1 X_2 + X_1^2 X_2^3}{(1 - X_2)(1 - X_1^3 X_2^4)} = G_{(3,4)}(1/X_1, 1/X_2).$$

Nous arrivons maintenant à notre unique résultat caractérisant les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ ayant une belle propriété. Il concerne les suites *auto-réciproques*, c'est-à-dire telles que les séries $G_a(X)$ et $G_a(1/X)$ ne diffèrent que par un monôme :

$$G_a(1/X) = (-1)^n X_1^{\beta_1} \ldots X_n^{\beta_n} G_a(X).$$

Proposition 2.3.3 *Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite croissante d'entiers positifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) a est auto-réciproque et $\mathrm{pgcd}(a_i, a_{i+1}) = 1$ *pour* $1 \leq i < n$,

(ii) il existe n entiers $u_1, \ldots, u_n$ tels que $u_1 \geq 1$, $u_i \geq 2$ pour $2 \leq i \leq n$, et pour $i \geq 0$

$$a_{i+1} = u_{i+1} a_i - a_{i-1} \tag{2.13}$$

avec les valeurs initiales $a_{-1} = 0$ et $a_0 = 1$.

On ne peut que rapprocher la forme de la condition (2.13) des relations de récurrence (2.12) satisfaites par les suites du théorème 2.2.1, qui sont auto-réciproques. Remarquons que les conditions de la proposition ci-dessus peuvent être reformulées en disant que a_i est le dénominateur de la $i^{\text{ème}}$ réduite de la fraction continue

$$\cfrac{1}{u_1 - \cfrac{1}{u_2 - \cfrac{1}{u_3 - \cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

2.3.3 Perspectives lointaines

Nous n'avons considéré jusque-là que des systèmes d'inéquations de la forme :

$$0 \le \frac{\lambda_1}{a_1} \le \frac{\lambda_2}{a_2} \le \ldots \le \frac{\lambda_n}{a_n}.$$

On peut espérer que des résultats élégants existent pour d'autres systèmes d'inéquations diophantiennes. De fait, les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 permettent d'écrire de tels résultats [52]. Par exemple, la série génératrice des partitions $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ satisfaisant

$$0 \le \frac{\lambda_1}{F_1} \le \frac{\lambda_1+\lambda_2}{F_3} \le \frac{\lambda_2+\lambda_3}{F_5} \le \cdots \le \frac{\lambda_{n-1}+\lambda_n}{F_{2n-1}},$$

comptées selon leur poids (q) et leur longueur (t), est

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1-t^{F_{2i}} q^{F_{2i+1}}}.$$

Mais cette identité n'est qu'une conséquence du théorème 2.2.1 dans le cas $k = \ell = 3$, et n'apporte rien de neuf. Pour chercher des identités vraiment nouvelles, on pourrait se guider sur des résultats classiques faisant apparaître des produits infinis de termes $(1-q^i)^{-1}$, dont on chercherait des versions finies. On peut par exemple penser à une généralisation simple du résultat d'Euler (2.4) : il y a autant de partitions de n ayant au plus d parts égales que de partitions de n à parts non divisibles par $d+1$ [130]. En étant franchement optimiste, on peut rêver d'une version finie des identités de Rogers-Ramanujan, dont nous rappelons la première :

$$\sum_{\mu : \mu_{i+1} \ge 2+\mu_i} q^{|\mu|} = \sum_{m \ge 0} \frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)} = \prod_{i \ge 0} \frac{1}{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})}.$$

Chapitre 3

Énumération de polygones et d'animaux

L'énumération de figures géométriques tracées sur des réseaux de dimension deux ou trois, appelées animaux, polyominos ou polygones, a été le thème principal des recherches que j'ai effectuées depuis 1989. Pour cette raison sans doute, j'ai souhaité écrire, plutôt qu'une simple présentation de mes travaux, une tentative de synthèse sur ce sujet.

À vrai dire, ce chapitre poursuit des objectifs variés, et peut-être contradictoires, puisqu'on pourrait les résumer dans le souhait suivant : que chacun y trouve ce qu'il y cherche. Plus précisément, je voudrais d'abord que le lecteur, simple curieux ou déjà sympathisant, parvienne à concevoir un tableau sommaire mais raisonnablement juste des problèmes étudiés et du type de résultats aujourd'hui accessibles. Mais je voudrais également que ce chapitre puisse être utile à un chercheur travaillant déjà dans le domaine, notamment par le triple recensement que j'ai essayé de faire : résultats, méthodes, et surtout, bibliographie.

Ce dernier travail s'est révélé assez agréable, surtout dans sa partie "historique", même si l'histoire, dans ce domaine, n'a guère qu'une cinquantaine d'années. Je suppose que viser l'exhaustivité en dressant une bibliographie sur un sujet est *a priori* désespéré, et qu'il est classique que plusieurs groupes publient indépendamment les mêmes résultats, en ignorant les travaux les uns des autres. Dans le cas présent, cette difficulté est encore accrue par le fait que des groupes de mathématiciens (ou d'informaticiens...) et de physiciens se sont intéressés aux mêmes problèmes, en publiant dans des revues d'audiences disjointes. J'aimerais que ma bibliographie invite à une meilleure reconnaissance des productions des deux communautés. Mon dernier objectif, ou mon dernier vœu, est que mes rapporteurs parviennent à démêler de ce chapitre mes propres contributions.

Voici maintenant comment est composé ce chapitre. Les deux premières parties sont consacrées à trois questions qui me paraissent être les fondements des travaux décrits par la suite : l'énumération des animaux, des polygones et des chemins auto-évitants sur un graphe régulier infini (un *réseau* de dimension au moins deux). Ces trois questions sont ouvertes, et certainement extrêmement difficiles. Seuls quelques résultats asymptotiques, en général remarquables mais souvent non rigoureux, sont connus. Il est courant de réagir à une telle obstination en s'attaquant à des problèmes plus simples : c'est ainsi que s'est développée une énorme littérature consacrée à l'énumération de familles restreintes d'animaux et de polygones (et, dans une moindre mesure, de chemins auto-évitants). C'est dans ce contexte que s'inscrivent mes travaux.

L'ensemble des familles d'objets qu'on est parvenu à énumérer peut sembler varié et multiforme. À l'inspection, il apparaît que seuls deux types de restrictions sur les objets de base permettent à ce jour d'obtenir des résultats exacts. La première consiste à briser la symétrie du réseau, en introduisant une direction privilégiée selon laquelle doivent croître les animaux. La seconde consiste à imposer sur les animaux (ou les polygones) une condition de convexité.

La troisième partie de ce chapitre est consacrée aux animaux dirigés, pour lesquels, grossièrement, deux résultats sont connus, l'un en dimension deux et l'autre en dimension trois. Une même méthode, inventée par le physicien D. Dhar, fournit ces deux résultats. Je l'ai récemment recyclée et étendue pour obtenir de nouveaux résultats sur des réseaux de dimension deux. Toutefois, cette méthode peut laisser le combinatoriste sur sa faim : elle mène à des résultats de forme simple qu'on souhaiterait comprendre plus directement. La notion d'empilements de pièces, due à Viennot, répond en partie à cette attente en fournissant des preuves simples et élégantes d'un certain nombre de résultats en dimension deux.

La quatrième partie est consacrée aux animaux du réseau carré présentant une propriété de convexité. Ici, les résultats connus sont très nombreux, à la fois parce que beaucoup de familles d'animaux un tant soit peu convexes ont été étudiées, et parce que plusieurs paramètres d'énumération sont envisageables. L'abondance de résultats rend cette partie du chapitre très volumineuse. Mais que le lecteur se console : ce pourrait être pire. Je me suis en effet amusée à combiner de toutes les façons possibles des propriétés de convexité et de croissance dirigée selon quatre directions : on aboutit à la définition de trente classes d'animaux, ni triviales ni symétriques les unes des autres, parmi lesquelles une dizaine seulement ont été étudiées. Après ce recensement, nous présentons les principaux résultats connus ; les nombreuses publications sur le sujet sont classées à l'intérieur de tableaux moins indigestes que la donnée brute de la bibliographie. Nous mettons enfin un peu d'ordre dans les méthodes utilisées pour prouver ces résultats, en considérant que la plupart d'entre elles ne sont que des façons plus ou moins adroites et efficaces d'exploiter l'existence de deux descriptions récursives (ou décompositions) des structures convexes : la décomposition "taille de guêpe" et la décomposition par strates. Nous décrivons ces deux décompositions et les procédés permettant de les convertir en résultats exacts.

La cinquième et dernière partie n'est guère épaisse : elle est consacrée à la convexité en dimension supérieure ou égale à trois, pour laquelle peu de résultats sont connus.

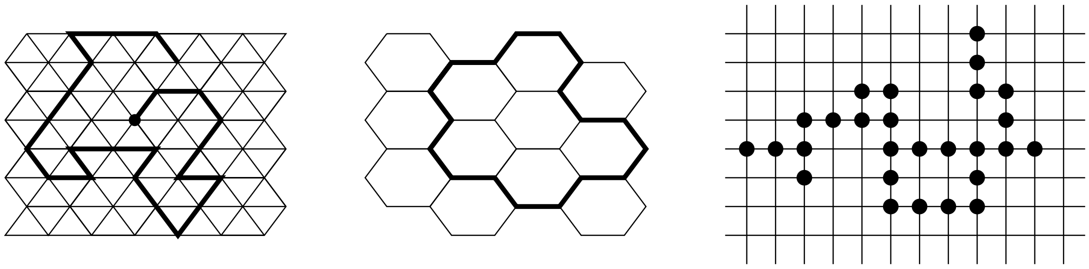


FIG. 3.1 – *Une marche AE, un polygone AE et un animal sur des réseaux de dimension deux.*

3.1 Terminologie

On considère un graphe G, non orienté. Un *chemin* (ou une *marche*) *auto-évitant(e)* de longueur n est une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ de sommets *distincts* de G telle que s_i et s_{i+1} soient voisins pour $0 \leq i < n$. Un *polygone auto-évitant* de longueur n est un cycle élémentaire de n sommets, c'est-à-dire une suite $(s_1, \ldots, s_n)$ de n sommets distincts telle que s_i et s_{i+1} soient voisins pour $1 \leq i \leq n$, avec la convention $s_{n+1} = s_1$. Un *animal A d'aire n* est un ensemble *connexe* de n sommets, c'est-à-dire que deux sommets quelconques de A sont toujours reliés par un chemin de G qui ne visite que des sommets de A. Cette définition est en fait celle d'un animal *de site* ; il existe une définition similaire pour les animaux *de lien*, qui sont des ensembles connexes d'*arêtes* de G.

Dans tous les problèmes que nous évoquerons ici, le graphe G a pour sommets un ensemble infini de points de $\mathbb{R}^d$, laissé invariant par d translations linéairement indépendantes. Par abus de langage, nous appellerons *réseau* un tel graphe. Ainsi, en dimension deux, les graphes considérés seront les réseaux carré, triangulaire et hexagonal. En dimension trois et au delà, on n'évoquera guère que les réseaux hypercubiques $\mathbb{Z}^d$ et certaines de leurs variantes. Sur tous ces réseaux, animaux, chemins et polygones auto-évitants sont définis à translation près (fig. 3.1).

Sur les réseaux de dimension deux, on considère également les *polyominos*, c'est-à-dire les unions finies et d'intérieur connexe de cellules. En remplaçant chacune des cellules du réseau carré par son centre, on constate que les polyominos du réseau carré sont en fait équivalents aux animaux sur réseau carré. De même, la dualité des réseaux triangulaire et hexagonal associe les animaux du réseau triangulaire aux polyominos sur réseau hexagonal, et vice-versa (fig. 3.2). Remarquons que les polygones AE correspondent aux polyominos "sans trou", c'est-à-dire simplement connexes.

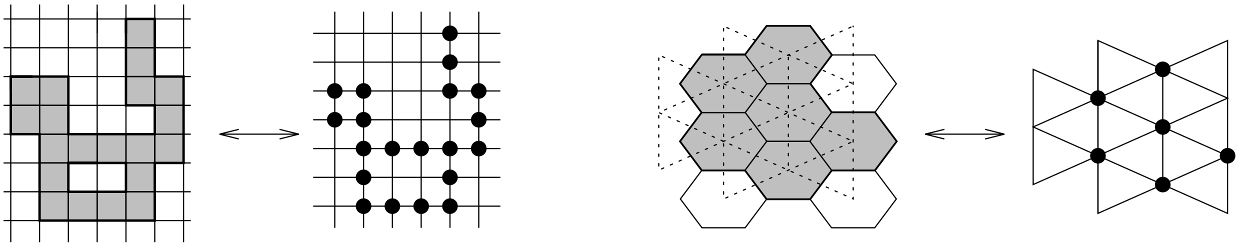


FIG. 3.2 – *La dualité polyominos/animaux.*

Ces objets élémentaires semblent avoir plusieurs origines indépendantes, en mathématiques (et souvent comme "récréations mathématiques"), et en physique. Le terme *polyomino*, destiné bien sûr à généraliser nos dominos familiers, semble avoir été introduit par Golomb en 1954 [131], dans un article sur les pavages de rectangles par des polyominos. Dans les années suivantes, certains auteurs préfèrent parler de *n-ominos* [25, 151]. Par ailleurs, Temperley publie en 1956 un article dans lequel il relie certains problèmes de physique statistique à l'énumération de "domains" (en anglais), lesquels correspondent exactement aux polyominos sans trou (ou polygones) du réseau carré [213]. Pour les chemins AE, on pourra se reporter à l'article de Fisher et Sykes [111] et aux références qu'ils donnent. Un article de Harary, datant de 1967, recense également l'énumération des animaux parmi les problèmes de théorie des graphes reliés à la physique [144]. L'auteur justifie le terme *animal*, déjà utilisé par Read [195] par la question d'un "biologiste anonyme", qui aurait demandé "combien de formes peut prendre un animal ayant un nombre donné de cellules". Stauffer et Aharony, dans leur livre sur la percolation [207], proposent une étymologie sans doute plus fantaisiste, mais que les combinatoristes ne désavoueront pas : "one calls these configurations *animals* since they have a certain similarity with multicellular living beings which might enter your nightmares if you counted them too long".

Notre propos central sera l'*énumération* des polygones AE (auto-évitants) et des animaux, mais d'autres approches de ces objets sont possibles et doivent être signalées. Les problèmes de pavage de, ou par des, polyominos (fig. 3.3) font notamment l'objet d'une riche littérature, dont les débuts remontent aux années 50 [131, 124, 132, 133, 70]. Récemment, on s'est plus interrogé sur la *décidabilité* de certains problèmes de pavage que sur la possibilité de paver telle ou telle forme [198, 23]. Signalons également que les polygones sont utilisés pour coder des images en informatique graphique [159].

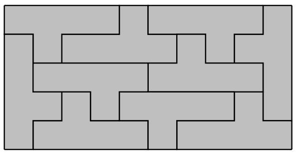


FIG. 3.3 – *Pavage d'un rectangle par un pentomino.*

3.2 Difficulté de l'énumération

3.2.1 Que diable allaient-ils faire dans cette galère?

Il convient sans doute, pour commencer, de chercher à motiver les très nombreux travaux portant sur l'énumération de ces objets : pourquoi compter les animaux (ou les chemins AE, ou les polygones AE)? On peut d'abord enrichir la réponse traditionnelle, mais un peu sèche, "Pourquoi pas?" en arguant que la simplicité des objets rend ces problèmes assez naturels, voire attirants. Mais il y a plus.

Tout d'abord, les chemins auto-évitants (et leurs proches cousins, les polygones AE) bénéficient d'une belle motivation probabiliste, en tant que problème non markovien type : si les propriétés des marches aléatoires[1] sur un réseau sont bien comprises, les marches AE continuent de défier les techniques probabilistes, et les questions les plus simples les concernant ne sont pas résolues. Pour comparer l'état des connaissances sur ces deux modèles, rappelons qu'il y a, bien évidemment, 4^n chemins de longueur n sur le réseau carré, et que leur extrémité se trouve en moyenne à distance $\sqrt{n}$ de leur origine (à une constante multiplicative près). En revanche, on ne connaît ni le nombre de chemins AE de longueur n (même asymptotiquement), ni la distance moyenne de leur extrémité à l'origine, que l'on suppose toutefois être de l'ordre de $n^{3/4}$. Notons qu'il est intuitivement satisfaisant qu'une marche AE s'éloigne plus vite de son point de départ qu'une marche aléatoire. Dans le même ordre d'idées, on conçoit que la contrainte d'être auto-évitant soit moins restrictive en grande dimension : nous verrons plus loin que l'un des rares résultats connus dans ce domaine établit que, d'une certaine façon, les chemins AE se comportent comme les chemins aléatoires en dimension supérieure ou égale à cinq. Signalons aussi que le caractère non markovien des marches AE rend très difficile leur énumération par ordinateur. Une récente avancée a toutefois permis leur énumération jusqu'à la longueur 51 (sur réseau carré) [69] ; jusque-là, ces données n'étaient connues que pour une longueur inférieure à 40 [67].

Plus généralement, de nombreuses motivations proviennent de la physique, à la fois parce que des correspondances explicites existent entre certains modèles de physique statistique et des problèmes d'énumération, et, plus généralement, parce que d'autres modèles de physique ont une "saveur" voisine : les animaux, les marches et les polygones AE sont devenus des modèles de référence parmi les nombreux problèmes de théorie des graphes apparaissant en physique statistique. Au rang des correspondances explicites, citons le lien classique entre les modèles de percolation et l'énumération des animaux [207, 46], la remarquable équivalence, d'abord montrée par Dhar [86], puis combinatoirement par Viennot [218, 219], entre modèles à particules dures et animaux *dirigés*, et enfin la possibilité de voir le problème des marches AE comme la limite $n \to 0$ du modèle à n vecteurs (ou modèle sphérique), découverte par de Gennes [75, 54, 90]. Les chemins et polygones AE sont par ailleurs des modèles classiques de polymères. Il est intéressant de remarquer que ce sont jusque-là surtout les problèmes combinatoires qui ont bénéficié d'avancées faites sur

[1] Par marche aléatoire, j'entends ici une marche dans laquelle le marcheur choisit à chaque instant, avec probabilité uniforme, l'une des directions qui s'offrent à lui, indépendamment de sa trajectoire passée.

le versant "physique", et non l'inverse : la résolution par Baxter [20, 22] du modèle des hexagones durs a permis d'énumérer les animaux dirigés sur une variante du réseau cubique [86], tandis que les travaux de Nienhuis sur le modèle sphérique ([182, 183], pour moi incompréhensibles) mènent à des résultats non rigoureux, mais néanmoins remarquables, sur les marches et polygones AE en dimension deux.

3.2.2 De rares résultats

Commençons par citer Temperley, qui, dans un article de 1956 auquel nous ferons de nombreuses fois référence [213], qualifie le problème consistant à énumérer les "domains" (polyominos sans trou) d'"extremely stubborn". Ce jugement sévère n'a fait que se justifier dans les quarante dernières années. Trouver une formule exacte pour le nombre a_n d'animaux d'aire n sur un réseau de dimension au moins deux paraît actuellement hors de portée. Le même commentaire s'applique au nombre de marches (ou de polygones) AE de longueur n, et à toute tentative de caractérisation de ces suites de nombres.

La meilleure preuve de la difficulté extrême de ces problèmes réside peut-être dans le fait que l'énumération asymptotique elle-même est très difficile. De façon générale, on s'attend à ce que les nombres a_n d'animaux, de polygones ou de chemins, aient une croissance essentiellement exponentielle, et plus précisément à ce que

$$a_n \sim A\mu^n n^{\gamma-1} \tag{3.1}$$

pour certaines valeurs de A, μ (appelée *constante de croissance, ou de connectivité*) et γ (un *exposant critique*). Dans certains cas, on s'attend également à des termes correctifs en $\log(n)$, notamment pour les marches AE en dimension quatre. En outre, la très remarquable "hypothèse d'universalité" conjecture que l'exposant γ ne dépend que de la *dimension* du réseau considéré ; il serait donc par exemple le même pour les marches AE sur les réseaux carré, triangulaire et hexagonal.

La précision de cette hypothèse contraste avec la relative pauvreté des résultats effectivement obtenus : en général, on sait seulement prouver l'existence d'une constante μ vers laquelle converge la suite $a_n^{1/n}$, ce qui est bien sûr plus faible que l'expression asymptotique (3.1). L'existence de cette limite μ s'obtient facilement par un argument de sous-multiplicativité (pour les marches AE) ou de sur-multiplicativité (pour les polygones AE et les animaux). En outre, la constante μ est la même pour les polygones et les marches AE, sur un réseau donné [143].

En ce qui concerne les animaux, les travaux se sont concentrés sur l'estimation de $\mu = \lim a_n^{1/n}$ pour les réseaux de dimension deux, et plus particulièrement le réseau carré. Il paraît difficile d'obtenir des bornes fines sur μ, particulièrement des bornes supérieures, et il semble que l'encadrement le plus précis connu à ce jour soit [2]:

$$3.72 < \mu < 4.65.$$

Parallèlement, des programmes d'énumération de plus en plus élaborés tournant sur des machines de plus en plus puissantes ont permis de connaître le nombre d'animaux sur réseau carré jusqu'à l'aire 25 [196, 68]. L'analyse de la suite de nombres ainsi obtenue mène à l'estimation $\mu = 4.06265 \pm 0.00005$ et permet de conjecturer que l'exposant γ vaut zéro en dimension deux.

Les marches et polygones AE ont fait l'objet d'études plus nombreuses encore, et des résultats très remarquables sont connus ou conjecturés. Concernant la constante de connectivité μ, qui, rappelons-le, est la même pour les marches et les polygones, il n'existe qu'une conjecture

[2] Je viens de recevoir un manuscrit de David Klarner, dans lequel il établit une borne inférieure plus précise, de l'ordre de 3.9.

remarquable, à savoir $\mu = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ pour le réseau hexagonal[3]. Ce résultat très alléchant par sa simplicité possède plusieurs preuves non rigoureuses, mais fort heureusement convergentes, et est confirmé par les études numériques [171, 96]. Les mêmes travaux (non rigoureux) fournissent $\gamma_w = 43/32$ (pour les chemins AE) et $\gamma_p = -3/2$ (pour les polygones AE) en dimension deux. En dimension trois, seules des estimations de γ_w et γ_p sont connues, alors qu'on conjecture que $\gamma_w = 1$ en dimension quatre, et que cette identité a été *prouvée* par Hara et Slade en 1992 en dimension supérieure ou égale à cinq, où les marches auto-évitantes rejoignent donc les marches aléatoires, pour lesquelles γ vaut également un [174].

3.2.3 Une lueur dans la tempête : des modèles plus simples

Dans son article de 1956, Temperley, après avoir statué sur la caractère "extremely stubborn" du problème général (dans son cas, l'énumération des polygones AE), montre par l'exemple comment le contourner : en cherchant à énumérer des sous-classes plus simples de polygones. Depuis, cette voie a été très largement suivie. Nous ne traiterons ici que des familles d'animaux et de polygones, mais des classes restreintes de chemins AE ont aussi été étudiées : chemins dirigés [197], chemins sur réseaux de largeur bornée [157, 223], spirales [210, 141, 140], etc.

À ma connaissance, toutes les familles d'objets (animaux ou polygones) qui ont pu être énumérées exactement présentent l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes : ces objets sont soit *dirigés* le long d'une direction privilégiée, soit présentent une propriété de *convexité*. Ces deux conditions menant à des problèmes et des techniques de nature différente, elles seront traitées indépendamment.

3.3 Animaux dirigés

3.3.1 Définition et petit historique

L'idée de modifier certains modèles classiques isotropes de physique statistique en brisant une symétrie et en spécifiant une direction privilégiée semble s'être développée principalement dans les années 70, bien que les modèles de percolation aient été définis dès le début sur des graphes pouvant être orientés [59]. Dans un certain nombre de cas, cette modification simplifie grandement le problème d'origine, souvent intraitable [197]. Cela explique sans doute le succès de cette idée, qui s'est notamment manifesté au début des années 80 par une effervescence d'articles consacrés aux *animaux dirigés*.

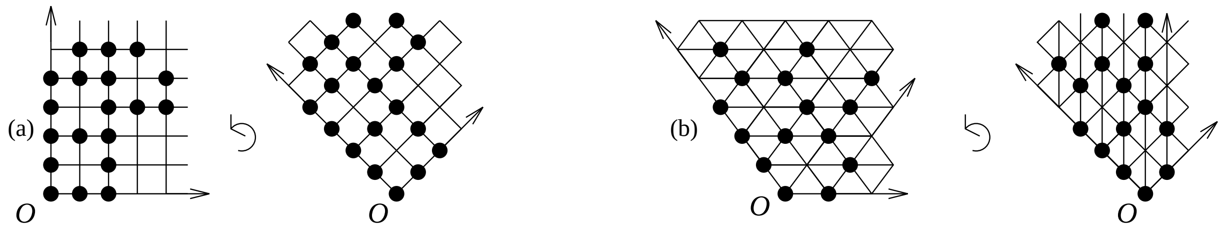


FIG. 3.4 – *Animaux dirigés sur les réseaux carré et triangulaire.*

Étant donné un graphe *orienté* G pourvu d'une origine (ou *source*) O, un *animal dirigé* A d'aire n est un ensemble de n sommets de G, contenant O, tel que chaque sommet de A puisse être atteint

[3] Signalons toutefois que la constante de connectivité du réseau carré pourrait être solution de l'équation $581 + 7\mu^2 - 13\mu^3 = 0$ [67].

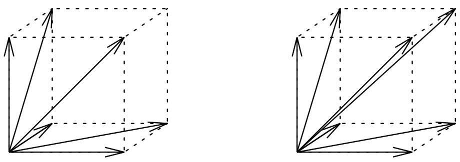


FIG. 3.5 – *Deux réseaux de dimension trois.*

depuis O via un chemin *orienté* de G qui ne visite que des sommets de A. Ces animaux sont donc bien sûr également des animaux (tout court) au sens défini précédemment. Comme auparavant, les graphes auxquels nous nous intéresserons sont des "réseaux". La figure 3.4 représente des animaux dirigés sur les réseaux carré et triangulaire, que l'on se plaît parfois à faire pivoter, de façon à orienter toutes les arêtes vers le haut. Par ailleurs, la figure 3.5 représente les cellules élémentaires de deux variantes du réseau cubique que nous considérerons par la suite. Notons que les réseaux 3.4.b et 3.5.b s'obtiennent à partir des réseaux 3.4.a et 3.5.a respectivement en ajoutant les diagonales des cellules élémentaires.

Les résultats les plus remarquables relatifs aux animaux dirigés ont été démontrés dès 1982-1983. La série génératrice (suivant l'aire) des animaux dirigés sur réseau carré est

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1\right). \tag{3.2}$$

Celle des animaux dirigés sur réseau triangulaire est encore plus simple :

$$T(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1\right), \tag{3.3}$$

ce qui signifie que le nombre d'animaux d'aire n sur ce réseau est $\frac{1}{2}\binom{2n}{n} = (2n)!/2/n!^2$. Ces deux résultats ont été conjecturés par Dhar, Phani et Barma [87] puis prouvés presqu'aussitôt par Dhar lui-même [85]. À la même époque, par une technique de matrice de transfert, Nadal, Derrida et Vannimenus étudient les animaux dirigés du réseau carré sur un ruban de largeur bornée [181]. Ils prouvent que la constante de connectivité est 3, et conjecturent des expressions qui généralisent (3.2) pour les animaux ayant plusieurs points source. Ces conjectures sont ensuite prouvées en 1983 par Hakim et Nadal, grâce à une étude fine des matrices de transfert [142]. Chez les combinatoristes, Gouyou-Beauchamps et Viennot réussissent un tour de force bijectif [135] en appliquant la méthodologie de Schützenberger pour énumérer les animaux sur réseau carré : ils décrivent une bijection extrêmement complexe entre les animaux dirigés et les *facteurs gauches de mots de Motzkin*, naturellement comptés par (3.2). Leur construction permet d'évaluer la largeur moyenne des animaux d'aire n (asymptotiquement $2\sqrt{n}/3$).

Nous décrivons ci-dessous deux approches qui paraissent plus générales que les trois preuves mentionnées ci-dessus et donc — au moins potentiellement — plus fructueuses : il s'agit d'une part du lien avec les modèles à particules dures découvert par Dhar en 1983, qui a notamment permis l'énumération des animaux dirigés sur le réseau de la figure 3.5.a [86], et d'autre part de l'utilisation des empilements de pièces, inspirée par Viennot [219].

3.3.2 Animaux et modèles de gaz sur réseau

Dans un article de 1983 [86], Dhar démontre que la série génératrice $A(t)$ des animaux dirigés sur certains réseaux de dimension d est l'opposé de la densité d'une certaine distribution de par-

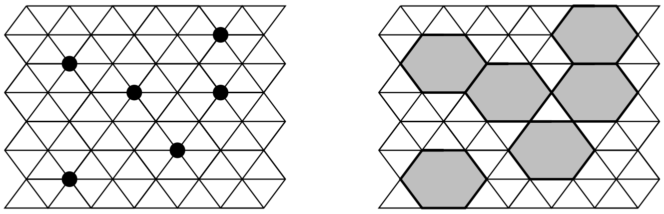


FIG. 3.6 – *Une configuration à particules dures sur réseau triangulaire et la configuration d'hexagones correspondante.*

ticules (un gaz) sur un réseau de dimension $d-1$. Cette distribution est caractérisée par le fait qu'elle est invariante par une transition probabiliste dépendant du paramètre t. Dans les exemples étudiés par Dhar, la distribution invariante est facile à décrire : c'est une distribution de *particules dures*, c'est-à-dire qui interdit les configurations dans lesquelles deux particules seraient placées sur des sommets voisins du réseau (fig. 3.6). Les configurations C permises apparaissent avec une probabilité proportionnelle à $z^{|C|}$, où $|C|$ désigne le nombre de particules de C et z l'*activité* du gaz, qui est une fraction rationnelle simple de t.

Ainsi, Dhar ramène tout d'abord l'énumération des animaux dirigés sur les réseaux carré et triangulaire à la résolution (classique) d'un modèle à particules dures sur une droite. Il redémontre ainsi les identités (3.2) et (3.3) ainsi que les résultats plus précis de Hakim et Nadal. Il ramène ensuite l'énumération des animaux dirigés sur le réseau cubique et sur le réseau 3.5.a à la résolution de modèles à particules dures sur les réseaux carré et triangulaire respectivement. Ces modèles sont connus sous le nom de modèle des carrés (resp. des hexagones) durs (fig. 3.6). Si le modèle des carrés durs est toujours ouvert, celui des hexagones durs a été résolu en 1980 par Baxter [20], et sa densité est une fonction algébrique (de degré 12) de l'activité z [146]. En conséquence, la série génératrice des animaux dirigés sur le réseau 3.5.a est solution d'une équation algébrique de degré 12. Le nombre a_n d'animaux d'aire n est asymptotiquement équivalent à $A\mu^n n^{-5/6}$, où $\mu = (9+\sqrt{5})/2$.

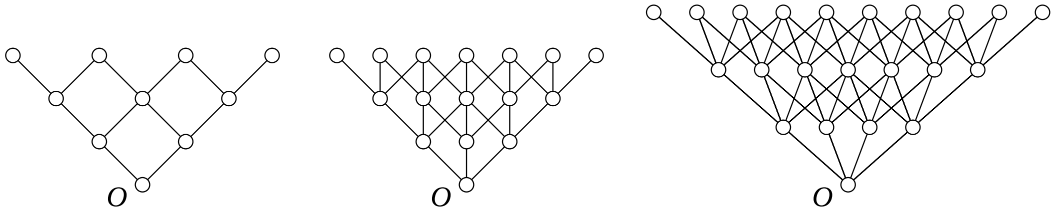


FIG. 3.7 – *Les réseaux $\mathcal{L}_m$ pour $m = 2, 3, 4$.*

L'idée de Dhar a récemment suscité des travaux menant à de nouveaux résultats exacts. Dans un travail commun avec A. Conway, je l'ai reprise telle quelle pour énumérer les animaux dirigés sur une famille infinie de réseaux de dimension deux, indexés par un entier m et notés $\mathcal{L}_m$. Les premiers de ces réseaux sont dessinés sur la figure 3.7. Là encore, on se ramène à la résolution de modèles à particules dures sur des réseaux de dimension un, mais avec des interactions à longue distance qui rendent le calcul de la densité plus difficile que dans le cas d'une droite (laquelle correspond aux animaux sur réseau carré). Les séries génératrices obtenues sont toujours algébriques, mais de degré m lorsque m est pair et $(m+1)/2$ lorsque m est impair. Le nombre d'animaux d'aire n sur le réseau $\mathcal{L}_m$ est équivalent à $A_m \mu_m^n n^{-1/2}$, pour des constantes A_m et μ_m qui dépendent de m. L'exposant

$-1/2$ est, lui, indépendant du réseau considéré, ce qui confirme l'hypothèse d'universalité [47].

En 1992, Conway, Brak et Guttmann ont énuméré par ordinateur les animaux dirigés sur plusieurs réseaux de dimension deux, et conjecturé des expressions quadratiques pour les séries génératrices associées à une famille infinie de réseaux carrés "décorés" [66]. Les premiers de ces réseaux sont dessinés sur la figure 3.8. Leurs conjectures ont été démontrées par Ali [1], par une méthode qui semble être un hybride des deux preuves que Dhar a données pour (3.2). En particulier, la méthode d'Ali fait intervenir un modèle d'Ising sur un réseau de dimension deux, qui se ramène un peu miraculeusement à un modèle en dimension un.

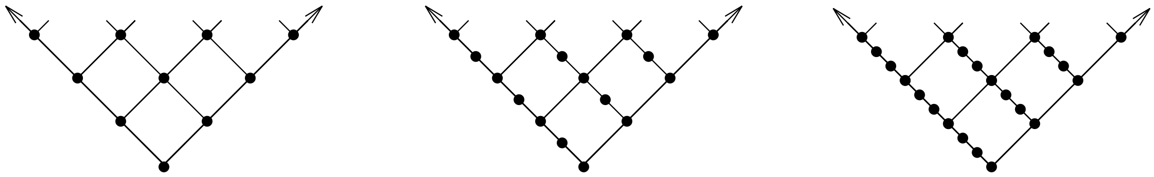


FIG. 3.8 – *Les réseaux carrés décorés à zéro, une et deux décorations.*

Bien des problèmes intéressants portant sur les animaux en dimension deux restent ouverts : énumération selon le *périmètre de site* (le nombre de sommets que l'on peut ajouter à l'animal, fig. 3.9), le nombre de boucles (sommets de l'animal ayant plusieurs prédécesseurs, fig. 3.9), l'énumération des animaux sur réseau hexagonal, des animaux de lien, etc. Dans l'article [37] j'ai entrepris une étude systématique de ces questions, en cherchant à déterminer dans quelle mesure et jusqu'à quel point une approche "à la Dhar" pouvait leur être appliquée. Pour chacun de ces problèmes (parfois inter-reliés), je suis parvenue à décrire une transition probabiliste dont la distribution invariante a une densité directement reliée à la série génératrice cherchée. Dans bien des cas, je n'ai pas su décrire la mesure invariante (il ne s'agit plus de distributions à particules dures) ni calculer sa densité. Toutefois, j'ai pu pousser l'étude jusqu'au bout dans deux cas, et j'ai ainsi obtenu les raffinements des identités (3.2) et (3.3) décrits ci-dessous.

Dans un animal dirigé sur réseau carré, un sommet qui n'est ni la racine ni une boucle repose soit *seulement à droite (r.s.d)* soit *seulement à gauche* (fig. 3.9). J'ai démontré que la série génératrice des animaux dirigés sur réseau carré, comptés selon leur aire (variable t) et le nombre de sommets r.s.d (variable x) est :

$$S_1(t,x) = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{4t}{(1+t)(1+t-tx)}\right)^{-1/2} - 1\right). \tag{3.4}$$

Les séries génératrices selon l'aire des animaux dirigés sur les réseaux carrés décorés de la figure 3.8 étant des spécialisations de $S_1(t,x)$, l'identité (3.4) permet de redémontrer les conjectures de Conway, Brak et Guttmann déjà prouvées par Ali. Elle permet aussi de prouver une conjecture de

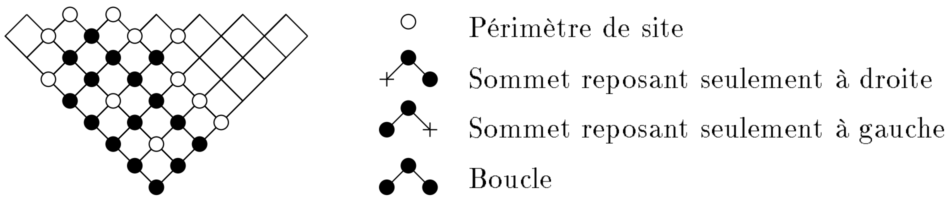


FIG. 3.9 – *Animal sur réseau carré : périmètre de site, sommets r.s.d et r.s.g et boucles.*

Conway [65] sur le nombre moyen de boucles dans un animal d'aire n (asymptotiquement $n/9$). Ce dernier résultat quantifie l'aspect "maigre" des animaux dirigés aléatoires (fig. 3.10[4], [18, 34, 64]).

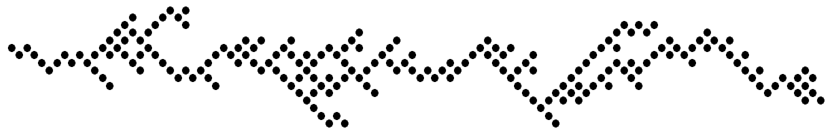


FIG. 3.10 – *Un animal dirigé aléatoire sur réseau carré.*

J'ai obtenu des résultats analogues pour les animaux sur réseau triangulaire. Leur série génératrice, selon l'aire et le nombre de sommets r.s.d (fig. 3.11) est

$$T_1(t,x) = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{4t}{1+t-tx}\right)^{-1/2}-1\right). \tag{3.5}$$

Curieusement, c'est aussi la série génératrice de ces mêmes animaux, énumérés selon l'aire et le nombre de sommets reposant seulement au centre. De nouveau, l'identité (3.5) permet d'énumérer les animaux dirigés sur certains réseaux triangulaires décorés et d'évaluer le nombre moyen de boucles dans un animal d'aire n (exactement $(n-1)(n-2)/(2n-1)/2$, et donc asymptotiquement $n/4$), conjecturé par Conway [65].

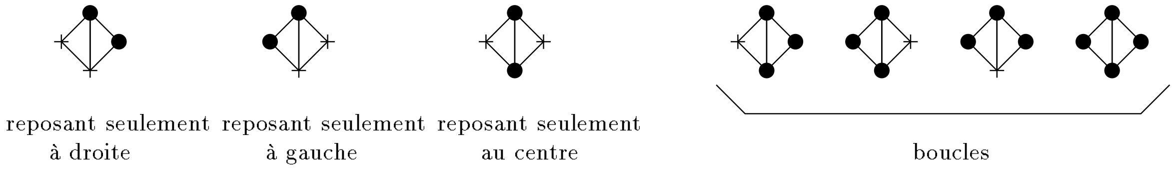


FIG. 3.11 – *Position des sommets d'un animal dirigé sur réseau triangulaire.*

3.3.3 Les empilements de pièces

Ces empilements [219] sont une version géométrique et "visuelle" de la notion de mots partiellement commutatifs, introduite par Cartier et Foata en 1969 [60] et largement étudiée depuis en informatique théorique [88]. Si les empilements peuvent être utilisés dans ce contexte formel pour étayer l'intuition, ils s'avèrent en outre parfaitement adaptés à la compréhension d'un certain nombre de résultats relatifs aux animaux dirigés.

La remarque fondamentale est que les animaux dirigés sur certains réseaux *sont* des empilements de pièces : par exemple, les animaux des réseaux carré et triangulaire sont des empilements de dominos (fig. 3.12) et ceux des réseaux 3.5.a et 3.5.b sont des empilements d'hexagones (fig. 3.13). Ces empilements ne sont par ailleurs pas quelconques : ils n'ont qu'une pièce minimale (ce sont des *pyramides*), et, dans le cas des réseaux carré et 3.5.a, ils sont *stricts* (deux pièces ne sont jamais exactement superposées ; comparer les figures 3.12.a et 3.12.b).

[4] Celui-ci provient de l'élevage de Bétréma, que je remercie.

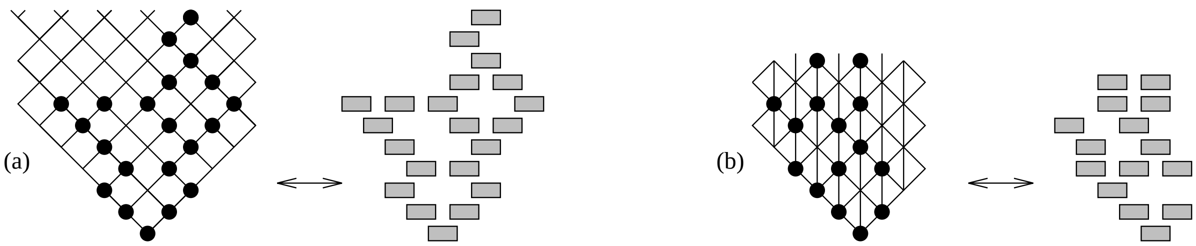


FIG. 3.12 – *Les animaux sur réseaux carré et triangulaire sont des empilements de dominos.*

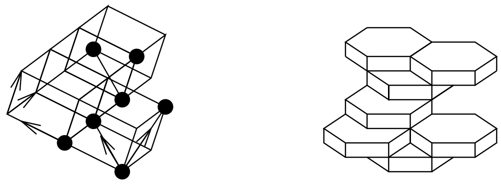


FIG. 3.13 – *Un animal sur le réseau* 3.5.*a et l'empilement d'hexagones correspondant.*

Cette façon de voir les animaux comme des empilements a deux types de conséquences. Tout d'abord, les théorèmes généraux sur l'énumération des empilements permettent d'expliquer combinatoirement pourquoi la série génératrice des animaux dirigés est l'opposé de la densité d'un modèle à particules dures [218, 34]. De plus, l'utilisation des empilements conduit à des preuves extrêmement simples, et très satisfaisantes aux yeux d'un combinatoriste, des identités (3.2) et (3.3) [34, 44, 33]. En effet, les pyramides de dominos admettent une factorisation canonique en deux pyramides plus petites (dont une *demi-pyramide*, fig. 3.14) qui se transcrit en une paire d'équations algébriques portant sur les séries génératrices correspondantes, et éclaire parfaitement, sur les animaux eux-mêmes, le caractère quadratique de ces séries. La vision en termes d'empilements implique encore que la série génératrice des animaux dirigés sur réseau triangulaire, comptés selon l'aire (variable t) et le nombre de sommets reposant seulement au centre (variable x) est $S(t/(1-xt))$, où $S(t)$ énumère les animaux dirigés sur réseau carré (3.2), et qu'un résultat analogue lie les réseaux des figures 3.5.a et 3.5.b. Elle explique encore les résultats de Hakim et Nadal, permet l'énumération des animaux dirigés selon leur demi-largeur, etc. Toutefois, la simplicité et l'efficacité de cette approche s'arrêtent à la dimension deux : on ne sait pas factoriser efficacement les pyramides d'hexagones.

3.3.4 Que reste-t-il à faire ?

Bien des choses, selon l'audace de chacun. Un premier groupe de problèmes consisterait à comprendre combinatoirement (via les empilements par exemple, mais pas nécessairement) des résultats qui n'ont jusque-là été prouvés que par la résolution d'une modèle de gaz, à savoir :

- l'énumération [5] des animaux des réseaux $\mathcal{L}_m$ (fig. 3.7) ;
- les identités (3.4) et (3.5), qui raffinent l'énumération des animaux sur les réseaux carré et triangulaire ;
- l'énumération des pyramides d'hexagones, c'est-à-dire des animaux sur les réseaux 3.5.a ou 3.5.b. Ce troisième problème, certainement plus difficile que les précédents, consiste donc à trouver une solution combinatoire au modèle des hexagones durs.

[5] Ce travail semble avoir été entrepris récemment [84].

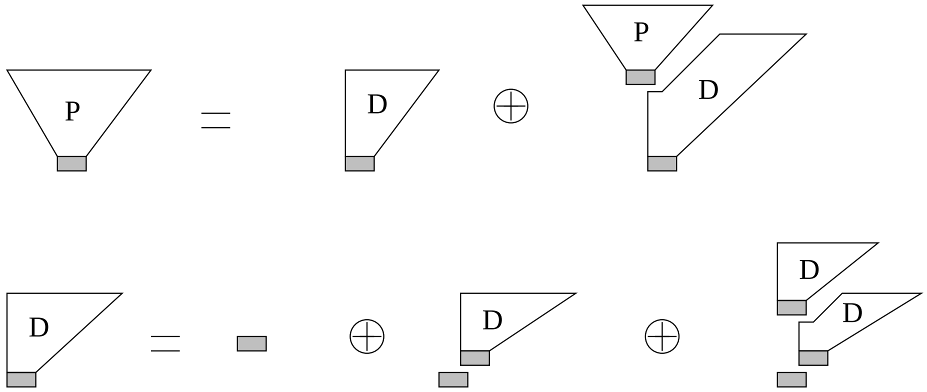


FIG. 3.14 – *Factorisation des pyramides et demi-pyramides strictes de dominos.*

Le deuxième groupe de problèmes, bien plus vaste et périlleux, consiste à s'attaquer aux nombreuses questions d'énumération encore ouvertes : réseaux hexagonal, cubique, périmètre de site, animaux de liens, etc. On peut aussi envisager l'étude des animaux *partiellement dirigés* [181, 190], c'est-à-dire dans lesquels tout sommet est relié à la source via un chemin qui ne fait pas de pas descendants (fig. 3.15.a), ou encore combiner plusieurs conditions de direction (fig. 3.15.b). Concernant toutes ces questions, il n'existe qu'une conjecture précise (mais dont la preuve ne constituerait sans doute pas une avancée décisive), relative au périmètre de site *moyen* des animaux dirigés du réseau carré. Désignant par $p(A)$ le périmètre de site d'un animal A, Conway [65] conjecture que

$$\sum_A p(A)t^{|A|} = \frac{1}{2t(1+t)}\left(\frac{1-3t+2t^2+t^3-3t^4}{(1-3t)^{3/2}(1+t)^{1/2}} - 1 - t - t^2\right),$$

ce qui implique que le périmètre de site moyen des animaux d'aire n est asymptotiquement $3n/4$, et traduit, de nouveau, la maigreur des animaux dirigés aléatoires. Cette conjecture semble passible d'une approche "à la Dhar".

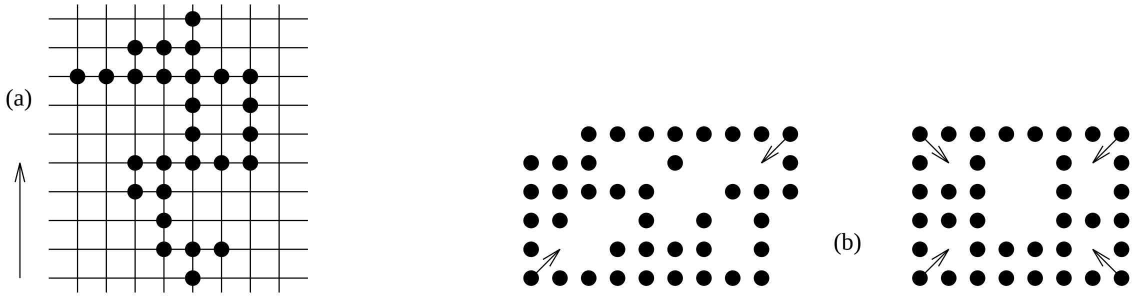


FIG. 3.15 – *Variations sur les animaux dirigés.*

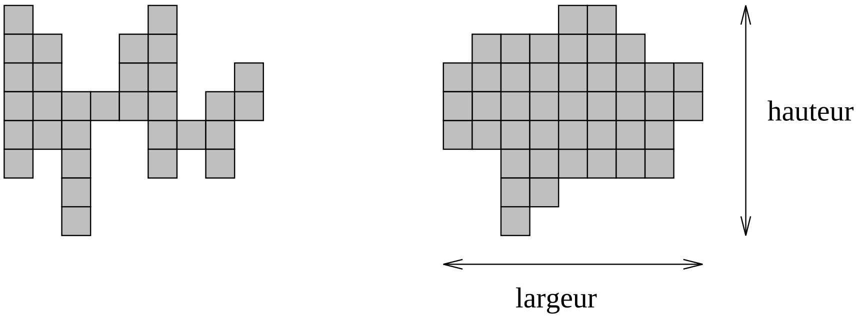


FIG. 3.16 – *Un polyomino verticalement convexe et un polyomino convexe.*

3.4 Polyominos convexes

Les travaux décrits dans ce paragraphe concernent des animaux tracés sur des réseaux de dimension deux, le plus souvent sur le réseau carré, ce qui explique le terme *polyomino* employé ci-dessus. Quelques résultats sur la convexité en dimension supérieure figurent dans le paragraphe 3.5.

3.4.1 Petite histoire

L'idée d'introduire une condition simplificatrice de *convexité* paraît contemporaine des premières tentatives d'énumération de polygones ou d'animaux. Dans son article de 1956 [213], Temperley étudie sous le nom de *modèle Q* les polyominos *verticalement convexes* du réseau carré, c'est-à-dire les polyominos dont l'intersection avec toute droite verticale est connexe (fig. 3.16). Il les énumère selon l'aire, puis selon le périmètre. L'énumération selon l'aire est assez simple et mène à une série rationnelle ; elle sera refaite indépendamment dans les années suivantes, par exemple par Klarner [149] et Pólya [187]. L'énumération selon le périmètre est moins facile, et si Temperley démontre bien l'algébricité de degré quatre de la série génératrice, l'expression qu'il en donne n'est pas parfaitement explicite. Cette seconde étude ne sera semble-t-il reprise qu'à la fin des années 80 [79].

Depuis, la notion de convexité a été enrichie et heureusement combinée à celle de structure dirigée, décrite dans le paragraphe précédent, pour aboutir à la définition et l'énumération selon l'aire et/ou le périmètre de nombreuses classes de polyominos. Avant de recenser ces résultats et de présenter certaines des méthodes qui y mènent, nous allons nous livrer à un petit travail d'entomologie, en dressant la liste des familles plus ou moins classiques de polyominos obtenues en combinant les propriétés de convexité et de croissance dirigée. Bien sûr, les familles les plus simples n'ont pas attendu que l'on parle de ces propriétés, ni même d'ailleurs de polyominos, pour être étudiées.

Nous avons déjà défini les polyominos verticalement convexes (du réseau carré). Les polyominos *horizontalement convexes* se définissent de manière analogue. Un polyomino est *convexe*[6] (tout court) s'il est à la fois verticalement et horizontalement convexe (fig. 3.16). Remarquons qu'un polyomino ayant l'une de ces propriétés est nécessairement "sans trou", et qu'on peut donc tout aussi bien parler de *polygone* dans ce cas. Il faut être un peu prudent en définissant la convexité diagonale : transposer la définition donnée ci-dessus fournit une notion restrictive, puisque les seuls polyominos diagonalement convexes seraient alors les polyominos *parallélogrammes* (fig. 3.17) qui

[6] Le premier qui me fait la blague des polyominos qu'on vexe...

sont également verticalement et horizontalement convexes. On aboutit à une notion plus riche, qui est celle que nous retiendrons, en remarquant que dans l'animal correspondant à un polyomino verticalement convexe, les sommets situés sur une même verticale sont contigus, et en transposant cette dernière définition à celle de convexité diagonale (fig. 3.17). Des notions de convexité analogues existent sur les réseaux triangulaire et hexagonal, bien que ceux-ci aient fait l'objet de travaux moins nombreux. Pour finir, un polyomino est dit *dirigé* (selon la direction N-O par exemple) lorsque l'animal sous-jacent l'est.

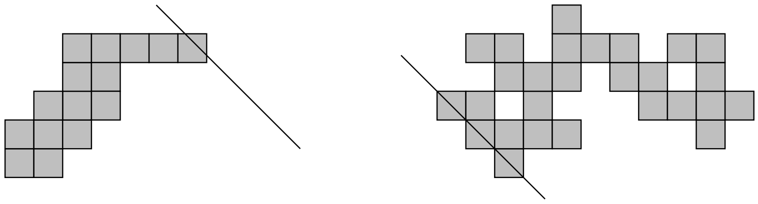


FIG. 3.17 – *Deux notions de convexité diagonale.*

On peut combiner systématiquement les quatre propriétés de convexité (verticale, horizontale, et selon l'une ou l'autre des deux diagonales) et les quatre directions de croissance possibles pour décrire de nombreuses familles de polyominos : les résultats sont présentés dans les figures 3.18 et 3.19. Leur lecture appelle quelques commentaires. Tout d'abord, nous n'avons pas représenté les classes de polyominos dirigés selon les quatre directions N-O, S-O, N-E et S-E, car les polyominos de ce type, ayant de surcroît une propriété de convexité, sont tous des rectangles. Par ailleurs, il est courant que des ensembles de conditions différents définissent la même famille de polyominos. Par exemple, les polyominos convexes et dirigés à la fois vers le N-E et le S-O, connus sous le nom de *polyominos parallélogrammes*, sont également d^-–convexes, c'est-à-dire convexes selon la diagonale d'équation $x + y = 0$. Nous obtenons exactement 30 familles de polyominos non symétriques les unes des autres (31 avec les rectangles). Chacune de ces familles est illustrée par un de ses représentants dans *une seule* des cases du tableau, à savoir celle qui rend compte de *toutes* ses propriétés. Afin de convaincre le lecteur (et l'auteur) que les 30 classes trouvées sont bien distinctes, le représentant choisi a *seulement* les propriétés requises. Les lignes du tableau sont étiquetées par des lettres. Quand une lettre figure dans une case, il faut se reporter, dans la même colonne, à la ligne désignée par la lettre.

Pour finir, remarquons qu'on pourrait élargir encore le bestiaire en incluant la notion d'animal partiellement dirigé (fig. 3.15) du paragraphe précédent. Les polyominos des figures 3.18 et 3.19 sont les habitants du "friendly zoo" de Xavier Viennot [220].

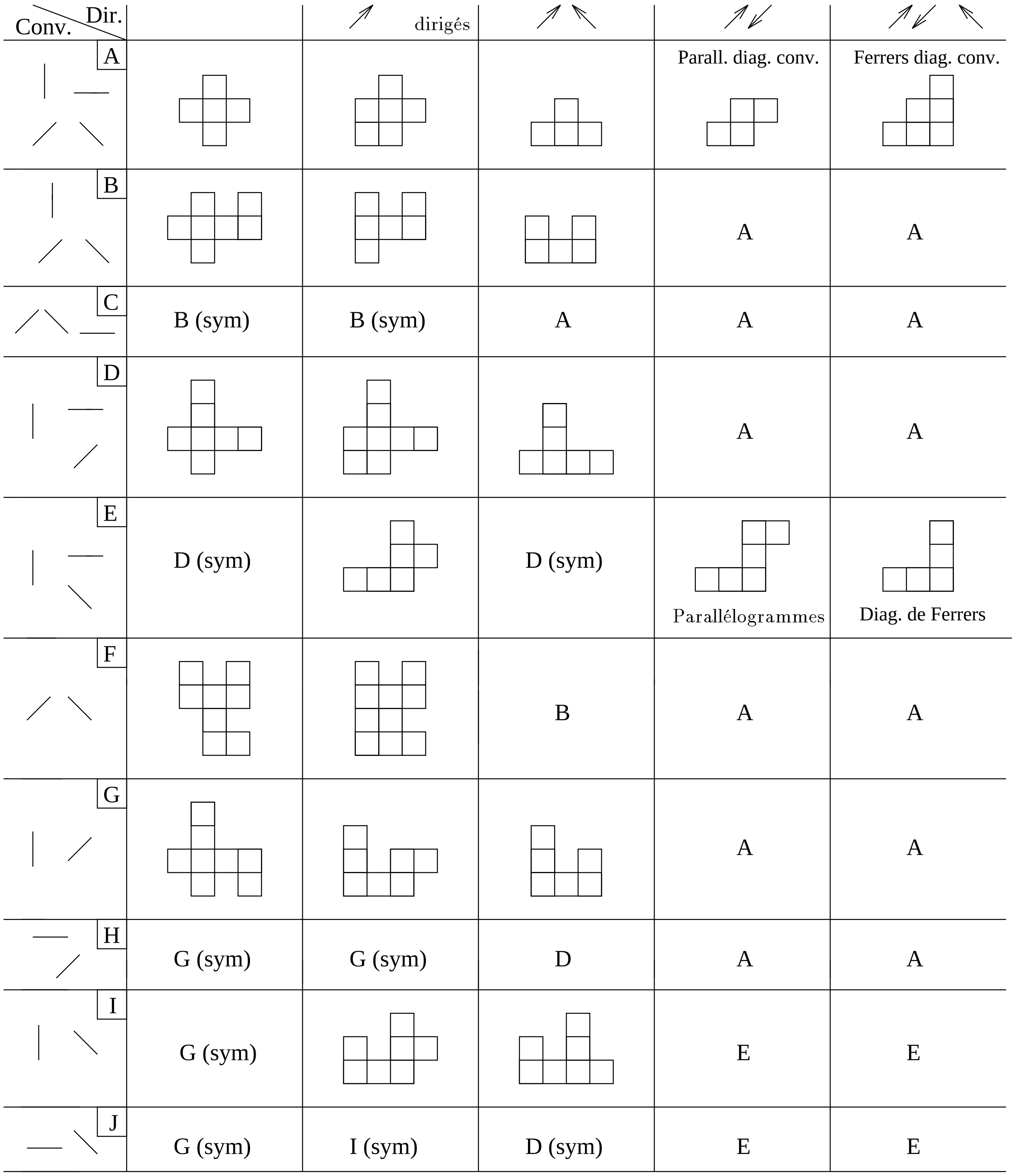


FIG. 3.18 – *Entomologie I.*

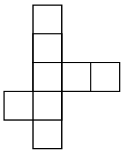
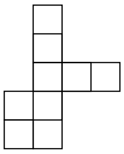
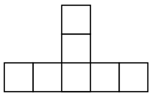
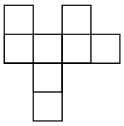
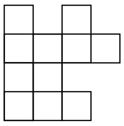
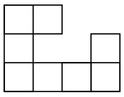
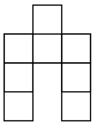
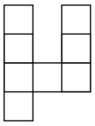
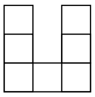
Conv. \ Dir.		↗ dirigés	↗ ↖	↗↙	↗↙ ↖
K convexes			Polyominos tas 	E	E
L d^- convexes			I	E	E
M d^+ convexes	L (sym)		G	A	A
N v - convexes			Compositions 	E	E
O h- convexes	N (sym)	N (sym)	K	E	E

FIG. 3.19 – *Entomologie II.*

3.4.2 Résultats

En comparant aux tableaux précédents les nombreux travaux effectués, on est d'abord frappé par le fait que la convexité diagonale n'a été que peu étudiée : tous les résultats connus, à une exception près, concernent des polyominos verticalement convexes (ligne N) ou convexes (ligne K). La convexité diagonale n'est abordée que par l'étude des polyominos dirigés d^-–convexes (et, dans une moindre mesure, d^+–convexes [145]).

L'énumération des classes laissées pour compte présente sans doute un intérêt inégal, du moins du point de vue du résultat lui-même qui, dans certains cas, n'améliorerait vraisemblablement guère la compréhension du sujet. En revanche, nous verrons plus loin que l'une des difficultés susceptibles d'être rencontrées lors de l'énumération de ces classes est la résolution de systèmes de q-équations, et toute méthode permettant une telle résolution est à l'heure actuelle intéressante *per se.*

Les classes que l'on a pu énumérer présentent des caractéristiques communes. En particulier, leur série génératrice selon le périmètre est algébrique, et leur série génératrice selon l'aire et le périmètre *simultanément* s'exprime en termes de q-séries plus ou moins compliquées. En revanche, une propriété remarquable sépare les polyominos *seulement* verticalement convexes des polyominos convexes ou diagonalement convexes : leur série génératrice selon l'aire seule est une fraction rationnelle (alors que c'est une q-série dans les deux autres cas). Nous présentons ci-dessous, de manière détaillée mais certainement pas exhaustive, un certain nombre de résultats d'énumération.

Les tableaux des pages 53 et 54 visent à rendre à César ce qui lui appartient, mais surtout à mettre un peu d'ordre dans les articles dont j'ai eu connaissance.

	périmètre	aire
Parallélogrammes	• périmètre seul : Levine 59 [161] Pólya 69 [187] • largeur et hauteur : Lin et Chang 88 [165] • périmètre et périmètre de site : Delest *et al.* 87 [82] • autres réseaux : Guttmann et Prellberg 93 [139] (réseaux hypercubiques) Essam 93 [100]	• aire seule : Klarner et Rivest 74 [152] • aire et largeur : Bender 74 [25] Delest et Fédou 93 [81] • aire et périmètre : Brak et Guttmann 90 [55] • aire, largeur et hauteur : Lin et Tzeng 91 [166] Bousquet et Viennot 92 [53] Fédou et Rouillon 95 [102] Bousquet 96 [45] Prellberg et Brak 94 [189] • expressions en q et $1/q$: Pólya 69 [187] Gessel 80 [127] Flajolet 91 [114] Feretić 96 [106] • fractions continues : Flajolet 91 [114] Bousquet et Viennot 92 [53] Roblet 94 [199]
Convexes dirigés	• hauteur et largeur : Lin et Chang 88 [165] Bousquet 92 [41, 43] Bousquet et Guttmann 96 [51]	• aire, hauteur et largeur : Bousquet et Viennot 92 [53] Bousquet et Fédou 95 [50] Bousquet 96 [45] • + périmètre de site : Dubernard et Dutour 94 [92]
Convexes	• périmètre seul : Delest et Viennot 84 [83] Kim 88 [148] • largeur et hauteur : Guttmann et Enting 88 (conjecture) [136] Lin et Chang 88 [165] Gessel 90 [128], Bousquet et Guttmann 95 [51] • quasi-convexes : Lin 92 [164] Enting *et al.* 92 [97]	• aire, hauteur et largeur : Bousquet et Fédou 95 [50] Bousquet 96 [45] formules bancales : Bousquet 91 [39, 42, 38] Lin 91 [163] • classes de symétries : Leroux et Robitaille 96 [160]

Tableau 3.1 – *Familles de polyominos convexes.*

	aire	périmètre	aire et périmètre
Compositions	très classique Moser et Whitney 61 [179] Privman et Švrakić [193]	• périmètre et largeur : Feretić 96 [107]	• aire, largeur et hauteur : Owczarek et Prellberg 93 [184] Prellberg et Brak 94 [189]
Verticalement convexes dirigés	• aire seule : Moser (voir [149]) Klarner 65 (aire seule) [149] • largeur et aire : Delest et Dulucq 93 [80] Barcucci *et al.* 91 [17] Barcucci *et al.* 93 [19] Feretić 93 [103]	• périmètre et largeur : Delest et Dulucq 93 [80] • périmètre de site : Delest et Dulucq 93 (+ largeur) [80] Joyce et Guttmann [147] • périmètre, périmètre de site et largeur : Feretić 93 [103]	• aire, largeur et hauteur : Bousquet 96 [45] Prellberg et Brak 94 [189] Feretić 96 [106] • hauteur dirigée et aire : Barcucci et al. 93 [16] Barcucci et al. 96 [15] (autres réseaux)
Verticalement convexes	• largeur et aire : Temperley 56 [213] Klarner 65 (aire seule) [149] Pólya 69 (aire seule) [187] Privman et Forgacs 87 (aire seule) [191] Forgacs et Privman 87 [123] Delest 88 [79] Domocos 96 [91] • autres réseaux : Klarner 67 (réseau hexagonal) [150] Feretić 95 (damier) [104] Forgacs et Privman 87 [123] (réseau triangulaire et hypercubique)	• périmètre seul : Temperley 56 (pas explicite) [213] Delest 88 [79] Brak, Guttmann et Enting 90 [56] • périmètre et largeur : Lin 90 [162] Feretić et Svrtan 93 [108] Feretić 95 [105] Feretić 96 [107] • autres réseaux : Lin et Wu 90 [167] (réseau hexagonal) Tzeng et Lin 91 (damier) [216] Feretić et Svrtan 93 [108] (réseau hexagonal)	• aire, largeur et hauteur : Bousquet 96 [45] formules bancales : Brak et Guttmann 90 [55] Lin et Tzeng 91 [166] Feretić et Svrtan 93 [108] équations q-algébriques : Brak *et al.* 1994 [57] • autres réseaux : Feretić et Svrtan 93 [108] (réseau hexagonal)

Tableau 3.2 – *Familles de polyominos verticalement convexes.*

3.4.2.1 Familles de polyominos convexes

Dans les séries génératrices exprimées ci-dessous, les paramètres pris en compte sont : l'aire d'un polyomino P, notée $|P|$, son demi-périmètre $p(P)$, sa largeur $\ell(P)$, et sa hauteur $h(P)$ (fig. 3.16). Les quatre variables correspondantes sont respectivement q, t, x et y. Remarquons que $p(P) = \ell(P) + h(P)$, et que l'énumération selon largeur et hauteur raffine donc l'énumération selon le périmètre. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique des polyominos convexes.

a. Diagrammes de Ferrers. Ces polyominos fournissent une représentation graphique des *partitions d'entiers*, et sont, à ce titre, étudiés depuis fort longtemps. Cette classe très simple présente des caractéristiques que nous retrouverons dans toutes les familles de polyominos convexes : la série génératrice selon le périmètre est algébrique (ici, rationnelle), et la série génératrice selon l'aire est une q-série, que connaissait déjà Euler [101] :

$$\sum_{P \text{ Ferrers}} q^{|P|} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots} = \frac{1}{(q)_\infty}. \tag{3.6}$$

Les polynômes gaussiens, ou coefficients q-binomiaux, énumèrent les diagrammes de largeur et hauteur bornées :

$$\sum_{\ell(P)\le m \text{ and } h(P)\le n} q^{|P|} = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{m+n})}{(1-q)\dots(1-q^m)(1-q)\dots(1-q^n)} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}.$$

En particulier, la série génératrice selon hauteur et largeur est rationnelle :

$$\sum_{P \text{ Ferrers}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} = \frac{xy}{1-x-y}.$$

Tous ces résultats sont bien classiques, mais ne constituent que le B.A.-BA de l'étude des partitions d'entiers. De nombreux autres résultats d'énumération relatifs à des familles particulières de partitions sont connus et souvent remarquables [10]. Le sujet est étroitement lié aux identités sur les q-séries, et malgré son ancienneté, reste l'objet de recherches florissantes.

Les diagrammes de Ferrers sont apparus assez tôt comme modèles de physique [211, 212]. Très récemment, Wu a démontré que la solution du modèle de Potts à q états, dans la limite $q \to \infty$, fait intervenir l'énumération de ces diagrammes [222].

b. Polyominos tas. Ils méritent à peine un exposé : ils se construisent par recollement de deux diagrammes de Ferrers, et leur série génératrice est donc [221] :

$$\sum_{P \text{ tas}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} q^{|P|} = \sum_{n \geq 1} \frac{xy^n q^n}{(1-xq)^2 \dots (1-xq^{n-1})^2 (1-xq^n)} = \sum_{n \geq 1} \frac{xy^n q^n}{(xq)_{n-1}(xq)_n}.$$

Mentionnons une formule moins évidente, et peut-être mal connue ([14, 212], [206, chap. 2]) :

$$\sum_{P \text{ tas}} q^{|P|} = \frac{\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(1-q)^2(1-q^2)^2(1-q^3)^2 \dots}.$$

Pour une énumération des polyominos tas de largeur fixée, on se reportera à [53]. La série génératrice selon le périmètre est là encore rationnelle (voir par exemple [83]) :

$$\sum_{P \text{ tas}} t^{p(P)} = \frac{t^2(1-t)}{1-3t+t^2} = \sum_{n \geq 2} F_{2n-4} t^n$$

où F_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci.

c. Polyominos parallélogrammes. Cette classe amène notre première série génératrice selon le périmètre *vraiment* algébrique (c'est-à-dire non rationnelle) :

$$\sum_{P \text{ parall.}} t^{p(P)} = \frac{1-2t-\sqrt{1-4t}}{2} = \sum_{n \geq 2} C_{n-1} t^n \tag{3.7}$$

où $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan. Ces polyominos se rattachent ainsi aux célèbres *mots de Dyck* et de fait, plusieurs bijections simples existent entre les deux classes d'objets [83].

Au moins trois types de formules existent pour l'énumération suivant l'aire. Certaines, remontant à Pólya [187], font intervenir des puissances positives et négatives de la variable q qui prend en compte l'aire :

$$\sum_{P \text{ parall.}} t^{p(P)} q^{|P|} = 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{n \geq 0} t^n \sum_{r=0}^{n} q^{-r(n-r)} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}^2}. \tag{3.8}$$

D'autres, plus classiquement, ne font apparaître que des puissances positives de q, par exemple la généralisation suivante, due à Bousquet-Mélou et Viennot [53], d'un résultat obtenu par Klarner et Rivest [152] dans le cas $x = y = 1$:

$$\sum_{P \text{ parall.}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} q^{|P|} = y \, \frac{J_1}{J_0} \tag{3.9}$$

avec

$$J_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_n}$$

et

$$J_0 = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n}. \tag{3.10}$$

Si on veut mettre en évidence le rôle symétrique des variables x et y, on a le choix entre l'expression suivante [53] :

$$\sum_{P \text{ parall.}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} q^{|P|} = xy \, \frac{\displaystyle\sum_{m,n \geq 0} \frac{(-1)^{n+m} x^m y^n q^{\binom{n+m+2}{2}}}{(q)_m (q)_n}}{\displaystyle\sum_{m,n \geq 0} \frac{(-1)^{n+m} x^m y^n q^{\binom{n+m+1}{2}}}{(q)_m (q)_n}}$$

et une fraction continue (on se reportera à [112] pour une théorie générale et à [114, 199, 200, 53] pour des exemples) :

$$\sum_{P \text{ parall.}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} q^{|P|} = \cfrac{1}{1 - q(x+y) - \cfrac{xyq^3}{1 - q^2(x+y) - \cfrac{xyq^5}{1 - q^3(x+y) - \cfrac{1 - xyq^7}{1 - \dots}}}}.$$

d. Polyominos convexes dirigés. On n'a commencé à les étudier qu'assez récemment. La paternité en revient à Lin et Chang qui, en 1988, ont prouvé la formule très simple suivante [165] :

$$\sum_{P \text{ conv. dir.}} t^{p(P)} = \frac{t^2}{\sqrt{1-4t}} = \sum_{n \geq 1} \binom{2n-2}{n-1} t^n. \tag{3.11}$$

Ainsi, comme les polyominos parallélogrammes sont reliés aux mots de Dyck, les polyominos convexes dirigés paraissent liés aux mots de Dyck *bilatères* (ou *mots du grand Dyck*), mais aucune bijection naturelle n'a encore été trouvée (pour des tentatives, voir Bousquet-Mélou [41] et Dutour [94, chap. 3]).

La série génératrice selon l'aire, obtenue dans un travail commun avec X. Viennot, est d'une forme à peine plus complexe que celle des polyominos parallélogrammes [53] :

$$\sum_{P \text{ conv. dir.}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} q^{|P|} = y \, \frac{M_1}{J_0} \tag{3.12}$$

où J_0 est donnée par (3.10) et

$$M_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n q^n}{(yq)_n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m q^{\binom{m}{2}}}{(q)_m (yq^{m+1})_{n-m-1}}. \tag{3.13}$$

Nous n'avons pas obtenu de formule simple mettant en évidence le rôle symétrique des variables x et y. Feretić a obtenu récemment une expression symétrique, mais, comme l'expression (3.8), elle fait intervenir des puissances positives et négatives de q [106].

e. Polyominos convexes. Leur étude semble avoir été suggérée à Klarner et Rivest par le grand Knuth en personne [152]. La série génératrice selon le périmètre, toujours quadratique, a été établie par Delest et Viennot en 1984 [83] :

$$\sum_{P \text{ convexe}} t^{p(P)} = \frac{t^2(1-8t+21t^2-19t^3+4t^4)}{(1-2t)(1-4t)^2} - \frac{2t^4}{(1-4t)\sqrt{1-4t}}. \tag{3.14}$$

La forme de cette expression — une différence de deux séries à coefficients positifs — est restée mystérieuse jusqu'à ce que le tandem Bousquet-Guttmann produise, en 1995, une interprétation combinatoire de chacun de ses deux termes [51].

La série génératrice selon l'aire a été le joujou central de ma thèse : j'en ai donné plusieurs expressions [38, 39, 42], dont aucune n'était aussi satisfaisante que (3.9) ou (3.12). Lin s'est associé à cette production de formules bancales avec une candidate encore plus encombrante [163]. Depuis, je suis parvenue, en collaboration avec J.-M. Fédou [50], à une expression qui, pour diverses raisons, paraît désormais être "la bonne", et que je livre ici pour le plaisir des yeux :

$$\sum_{P \text{ convexe}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} q^{|P|} = \bar{J}_1 \frac{\partial E}{\partial s}(1) - \bar{K}_1 E(1) \tag{3.15}$$

avec

$$\bar{J}_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n q^n}{(q)_{n-1}(q)_n},$$

$$\bar{K}_1 = -1 + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^n q^n}{(q)_{n-1}(q)_n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2q^k}{1-q^k} + \frac{q^n}{1-q^n} \right) \right)$$

et

$$E(s) = 2y^2 \frac{M_1}{J_0} \alpha(s) - y a(s),$$

où J_0 et M_1 sont données par (3.10) et (3.13) respectivement,

$$\alpha(s) = \sum_{m\geq 1} \left(\frac{(-1)^m x^m s^m q^{\binom{m+1}{2}}}{(sq)_m} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n s^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(sq)_{n-1}(syq^n)_{m-n+1}} \right)$$

et enfin

$$a(s) = \sum_{m\geq 1} \left(\frac{x^m q^m}{1-syq^m} \left(-\frac{s^{2m-1} q^{m(m-1)}}{(sq)_{m-1}^2} + y \sum_{n=1}^{m-1} \frac{s^{2n} q^{n^2}(syq^n-2)}{(sq)_{n-1}^2 (syq^n)_{m-n}^2} \right.\right.$$
$$\left.\left. +2y \sum_{1\leq n\leq k<m} \frac{(-1)^{n+k} s^{n+k} q^{\binom{n+1}{2}} q^{\binom{k}{2}}}{(sq)_{n-1}(syq^n)_{m-n}(sq)_k (syq^{k+1})_{m-k-1}} \right) \right).$$

J'ai ensuite réobtenu cette même expression par une méthode fondamentalement différente [45], ce qui accrédite son caractère "définitif" . Le saut énorme de complexité entre la série génératrice des polyominos convexes dirigés (3.12) et l'expression (3.15) ci-dessus est dû à la disparition de la direction privilégiée : cette affirmation un peu vague sera précisée en termes mathématiques lorsque nous décrirons les différentes méthodes d'énumération.

3.4.2.2 Familles de polyominos verticalement convexes

Les résultats présentés ci-dessous concernent des classes de polyominos verticalement convexes, pour lesquels la somme de la largeur et de la hauteur n'est plus en général égale au demi-périmètre. Nous conservons les quatre variables q, t, x et y, mais la variable y prend désormais en compte le *demi-périmètre vertical* du polyomino P (i.e. la moitié du nombre de pas verticaux dans son pourtour), noté $p_v(P)$: ainsi, l'énumération avec les variables x et y reste un raffinement de l'énumération selon le périmètre (variable t). Comme annoncé plus haut, les familles de polyominos (seulement) verticalement convexes se distinguent des familles de polyominos convexes par le fait que leur série génératrice selon l'aire est rationnelle.

a. Compositions. Rappelons qu'une composition d'un entier n est une suite finie $(n_1, \ldots, n_p)$ d'entiers strictement positifs dont la somme est n. De même que les partitions d'entiers peuvent être représentées par des diagrammes de Ferrers, les compositions se représentent par des polyominos convexes dirigés à la fois vers le N-O et le N-E (fig. 3.19). Il est bien connu qu'il y a 2^{n-1} compositions de n, et donc que la série génératrice selon l'aire des diagrammes représentant ces compositions est on ne peut plus rationnelle :

$$\sum_{P \text{ composition}} q^{|P|} = \frac{q}{1-2q}.$$

Je n'ai pas pu trouver de référence pour l'énumération de ces diagrammes selon le périmètre, mais le lecteur attentif, après avoir lu le paragraphe suivant consacré aux techniques d'énumération, saura prouver l'identité suivante[7] :

$$\sum_{P \text{ composition}} x^{\ell(P)} y^{p_v(P)} = \frac{1-x-y-xy-\sqrt{1-2x-2y+x^2+y^2-2x^2y+2xy^2+x^2y^2}}{2x}. \tag{3.16}$$

L'énumération selon le périmètre et l'aire simultanément nous ramène au pays des q-séries [184, 189] :

$$\sum_{P \text{ composition}} x^{\ell(P)} y^{p_v(P)} q^{|P|} = y\frac{I_1}{I_0} \tag{3.17}$$

avec

$$I_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n (y-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1}(yq)_n}$$

et

$$I_0 = 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{x^n (y-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_{n-1}}.$$

On peut remarquer une assez grande similarité entre d'une part les résultats (3.16) et (3.17) obtenus pour cette classe et d'autre part les résultats correspondants pour les polyominos parallélogrammes. Ceci n'est guère surprenant car les deux familles d'objets ne sont pas très loin d'être des mots de Dyck.

b. Polyominos verticalement convexes dirigés. Leur série génératrice suivant l'aire, publiée par Klarner en 1965 [149], est due selon lui à Moser. Elle est rationnelle, et fait de nouveau intervenir les nombres de Fibonacci de rang pair :

$$\sum_{P \text{ v.c.d}} q^{|P|} = \frac{q(1-q)}{1-3q+q^2} = \sum_{n\geq 1} F_{2n-2} q^n.$$

[7] Perdu ! Je viens de recevoir un prépublication de S. Feretić dans laquelle cette série est calculée [107].

La série génératrice selon le périmètre (notée ci-dessous f) est algébrique, et plus précisément cubique (Delest et Dulucq [80]) :

$$f^3 + 2(t-1)f^2 + (2t-1)(t-1)f + t^3 - t^2 = 0.$$

La série génératrice suivant l'aire, la largeur et le périmètre vertical est là encore du même type que (3.9), (3.12) ou (3.17), ce qui est logique puisque nos polyominos sont *dirigés* (Bousquet-Mélou [45]) :

$$\sum_{P \text{ vert. conv. dir.}} x^{\ell(P)} y^{p_v(P)} q^{|P|} = y\,\frac{L_1}{L_0}$$

avec

$$L_0 = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{x^n (y-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_{n-1} (yq)_n}$$

et

$$L_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n (y-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_{n-1} (yq)_n}.$$

Il existe aussi une expression du type de (3.8), c'est-à-dire avec des puissances positives et négatives de q [106].

c. Polyominos verticalement convexes. Cette famille de polyominos a été introduite en 1956 par Temperley, qui évalue leur série génératrice selon largeur et aire [213] :

$$\sum_{P \text{ vert. conv.}} x^{\ell(P)} q^{|P|} = \frac{xq(1-q)^3}{(1-q)^4 - xq(1-q)^2(1+q) - x^2q^3}.$$

Temperley démontre ensuite que la série génératrice selon le périmètre est algébrique de degré quatre, mais ne parvient pas à une expression explicite. Depuis, des expressions de plus en plus simples ont été obtenues [79, 56, 162], jusqu'à celle de Feretić et Svrtan [108, 105], qui prend en compte largeur et périmètre vertical :

$$\sum_{P \text{ vert. conv.}} x^{\ell(P)} y^{p_v(P)} = (1-y)\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{1 + x + \sqrt{(1-x)^2 - \dfrac{16xy}{(1-y)^2}}}}\right).$$

En ce qui concerne l'énumération selon l'aire et le périmètre simultanément, l'absence de direction privilégiée se paye de nouveau par une plus grande complexité, même si on n'atteint pas les sommets entrevus lors de l'étude des polyominos convexes. Après des calculs assez longs, on parvient à l'expression suivante (Bousquet-Mélou [45]) :

$$\sum_{P \text{ vert. conv.}} x^{\ell(P)} y^{p_v(P)} q^{|P|} = y\frac{(1-y)X}{1 + W + yX}, \tag{3.18}$$

avec

$$X = \frac{xq}{(1-y)(1-yq)} + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+1} x^n (1-y)^{2n-4} q^{\binom{n+1}{2}} (y^2q)_{2n-2}}{(q)_{n-1} (yq)_{n-2} (yq)_{n-1}^2 (yq)_n (y^2q)_{n-1}},$$

et

$$W = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n (1-y)^{2n-3} q^{\binom{n+1}{2}} (y^2q)_{2n-1}}{(q)_n (yq)_{n-1}^3 (yq)_n (y^2q)_{n-1}}.$$

3.4.2.3 Polyominos diagonalement convexes dirigés

Cette famille de polyominos paraît avoir été introduite en 1986 par Bhat, Bhan et Singh [35]. La série génératrice selon le périmètre, notée g ci-dessous, est cubique (Delest et Fédou [78], Feretić et Svrtan [109, 110], Inui *et al.* [180] :

$$g = (t+g)^2(1+g). \tag{3.19}$$

La série génératrice selon le périmètre de site p_s (de l'animal dirigé sous-jacent) est également cubique, et remarquablement simple [78, 185] :

$$\sum_{P \text{ diag. conv. dir.}} u^{p_s(P)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n} u^{n+1}. \tag{3.20}$$

L'énumération selon l'aire a été faite en 1988 par Privman et Švrakić [192]. Ils obtiennent une expression assez compliquée, intermédiaire entre (3.15) et (3.18). Nous raffinerons leur formule dans le paragraphe suivant, dans lequel nous évaluerons la série génératrice selon l'aire et le périmètre.

3.4.3 Comment compter les polyominos ayant une propriété de convexité ?

Presque toujours en combinatoire, un résultat d'énumération traduit une certaine compréhension de la *structure* des objets étudiés, via la description plus ou moins explicite d'une façon de les construire à partir d'objets du même type et de plus petite taille, ceci de façon *non ambiguë*, c'est-à-dire en obtenant chaque objet une fois et une seule. De façon équivalente, on cherche une manière canonique de *décomposer* les objets en facteurs plus petits.

Les polyominos ne font pas exception à ce principe très général, même si les décompositions sous-jacentes aux différentes techniques d'énumération ne sont pas toujours explicites. À côté de quelques méthodes d'énumération *ad hoc*, dont certaines seront mentionnées plus bas, on peut distinguer deux principaux types de décompositions pour les polyominos ayant une propriété de convexité : les décompositions "taille de guêpe" et les décompositions "par strates". Nous décrivons ci-dessous ces deux types de décompositions et la manière de les exploiter. Nous appliquons chacune d'elles aux polyominos parallélogrammes d'abord, aux polyominos diagonalement convexes dirigés ensuite, et tentons une étude comparée de leurs mérites.

3.4.3.1 Décompositions "taille de guêpe"

L'idée générale de ces décompositions est de scinder un polyomino (par exemple verticalement convexe) en plusieurs polyominos plus petits en le coupant aux endroits où il est *maigre*, c'est-à-dire où deux colonnes consécutives ne sont adjacentes que par une cellule. L'illustration la plus simple de ce principe est l'exemple des polyominos parallélogrammes. La figure 3.20 schématise le fait que l'ensemble des polyominos parallélogrammes est l'union disjointe de quatre ensembles, respectivement formés :

- du polyomino réduit à une cellule,
- des polyominos parallélogrammes de largeur au moins deux n'ayant qu'une cellule en première colonne,
- des polyominos parallélogrammes *épais*, c'est-à-dire auxquels on peut enlever une cellule par colonne en conservant un polyomino parallélogramme de même largeur,
- des polyominos parallélogrammes... restants, qui s'obtiennent en recollant un polyomino parallélogramme épais à un polyomino parallélogramme quelconque.

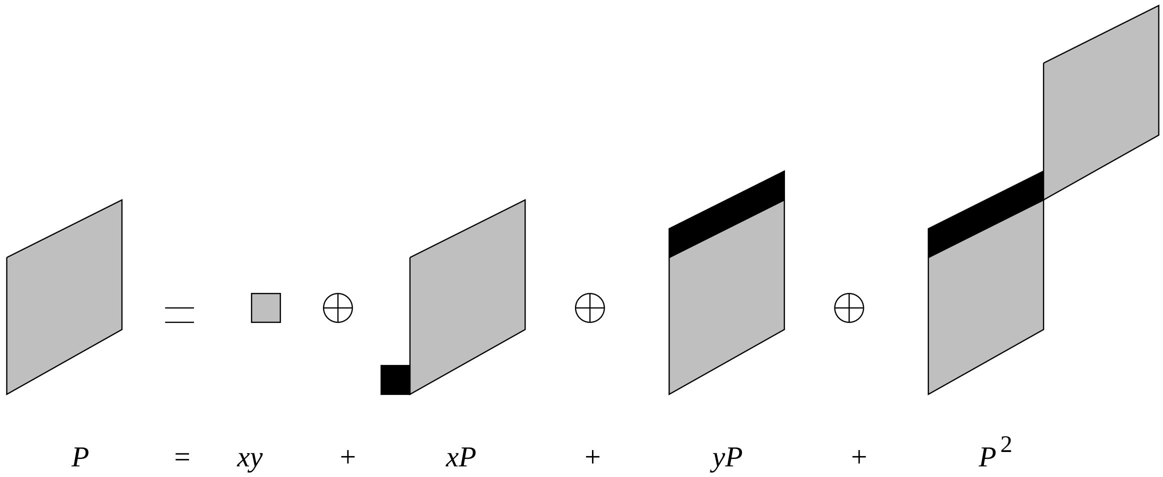


FIG. 3.20 – *Décomposition taille de guêpe des polyominos parallélogrammes.*

Cette partition de l'ensemble des polyominos parallélogrammes fournit soit des relations de récurrence, soit directement une équation algébrique portant sur la série génératrice $P = \sum_P x^{\ell(P)} y^{h(P)}$:

$$P = (x + P)(y + P).$$

Cette équation quadratique se résout simplement pour donner

$$P = \frac{1 - x - y - \sqrt{1 - 2x - 2y + x^2 + y^2 - 2xy}}{2}. \tag{3.21}$$

La spécialisation $x = y = t$ redonne bien sûr la série génératrice selon le périmètre (3.7).

Dans la plupart des articles où elles sont utilisées, les décompositions taille de guêpe ne sont toutefois pas explicites. Ces articles, largement inspirés par l'école bordelaise, utilisent la méthodologie de Schützenberger : on code tout d'abord les polyominos étudiés par les mots d'un langage algébrique $\mathcal{L}$, et c'est la décomposition de ces mots que l'on décrit par la donnée des règles de production d'une grammaire engendrant $\mathcal{L}$. Mais il est souvent possible d'établir un court-circuit en lisant les règles de production non sur les mots, mais *sur les polyominos eux-mêmes* (c'est un peu l'idée des *grammaires d'objets* [94]). À titre d'exemple, nous allons décrire la décomposition des polyominos dirigés diagonalement convexes sous-jacente au codage de ces objets proposé par Feretić et Svrtan [109] ; cette décomposition est illustrée par la figure 3.21. Elle permettra l'énumération des polyominos selon leur demi-périmètre vertical, leur demi-périmètre horizontal et leur périmètre de site.

Soit P un polyomino diagonalement convexe dirigé. Pour $k \geq 1$, appelons $k^{\text{ième}}$ *diagonale de* P (notée Δ_k) l'ensemble des cellules de P dont le centre se trouve sur la droite d'équation $x + y = k$. Supposons que P ait n diagonales non vides. Son périmètre de site est alors $n+1$ (récurrence sur n). Soit $j \in [1, n]$ le plus grand entier k tel que la diagonale Δ_k soit réduite à une cellule. Soit $i \in [1, n]$ le plus grand entier k tel que la diagonale Δ_k soit réduite à une cellule c, dont la voisine gauche n'est pas dans P. Bien sûr, $1 \leq i \leq j \leq n$. Soit P_1 le polyomino formé des diagonales $\Delta_1 \ldots, \Delta_{i-1}$. Soit P_2 le polyomino obtenu à partir des diagonales $\Delta_i, \ldots, \Delta_j$ en supprimant l'unique cellule c située sur Δ_j, puis la plus à droite des cellules de chaque ligne horizontale située au dessous de c. Enfin, soit P_3 le polyomino obtenu à partir des diagonales $\Delta_{j+1}, \ldots, \Delta_n$ en enlevant la cellule inférieure de chacune de ces diagonales. Les polyominos P_1, P_2 et P_3 sont soit vides, soit

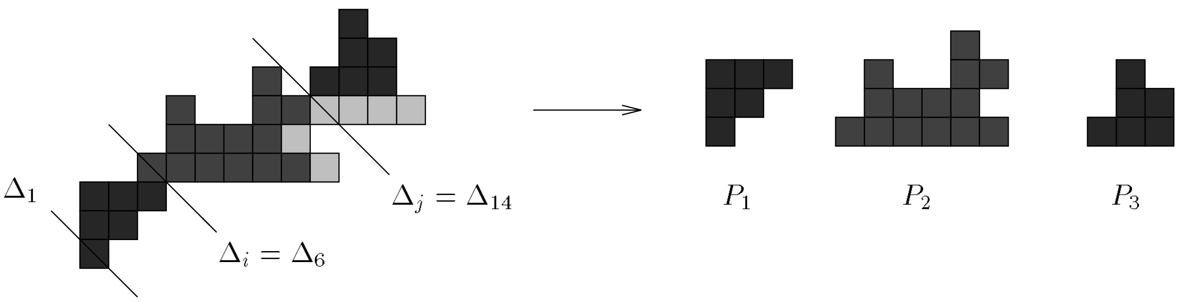


FIG. 3.21 – *Décomposition taille de guêpe d'un polyomino diagonalement convexe dirigé.*

dirigés et diagonalement convexes. Inversement, partant de trois polyominos P_1, P_2 et P_3, on peut construire un unique polyomino P, dirigé et diagonalement convexe, dont la décomposition suivant le processus décrit ci-dessus fournisse exactement P_1, P_2 et P_3. En observant ce que deviennent les statistiques *demi-périmètre* (vertical et horizontal) et *périmètre de site* (ou nombre de diagonales) au cours de la décomposition d'un polyomino, on parvient à l'équation suivante pour la série génératrice triple $f = \sum_P x^{p_h(P)} y^{p_v(P)} u^{p_s(P)-1}$:

$$f = u(x+f)(y+f)(1+f). \tag{3.22}$$

Ce résultat, qui implique (3.19) et (3.20), est du à Feretić et Svrtan [109], et la décomposition que nous venons de décrire est sans doute la façon la plus directe et rapide de l'obtenir.

Comme nous l'avons dit plus haut, les séries génératrices selon le périmètre des familles de polyominos ayant une propriété de convexité sont toutes algébriques. Les décompositions "taille de guêpe" sont vraisemblablement la meilleure façon d'expliquer cette algébricité et d'établir une équation satisfaite par la série génératrice associée. On peut ensuite chercher à aller plus loin, en résolvant l'équation ou les équations obtenue(s), ou en cherchant une formule explicite pour les coefficients de la série cherchée, notamment via la formule d'inversion de Lagrange.

Les décompositions taille de guêpe, couplées à la méthodologie de Schützenberger, ont donc d'abord servi à l'énumération selon le périmètre [77, 79, 80, 83]. On s'est aperçu plus tard qu'elles permettent souvent de prendre également en compte l'aire, bien que les équations qu'on obtienne ne soient plus algébriques. Ainsi, une petite familiarité avec la manipulation des séries génératrices permet d'affirmer que la décomposition des polyominos parallélogrammes illustrée par la figure 3.20 implique que la série génératrice $X(x) = \sum_P x^{\ell(P)} y^{h(P)} q^{|P|}$ qui les compte selon largeur, hauteur et aire satisfait :

$$X(x) = xyq + xqX(x) + yX(xq) + X(x)X(xq) = [y + X(x)][xq + X(xq)]. \tag{3.23}$$

Plus généralement, les décompositions taille de guêpe fournissent des systèmes d'équations — que l'on peut appeler *q-algébriques* — de la forme

$$P_i\left[f_1(x), f_1(xq), \ldots, f_1(xq^{e_1}), \ldots, f_p(x), f_p(xq), \ldots, f_p(xq^{e_p})\right], = 0, \qquad 1 \le i \le n,$$

où les P_i sont des polynômes à plusieurs variables à coefficients dans un anneau de polynômes $\mathbb{R}[q, x, y, \ldots]$. Par exemple, j'ai établi dans ma thèse, via la méthodologie de Schützenberger, que les séries génératrices $Y(x)$ et $Z(x)$ qui énumèrent selon les trois paramètres usuels les polyominos convexes dirigés et les polyominos convexes étaient solution du système q-algébrique suivant [43] :

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(x) + \frac{y+X(x)}{1-xq}\begin{pmatrix} 1 & xq \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Y_1 \end{pmatrix}(xq),$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}(x) = \frac{xyq}{1-xq}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{y+X(x)}\begin{pmatrix} V^2 \\ VW \\ W^2 \end{pmatrix} + \frac{y}{(1-xq)^2}\begin{pmatrix} 1 & 2xq & x^2q^2 \\ 1 & 1+xq & xq \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}(xq), \tag{3.24}$$

avec

$$V = Y(x) - \frac{xyq}{1-xq} \qquad \text{et} \qquad W = Y_1(x) - \frac{xyq}{1-xq}.$$

Dans ce système, $X(x)$ est la série génératrice des polyominos parallélogrammes, donnée par l'équation (3.23), et $Y_1(x), Z_1(x)$ et $Z_2(x)$ sont des séries annexes. On peut considérer que ce système renseigne déjà sur les séries Y et Z. Mais il est très malaisé d'aller au delà, c'est-à-dire d'obtenir des expressions explicites de Y ou Z à partir d'un tel système : il n'existe pas de méthode systématique permettant de résoudre les équations q-algébriques. On peut parfois espérer obtenir des développements en fraction continue, ou appliquer l'un des q-analogues de l'inversion de Lagrange [125, 127, 155]. Par ailleurs, Prellberg et Brak [189] ont montré comment résoudre les équations q-quadratiques de la forme :

$$G(x)G(xq) + a(x)G(x) + b(x)G(xq) + c(x) = 0.$$

Leur méthode de résolution s'applique donc en particulier à la série génératrice des polyominos parallélogrammes (3.23). Une certaine familiarité avec le sujet, et pas mal d'optimisme, peuvent parfois guider vers une solution explicite [81]. Ainsi, J.-M. Fédou et moi-même sommes assez miraculeusement parvenus à résoudre le système (3.24) ci-dessus, en développant une heuristique de résolution inspirée de la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires (dont les équations (3.24) sont un q-analogue). Nous avons ainsi abouti à l'expression (3.15), mais écrite de façon moins concise (on se sourit pas !) : en quelque sorte, il nous manquait un paramètre pour identifier certaines séries intervenant dans notre expression comme les dérivées d'autres séries. Pour d'autres exemples heureux de solutions d'équations q-algébriques, on pourra se reporter à [109] ou [189].

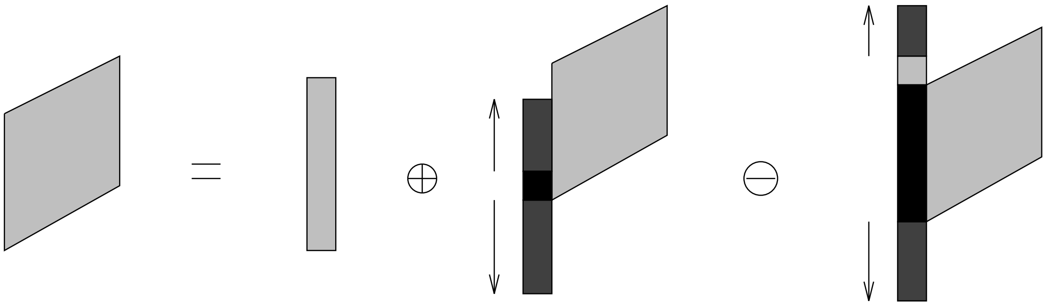
3.4.3.2 Décompositions par strates

L'idée de base de cette décomposition est qu'un polyomino verticalement convexe (par exemple) est une agglomération de colonnes, que l'on peut "éplucher" une à une pour décomposer le polyomino. Cette idée est extrêmement naturelle, et il est bien compréhensible qu'elle ait été utilisée très tôt : Temperley l'applique, dans son article de 1956, pour énumérer selon l'aire les polyominos verticalement convexes [213]. Ceci explique que cette décomposition, et la technique de résolution des équations qui en découlent qu'il emploie, soient souvent appelées "méthode de Temperley".

Si l'idée de la décomposition par strates est classique et assez ancienne, les techniques utilisées pour l'exploiter sont variées, et plus ou moins efficaces. Jusqu'à récemment, en suivant l'exemple de Temperley, on obtenait des relations de récurrence liant les séries génératrices *partielles* g_r qui comptent les polyominos dont la première colonne est de hauteur r, relations que l'on résolvait en faisant des choix *a priori* sur la forme de g_r. La précision et l'adéquation de ces choix semblaient conditionner grandement [55, 166] la simplicité de l'expression obtenue pour la série génératrice complète $\sum_r g_r$. Par ailleurs, la décomposition par strates était presque exclusivement utilisée dans les articles de physique. Vers la fin de ma thèse, je me suis rendu compte que cette décomposition se traduisait, pour toutes les familles de polyominos verticalement convexes (par exemple), par une q-équation *linéaire* de la forme :

$$X(s) = e(s) + f(s)X(1) + g(s)X(sq) + h(s)\frac{\partial X}{\partial s}(1), \tag{3.25}$$

où s est une variable prenant en compte la hauteur de la première colonne, et que ces équations étaient résolubles de façon systématique. Cette caractéristique a valu à mon approche d'être flatteusement baptisée par certains "turbo-Temperley". À la même époque, Feretić et Svrtan ont indépendamment constaté la possibilité d'écrire ces q-équations linéaires, mais sans obtenir de solution explicite dans le cas général [108]. J'ai depuis retrouvé des ébauches (au moins) de cette approche dans des papiers relativement anciens [152, 35] ou contemporains [184].



$$P(s) \quad = \quad \frac{xysq}{1-syq} \quad + \quad \frac{xsq}{(1-sq)(1-syq)}P(1) \quad - \frac{xsq}{(1-sq)(1-syq)}P(sq)$$

FIG. 3.22 – *Décomposition par strates d'un polyomino parallélogramme.*

Pour illustrer la méthode turbo-Temperley et la comparer au résultat des décompositions taille de guêpe, nous allons l'appliquer de nouveau à l'exemple simple des polyominos parallélogrammes. La décomposition par strates peut être décrite en disant qu'un polyomino parallélogramme est soit réduit à une colonne (série génératrice $xysq/(1-ysq)$), soit obtenu en ajoutant à un autre polyomino parallélogramme deux demi-colonnes, dont une "pas trop haute". Cette décomposition, illustrée par la figure 3.22, se traduit par l'équation suivante :

$$P(s) = \frac{xsyq}{1-syq} + \frac{xsq}{(1-sq)(1-syq)}(P(1) - P(sq)). \tag{3.26}$$

Rappelons que la variable s prend en compte la hauteur de la première colonne. On peut itérer cette équation, c'est-à-dire substituer $P(sq)$ par son expression en fonction de $P(1)$ et $P(sq^2)$, et répéter cette transformation pour aboutir à :

$$P(s) = y \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n s^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(sq)_{n-1}(syq)_n} + P(1) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n s^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(sq)_n(syq)_n}.$$

En substituant s par 1, on obtient la série génératrice des polyominos parallélogrammes selon largeur, hauteur, et aire, sans avoir en aucune façon à deviner la forme de la solution :

$$P(1) = \frac{y \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1}(yq)_n}}{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n(yq)_n}}. \tag{3.27}$$

Cette décomposition permet également de calculer la série génératrice selon le périmètre seul, mais elle éclaire beaucoup moins l'algébricité de cette série que la décomposition taille de guêpe de la figure 3.20. Pour $q = 1$, l'équation (3.26) s'écrit :

$$(1 - (1 - x + y)s + ys^2)P(s) = xs(P(1) + y(1 - s)). \tag{3.28}$$

Soit s_0 la série formelle en x et y suivante :

$$s_0 = \frac{1-x+y-\sqrt{\Delta}}{2y},$$

où $\Delta = 1-2x-2y-2xy+x^2+y^2$. Alors $1-(1-x+y)s_0+ys_0^2 = 0$. Comme on peut substituer s par s_0 dans $P(s)$, l'identité (3.28) implique que la série génératrice des polyominos parallélogrammes selon largeur et hauteur est $P(1) = y(s_0-1)$, c'est-à-dire

$$\sum_{P \text{ parall.}} x^{\ell(P)} y^{h(P)} = \frac{1-x-y-\sqrt{\Delta}}{2}.$$

On retrouve bien l'identité (3.21).

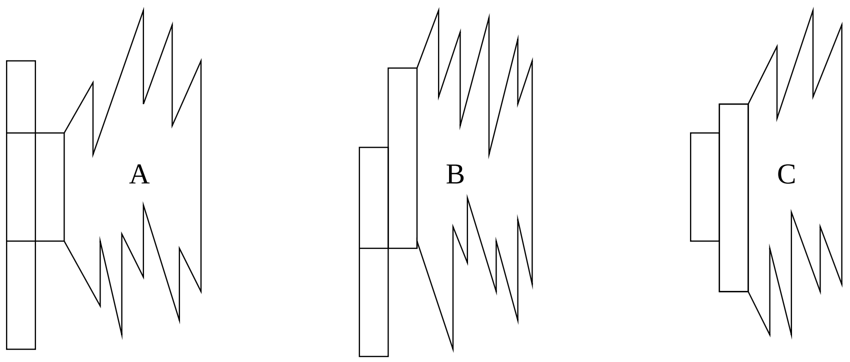


FIG. 3.23 – *Trois façons d'ajouter une colonne à un polyomino verticalement convexe.*

Dans l'article [45], j'ai utilisé la décomposition par strates et appliqué la méthode de résolution "turbo-Temperley" pour énumérer systématiquement selon la largeur, le périmètre et l'aire de nombreuses classes de polyominos verticalement convexes — en fait, toutes les classes du paragraphe 3.4.2, à l'exception des compositions, qui relèvent pourtant parfaitement de cette approche. On constate que toutes ces classes peuvent être décrites en combinant trois façons d'ajouter une colonne à un polyomino, illustrées par la figure 3.23. Les classes de polyominos *dirigés*, comme par exemple les polyominos parallélogrammes que nous venons d'énumérer, ne font pas intervenir la construction C, et mènent à des équations de la forme (3.25) dans lesquelles $h(s) = 0$. Les classes de polyominos non dirigés, comme les polyominos verticalement convexes ou convexes, conduisent à des équations dans lesquelles $h(s) \neq 0$. On peut, de nouveau, résoudre ces équations par itération. On obtient :

$$X(1) = \frac{E(1)+H(1)E'(1)-E(1)H'(1)}{1-F(1)-H'(1)-H(1)F'(1)+F(1)H'(1)}, \tag{3.29}$$

avec

$$E(s) = \sum_{n\geq 0} g(s)g(sq)\dots g(sq^{n-1})e(sq^n),$$

$$F(s) = \sum_{n\geq 0} g(s)g(sq)\dots g(sq^{n-1})f(sq^n),$$

et

$$H(s) = \sum_{n\geq 0} g(s)g(sq)\dots g(sq^{n-1})h(sq^n).$$

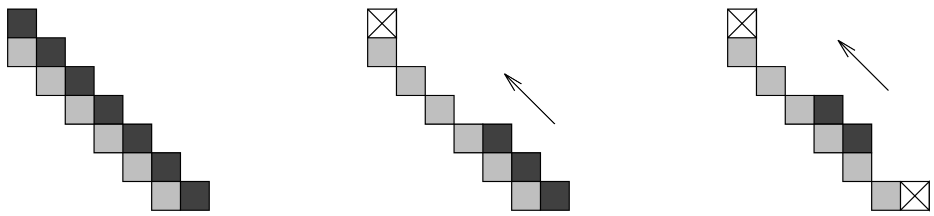


FIG. 3.24 – *Trois façons d'ajouter une diagonale à un polyomino dirigé diagonalement convexe.*

On remarque que le cas $h(s) = 0$ simplifie grandement la solution (3.29), en supprimant à la fois les dérivées et les produits de séries. Dans le cas des polyominos verticalement convexes, j'ai réussi à évaluer les produits apparaissant au numérateur et au dénominateur de (3.29) sous la forme d'une seule série, obtenant ainsi l'expression (3.18). Dans le cas des polyominos convexes, quelques réductions ont également été possibles ; elles débouchent sur l'expression (3.15) déjà obtenue en collaboration avec J.-M. Fédou [50].

Pour voir fonctionner la méthode dans le cas où $h(s) \neq 0$, nous allons, plutôt que de reprendre l'un des deux exemples cités ci-dessus, nous pencher sur les polyominos diagonalement convexes dirigés (fig. 3.21). Tout en étant dirigés, ils font intervenir un analogue de la construction C, ceci parce que leur direction de croissance fait un angle droit avec leur direction de convexité.

Précisons tout d'abord le choix des paramètres pris en compte et des variables correspondantes. Nos paramètres seront : le demi-périmètre horizontal (x), le demi-périmètre vertical (y), le nombre de diagonales non vides, dont nous rappelons qu'il est égal au périmètre de site moins un (variable u), la hauteur de la dernière diagonale non vide (s) et bien entendu l'aire (q). La factorisation par strates se fera en supprimant la dernière diagonale non vide. Trois cas sont à distinguer, selon que le retrait de cette diagonale diminue le périmètre de deux, de un, ou de zéro (fig. 3.24). Par ailleurs, le seul polyomino diagonalement convexe dirigé n'ayant qu'une diagonale non vide est le polyomino formé d'une seule cellule. On obtient l'équation suivante, dans laquelle les trois expressions entre crochets correspondent aux trois cas évoqués ci-dessus :

$$\begin{aligned} D(s) = xysuq + [xysuqD(sq)] + \left[\frac{suq(x+y)}{1-sq}\left(D(1) - D(sq)\right)\right] \\ + \left[\frac{suq}{1-sq}\left(\frac{\partial D}{\partial s}(1) - D(1)\right) - \frac{s^2uq^2}{(1-sq)^2}D(1) + \frac{suq}{(1-sq)^2}D(sq)\right]. \end{aligned}$$

On aboutit donc à une équation de la forme (3.25) :

$$D(s) = xysuq + \frac{suq(x+y-1-sq(x+y))}{(1-sq)^2}D(1) + \frac{suq(1-x+xsq)(1-y+ysq)}{(1-sq)^2}D(sq) + \frac{suq}{1-sq}D'(1). \tag{3.30}$$

En utilisant l'équation (3.29) et les suivantes, on obtient la série génératrice des polyominos diagonalement convexes dirigés, comptés selon les deux demi-périmètres, le nombre de diagonales et l'aire, sous la forme :

$$D(1) = \frac{E(1) + H(1)E'(1) - E(1)H'(1)}{1 - F(1) - H'(1) - H(1)F'(1) + F(1)H'(1)},$$

avec

$$E(s) = xy \sum_{n \geq 0} \frac{s^{n+1}u^{n+1}q^{\binom{n+2}{2}}(1-x)^n(1-y)^n \left(\frac{xsq}{x-1}\right)_n \left(\frac{ysq}{y-1}\right)_n}{(sq)_n^2},$$

$$F(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{s^nu^nq^{\binom{n+1}{2}}(1-x)^{n-1}(1-y)^{n-1}\left(\frac{xsq}{x-1}\right)_{n-1}\left(\frac{ysq}{y-1}\right)_{n-1}(x+y-1-sq^n(x+y))}{(sq)_n^2}$$

et

$$H(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{s^nu^nq^{\binom{n+1}{2}}(1-x)^{n-1}(1-y)^{n-1}\left(\frac{xsq}{x-1}\right)_{n-1}\left(\frac{ysq}{y-1}\right)_{n-1}}{(sq)_{n-1}(sq)_n}.$$

Le cas $x=y=1$ est un peu plus agréable (sans excès). On peut vérifier que la spécialisation $x=y=u=1$ redonne la formule obtenue par Privman et Švrakić pour l'énumération selon l'aire seule [192]. Cet exercice n'a rien d'évident, car les q-séries n'ont pas d'écriture canonique.

Nous allons maintenant montrer comment déduire de (3.30) l'équation algébrique satisfaite par la série génératrice selon les deux demi-périmètres et le périmètre de site (spécialisation $q=1$). Ce calcul est techniquement facile, mais nécessite quelques précautions théoriques. Pour $q=1$, l'équation (3.30) devient :

$$\begin{aligned} D(s)&\left[(1-s)^2-su(1-x+xs)(1-y+ys)\right] \\ &=su\left[xy(1-s)^2+(x+y-1-s(x+y))D(1)+(1-s)D'(1)\right]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Cette équation définit $D(s)$ comme une *série formelle en u à coefficients dans le corps $\mathbb{R}(x,y,s)$ des fractions rationnelles en x, y et s.* Considérons l'équation en s suivante :

$$(1-s)^2-su(1-x+xs)(1-y+ys)=0. \tag{3.32}$$

Elle admet trois solutions. La première, que nous noterons s_0, est une *série de Laurent* en u à coefficients dans $\mathbb{R}(x,y)$:

$$s_0=\frac{1}{xyu}-\frac{x+y}{xy}-(1+x+y)u+O(u^2).$$

Les deux autres, notées respectivement s_1 et s_2, sont des séries formelles en $v=\sqrt{u}$:

$$s_1=1+\sqrt{u}+\frac{1+x+y}{2}u+\frac{1+6x+6y+x^2+y^2+6xy}{8}u\sqrt{u}+O(u^2),$$

$$s_2=1-\sqrt{u}+\frac{1+x+y}{2}u-\frac{1+6x+6y+x^2+y^2+6xy}{8}u\sqrt{u}+O(u^2).$$

On peut substituer s par s_1 ou s_2 dans $D(s)$, qui devient alors une série formelle en $v=\sqrt{u}$ à coefficients dans $\mathbb{R}(x,y)$. En substituant s par s_1 puis s_2 dans l'équation (3.31), on obtient une paire d'équations linéaires liant $D(1)$ et $D'(1)$, qui se résout pour donner :

$$D(1)=-xy(1-s_1)(1-s_2).$$

En utilisant les relations entre les fonctions symétriques des racines et les coefficients de l'équation (3.32), on aboutit à :

$$D(1)=\frac{1}{u}\left(1-ux-uy+uxy-uxys_0-\frac{1}{s_0}\right).$$

Enfin, on déduit de l'équation cubique (3.32) satisfaite par s_0 l'équation définissant la série $D(1)$, qui, rappelons-le, compte les polyominos diagonalement convexes dirigés selon les deux demi-périmètres et le nombre de diagonales :

$$D(1)=u[1+D(1)][x+D(1)][y+D(1)].$$

Pour finir, on compare à l'identité (3.22), établie via la décomposition taille de guêpe, et l'on constate avec soulagement qu'on a obtenu la même équation.

Pour conclure par une comparaison des décompositions taille de guêpe et par strates, je dirai tout d'abord que la décomposition par strates présente l'avantage d'être systématique et de pouvoir être appliquée aveuglément à n'importe quelle classe de polyominos ayant une propriété de convexité. Notre méthode de résolution "turbo-Temperley" fournit notamment une expression explicite pour la série génératrice selon largeur, périmètre et aire de toutes les classes de polyominos verticalement convexes. En outre, il me semble que les classes "laissées pour compte" des figures 3.18 et 3.19 sont abordables par cette méthode (mais certaines mèneront à des équations plus compliquées que (3.25)). Les décompositions taille de guêpe, en revanche, requièrent parfois un peu d'imagination, mais fournissent de meilleures explications à l'algébricité de la série génératrice selon le périmètre. Elles ne permettent pas en général d'expliciter la série génératrice double (selon aire et périmètre). Toutefois, il semble que les équations q-algébriques soient mieux adaptées à l'étude de la structure des singularités de la série double que les équations obtenues via les décompositions par strates [188, 189].

3.4.3.3 Quelques méthodes ad hoc

Nous n'allons pas nier les charmes des méthodes *ad hoc*. Elles permettent parfois d'établir un résultat pour la première fois, ou au contraire de jeter un nouvel éclairage sur un résultat déjà connu : par exemple, des méthodes simples permettent d'exprimer les séries rationnelles énumérant les classes de polyominos verticalement convexes selon la largeur et l'aire [91, 104]. Les méthodes les plus intéressantes sont peut-être celles qui expliquent combinatoirement la forme d'un résultat.

Ainsi, X. Viennot et moi-même avons établi une bijection entre polyominos parallélogrammes et empilements de segments qui permet de comprendre l'expression (3.27) comme un cas particulier d'un théorème général sur l'énumération des empilements : le numérateur et le dénominateur de (3.27) énumèrent certains empilements *triviaux* (c'est-à-dire à une seule couche) de segments.

Un autre exemple d'interprétation combinatoire est celle que T. Guttmann et moi-même avons donnée de l'expression (3.14). Nous avons défini une notion générale de convexité qui s'applique à des polygones *non nécessairement auto-évitants*. Le premier terme de la différence (3.14) énumère essentiellement les polygones convexes généraux, tandis que la soustraction du deuxième terme sert à supprimer ceux parmi eux qui se recoupent. Cette approche se généralise en dimension supérieure : nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

3.5 Convexité en dimension supérieure ou égale à trois

Il existe deux façons de généraliser la notion de polyomino convexe étudiée dans le paragraphe précédent : l'une, peut-être la plus naturelle, mène à la notion d'animal convexe ; l'autre mène à la notion de polygone auto-évitant convexe. Ces deux notions coïncident fortuitement en dimension deux. Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux réseaux hypercubiques $\mathbb{Z}^d$, bien que des extensions à d'autres réseaux soient possibles.

3.5.1 Animaux convexes

Soit $e_1, \ldots, e_d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Un animal A sur $\mathbb{Z}^d$ est convexe selon la direction e_k si l'intersection de A avec toute droite de direction e_k est formée de sommets contigus. À ma connaissance, il n'existe de résultats d'énumération que pour *une* famille d'animaux convexes (en

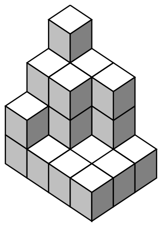


FIG. 3.25 – *Une partition plane.*

dehors de la dimension deux bien entendu) : les *partitions planes*, qui sont en quelque sorte des diagrammes de Ferrers tri-dimensionnels (fig. 3.25)[8].

Leur série génératrice selon le nombre de sommets a été obtenue par Macmahon [173] et est fort remarquable :

$$\sum_{A \text{ partition plane}} q^{|A|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1-q^i)^i}. \tag{3.33}$$

Cette expression est à comparer à celle obtenue pour les diagrammes de Ferrers (3.6). Dans un moment d'enthousiasme, Macmahon avait conjecturé la formule suivante pour l'énumération des diagrammes de Ferrers d-dimensionnels :

$$\sum_{P \text{ diag. Ferrers}} q^{|P|} = \prod_{i \geq 1} (1-q^i)^{-\binom{i+d-3}{d-2}}.$$

Malheureusement, cette conjecture est fausse pour $d \geq 4$, et on ne lui a pas trouvé de remplaçante [10, chap. 11].

On peut préciser le résultat (3.33) en énumérant les partitions planes incluses dans une boîte de dimension $i \times j \times k$. Notons $((q))_n = (q)_1(q)_2 \ldots (q)_n = (1-q)^n(1-q^2)^{n-1} \ldots (1-q^n)$; alors

$$\sum_{A \text{ part. plane } \subset [i \times j \times k]} q^{|A|} = \frac{((q))_{i-1}((q))_{j-1}((q))_{k-1}((q))_{i+j+k-1}}{((q))_{i+j-1}((q))_{i+k-1}((q))_{j+k-1}}.$$

Comme dans le cas des diagrammes de Ferrers de dimension deux, ces résultats ne constituent que la partie émergée de l'iceberg. En particulier, l'énumération des classes de symétries des partitions planes a fait l'objet de travaux nombreux et remarquables au cours des quinze dernières années (voir par exemple [176, 156, 209, 208]).

La façon la plus raisonnable d'essayer d'avancer dans l'énumération des animaux convexes en dimension trois serait peut-être de s'attaquer aux animaux "parallélogrammes" de dimension trois, c'est-à-dire aux différences (connexes) de partitions planes, ou partitions planes *gauches*. Signalons un article récent dans lequel est étudiée la *surface* minimale d'un animal (vu comme une collection de cubes) ayant un nombre de sommets donné [7].

3.5.2 Polygones convexes

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, les polyominos convexes du réseau carré sont sans trou, et correspondent donc à des *polygones*. Ceci conduit à caractériser un *polygone AE* convexe par le fait que son périmètre est la somme de sa hauteur et de sa largeur. (Cette propriété

[8] Signalons aussi une généralisation d-dimensionnelle très naïve des polyominos verticalement convexes [123].

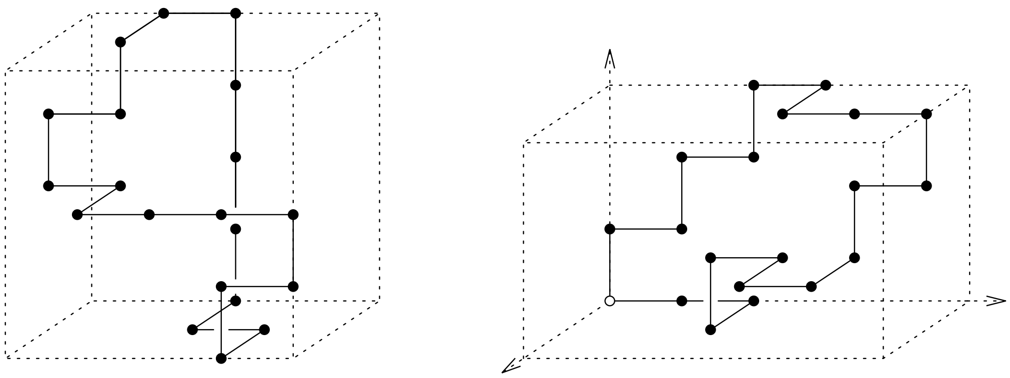


FIG. 3.26 – *Polygones convexes en dimension trois.*

confère d'ailleurs quelque importance aux polyominos convexes dans certains problèmes de physique, abordés par une étude sur une grille de taille finie : les polyominos convexes interviennent dans la description des termes correctifs [95].) Il est alors naturel de décider qu'un polygone AE sur le réseau hypercubique $\mathbb{Z}^d$ est *convexe* lorsque son périmètre est la somme des longueurs des côtés du plus petit hyper-rectangle le contenant (sa *boîte*). La figure 3.26 donne deux exemples de polygones AE convexes en dimension trois. Le second a la particularité qu'il contient le sommet de plus petites coordonnées de sa boîte : nous dirons qu'il est *unimodal.* Remarquons que les polygones unimodaux sur réseau carré correspondent aux polyominos convexes dirigés.

J'ai travaillé avec T. Guttmann sur l'énumération de ces objets (selon le périmètre). L'objectif initial était d'énumérer les polygones AE convexes en dimension trois. Il a été assez vite clair que les méthodes utilisées jusque-là pour compter les polygones convexes en dimension deux ne s'étendaient pas à la dimension trois. Le lecteur s'en convaincra sans doute en essayant d'étendre l'une de nos décompositions fétiches à la dimension trois. En fait, ces décompositions s'appliquent fondamentalement à des polyominos, qui sont des *surfaces*, et non à des polygones, qui sont des *lignes.* Après ce constat plutôt malheureux, il est apparu peu à peu qu'on ne trouverait pas de méthode pour compter les polygones convexes en dimension trois qui ne fût pas applicable en dimension supérieure. De ce fait, et aussi parce que c'était dans l'air du temps [137, 138], nous avons fini par nous interroger plus sur la *nature* (algébrique, D-finie, etc.) des séries génératrices correspondantes que sur leur valeur exacte.

Nous sommes parvenus à énumérer les polygones *unimodaux* en toute dimension — plus exactement, à donner une formule qui permet de calculer par récurrence sur d la série génératrice U_d des polygones unimodaux de dimension d. Notre résultat montre que la série U_d est en général un *quotient de séries différentiellement finies.* L'algébricité de la série U_2 (voir (3.11)) apparaît comme un cas particulier, la série U_3 n'étant déjà plus D-finie. La même approche permet également d'énumérer les polygones convexes sur $\mathbb{Z}^d$ pour tout entier d, mais nous ne l'avons appliquée qu'en dimension deux — où on obtient une interprétation combinatoire de l'expression (3.14) — et en dimension trois, remplissant ainsi notre objectif initial. La série C_3 énumérant les polygones convexes tri-dimensionnels s'exprime en fonction de la série Z_3 définie par les conditions initiales $Z_3(0) = 1$, $Z_3'(0) = 3$ et l'équation différentielle suivante :

$$t(1-t)(1-9t)Z_3''(t) + (1-20t+27t^2)Z_3'(t) - 3(1-3t)Z_3(t) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
C_3 = {} & \frac{4t^3(4-51t+198t^2-135t^3)}{(1-9t)^3} + \frac{48t^4(1-6t)}{(1-9t)(1-4t)} - \frac{12t^4(1-t)(8-60t+145t^2-120t^3+16t^4)}{(1-4t)^4} \\
& + \frac{48t^4}{\sqrt{1-4t}} \left[\frac{(1-t)(1-2t)(2-7t+4t^2)}{(1-4t)^3} - \frac{2(1-6t)}{(1-9t)^2} + \frac{2t^2}{(1+t)^2(1-4t)} \right] \\
& + \frac{12ut^4}{1-4t} \left[\frac{1-t-2u}{[(1-3u)(1+u)]^{3/2}} - \frac{1-t+2u}{[(1+3u)(1-u)]^{3/2}} \right] - \frac{32t^6(5-4t)}{(1+t)^2(1-4t)^{3/2}\sqrt{1-8t}} \\
& - \frac{2}{Z_3(t)} \left[\frac{6t^2}{1-9t} - \frac{3t^2}{\sqrt{1-4t}} \left[[(1-3u)(1+u)]^{-1/2} + [(1+3u)(1-u)]^{-1/2} \right] \right]^2 .
\end{aligned}$$

La série génératrice obtenue est donc encore un quotient de séries D-finies, et il semble que cela soit également le cas en dimension supérieure. Les détails des calculs sont suffisamment lourds en dimension trois pour qu'on hésite à s'attaquer à la dimension quatre, bien que ceci soit possible.

Notre méthode innove radicalement sur les méthodes utilisées jusque-là en dimension deux. On peut toutefois la rapprocher d'une idée vraisemblablement utilisée par Pólya pour énumérer les polyominos parallélogrammes [187, 127, 114], et étendue plus tard aux réseaux hypercubiques [139]. L'idée de base est de considérer a priori *tous* les polygones (cycles du réseau), non nécessairement auto-évitants, et de leur étendre la notion de convexité. Il est assez facile de compter les polygones *généraux* convexes. Il reste ensuite à supprimer ceux d'entre eux qui se recoupent. On les compte séparément en les factorisant en polygones AE, et par une utilisation répétée du principe d'inclusion-exclusion ; celui-ci apparaît alors comme l'itération du signe "−" apparaissant dans l'expression (3.14) qui donne la série génératrice des polyominos convexes en dimension deux.

Chapitre 4

Combinatoire des mots

La combinatoire des mots est l'étude de leurs propriétés intrinsèques. Une définition aussi vaste — ou aussi vague — déborde naturellement sur de nombreux domaines mathématiques et informatiques, puisqu'une grande variété de problèmes peuvent être traduits en termes de mots (théorie des langages, probabilités, théorie des groupes, combinatoire bien sûr...). Il est toutefois possible de préciser un peu cette définition sans pour autant introduire de frontières trop arbitraires : on se reportera par exemple au contenu du "Lothaire" [170].

Nous n'aurons fort heureusement pas à rentrer dans ces subtilités ici, car les questions que nous allons évoquer concernent un domaine restreint de la combinatoire des mots : l'étude des mots (ou suites) infini(e)s $u_1 u_2 u_3 \ldots$, où les u_i appartiennent à un ensemble fini A, appelé alphabet. Depuis les travaux d'Axel Thue, au début de ce siècle [214, 215, 30], la plupart des questions qu'on étudie se rattachent à la notion de régularité d'une telle suite : répétitions, motifs inévitables, nombre de facteurs $u_i \ldots u_{i+n}$ de longueur fixée, fréquence de réapparition de ces facteurs, etc. Parmi les différentes façons de définir une suite régulière, la notion de *suite automatique* connaît un succès particulier en raison de ses connexions avec la théorie des nombres [2, 61]. Les suites les plus régulières font souvent l'objet d'études plus détaillées.

4.1 Complexité et fonction de récurrence

4.1.1 Complexité

La complexité d'une suite infinie $u = u_1 u_2 u_3 \ldots$ sur un alphabet fini A donne le nombre de facteurs de u de longueur fixée. Plus précisément, c'est la fonction :

$$\begin{aligned} p_u : \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto |\{u_{i+1} u_{i+2} \ldots u_{i+n},\ i \geq 0\}|. \end{aligned}$$

Cette fonction possède une majoration évidente : $p_u(n) \leq |A|^n$. De fait, une suite de $A^{\mathbb{N}}$ est presque sûrement de complexité $p_u(n) = |A|^n$. Il est facile de voir que la complexité est une fonction croissante, et que si $p_u(n_0+1) = p_u(n_0)$, alors $p_u(n) = p_u(n_0)$ pour $n \geq n_0$. Ceci implique que la complexité est soit ultimement constante (auquel cas u est ultimement périodique), soit de complexité supérieure ou égale à $n+1$.

Il existe des suites de complexité $n+1$. Ce sont des suites sur un alphabet à deux lettres (puisque $p_u(1) = 2$), appelées *suites sturmiennes*. Elles ont été introduites par Morse et Hedlund [177, 178]. Elles sont reliées au tracé de droites sur un réseau, à des développements en fraction continue, et de très nombreux travaux leur sont consacrés (voir [31] pour une synthèse). La plus célèbre de ces suites est la suite de Fibonacci, *abaababaabaababa*..., qui est point fixe du morphisme $a \longmapsto ab$, $b \longmapsto a$. Nous mentionnerons dans le paragraphe 4.1.3 d'autres suites de petite complexité.

4.1.2 Fonction de récurrence

La fonction de récurrence R_u d'une suite u décrit à quelle fréquence réapparaissent ses facteurs. La lecture de sa définition demande un instant de réflexion :

$$R_u(n) = \min\{\ell : \text{ tout facteur de } u \text{ de longueur } \ell \text{ contient tous les facteurs de } u \text{ de longueur } n\}.$$

Cette fonction est évidemment croissante, et n'est finie que si la distance entre deux occurrences successives d'un même facteur est bornée : on dit alors que u est *minimale*.

Une borne inférieure triviale pour R_u est $R_u(n) \geq p_u(n)+n-1$. La fonction de récurrence d'une suite ultimement périodique est $R_u(n) = n + k$, où k est une constante. La discussion faite plus haut sur la complexité montre que les autres suites ont une fonction de récurrence $R_u(n) \geq 2n$. Une conjecture de G. Rauzy [194], selon laquelle, pour toute suite non ultimement périodique u,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_u(n)}{n} \geq \frac{5+\sqrt{5}}{2} \tag{4.1}$$

renforce l'inégalité précédente[1]. Signalons que (4.1) devient une égalité pour la suite de Fibonacci. Par ailleurs, l'inégalité évidente $\liminf \frac{R_u(n)}{n} \geq 2$ est la plus fine possible [178].

Dans la note [6], J.-P. Allouche et moi-même avons démontré qu'une conjecture de Shallit et Breitbart était en fait équivalente à un résultat de forme analogue à (4.1). La conjecture initiale de Shallit et Breitbart s'énonce ainsi [202] : pour une suite u et un entier n, on définit $S_u(n)$ comme la longueur du plus grand suffixe de $u_1u_2\ldots u_n$ apparaissant dans $u_1u_2\ldots u_{n-1}$. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_u(n)}{n} \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Nous avons prouvé que ceci équivaut à dire que la fonction R'_u définie par

$$R'_u(n) = \min\{\ell : \ u_1\ldots u_\ell \text{ contient tous les facteurs de longueur } n \text{ de } u\}$$

satisfait

$$\lim \frac{R'_u(n)}{n} \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{4.2}$$

Le parallèle avec (4.1) est évident, mais aucune des deux conjectures n'implique l'autre.

4.1.3 Suites de pliage

Les suites de pliage s'obtiennent en pliant en deux une infinité de fois une (grande) feuille de papier [76]. À chaque étape, on peut choisir de rabattre le volet droit sur, ou sous, le volet gauche. La suite des virages à droite et à gauche, lue sur la tranche de la feuille, est une suite de pliage. Voici par exemple le début de la suite de pliage *régulier*, obtenue en rabattant toujours le volet droit sur le volet gauche : *ggdggdd*... La figure 4.1 illustre les résultats des trois premiers plis.

Fort heureusement, ces suites peuvent être construites via un autre procédé, appelé *procédé d'insertion de Toeplitz*. Ce procédé consiste à remplir les places impaires $(1, 3, 5, \ldots)$ de la suite avec une alternance de g et de d, puis à remplir une sur deux des positions vacantes $(2, 6, 10, \ldots)$

[1] Il y a une coquille dans l'article original, où la constante donnée est $(3+\sqrt{5})/2$.

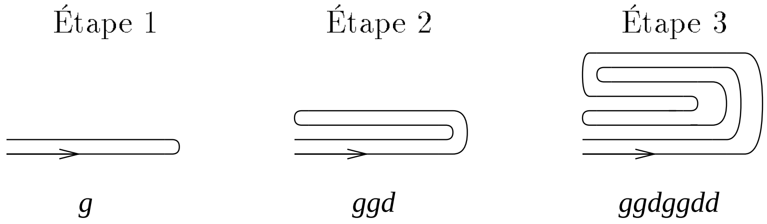


FIG. 4.1 – *Les trois premières étapes d'un pliage régulier.*

d'une alternance de g et de d, etc. À chaque étape, le choix de la première lettre (g ou d) correspond au choix dessus/dessous fait lors d'un pliage effectif. Pour la suite de pliage régulier, on débute toujours par un g, ce qui donne, à la première étape,

$$g.d.g.d.g.d.g.d.g.d \ldots,$$

à la deuxième

$$ggd.gdd.ggd.gdd.ggd \ldots,$$

à la troisième

$$ggdggdd.ggddgdd.ggd \ldots,$$

et ainsi de suite.

Un résultat remarquable affirme qu'en ouvrant à 90 degrés tous les plis d'une suite de pliage, on obtient un chemin sur le réseau carré qui n'emprunte jamais deux fois la même arête et ne se traverse pas [73, 74]. C'est donc presque un chemin auto-évitant (cf. chapitre 3). Il serait d'ailleurs intéressant de savoir si les deux modèles ont même constante de croissance. Le début du chemin fourni par la suite de pliage régulier est dessiné en figure 4.2.

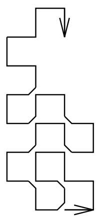


FIG. 4.2 – *Le chemin obtenu en dépliant le pliage régulier.*

Les suites de pliage forment une famille de cardinal $2^{\mathbb{N}}$, et sont donc indénombrables. Toutefois, J.-P. Allouche a démontré qu'elles ont toutes même fonction de complexité, et que celle-ci est $p_u(n) = 4n$ dès que $n \geq 7$ [3]. Dans l'article [4], nous renforçons ce résultat en démontrant une propriété de *synchronisation* des facteurs de pliage : pour $n \geq 7$, il existe $4n$ indices tels que, dans toute suite de pliage, les $4n$ mots de longueur n débutant en ces positions soient distincts. En d'autres termes, on sait *où* on pourra systématiquement trouver les $4n$ facteurs, indépendamment de la suite considérée. Nous donnons aussi une borne uniforme (et linéaire) pour la fonction de récurrence de ces suites. Enfin, nous étudions le langage formé de tous les facteurs des suites de pliage, que nous énumérons.

Nous avons ensuite procédé à une étude analogue pour les suites de Rudin-Shapiro, qui s'obtiennent à partir des suites de pliage par un procédé d'intégration [5].

4.2 Chaînes de mots

Les chaînes d'addition calculant les entiers sont des objets classiques, dont l'étude est motivée par le calcul des puissances d'un élément d'un monoïde. Une chaîne d'addition est un ensemble E d'entiers strictement positifs, tel que chaque élément de E distinct de 1 soit la somme de deux éléments de E, éventuellement égaux. On dit que E *calcule* l'entier n si $n \in E$. Par exemple, la chaîne $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ calcule 32, et la chaîne $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 13, 14, 27\}$ calcule (lentement) 27. La *longueur de chaîne* ℓ_n d'un entier n est la longueur de la plus courte chaîne calculant n. On ne connaît pas de formule explicite pour ℓ_n, mais on sait que ℓ_n croît comme $\log(n)$ [154].

La notion de chaîne de calcul peut en fait être étendue aux éléments du monoïde libre A^*, pour tout alphabet fini A. Une *chaîne de mots* est alors un ensemble E tel que tout élément de $E \setminus A$ puisse être obtenu par concaténation de deux mots de E, éventuellement égaux. La chaîne *calcule* le mot w si celui-ci lui appartient. Par exemple, la chaîne $\{a, b, ab, bb, bbab, bbabab\}$ calcule le mot $bbabab$. Les chaînes d'addition correspondent au cas où $|A| = 1$.

De nouveau, on définit la *longueur de chaîne* d'un mot w comme la longueur de la plus petite chaîne qui le calcule. Dès que l'alphabet A a au moins deux lettres, la longueur de chaîne n'est plus une fonction logarithmique de la longueur du mot : on peut trouver des mots de longueur n dont la longueur de chaîne soit de l'ordre de $n/\log(n)$ [32]. Mais des mots ayant beaucoup de régularités (ou de répétitions) vont avoir une longueur de chaîne réduite. C'est pourquoi Diwan a introduit, en 1986, la longueur de chaîne comme mesure de la complexité d'un mot [89]. Le calcul effectif de chaînes de petite longueur est par ailleurs relié aux algorithmes de compression [58].

Arnold et Brlek [13] ont évalué la longueur de chaîne des préfixes de longueur 2^n du mot de Thue-Morse $abbabaabbaababba\ldots$. Celui-ci, introduit par Thue en 1906 comme exemple de mot infini sur deux lettres sans facteur cubique www, est un vétéran de la combinatoire des mots. On le construit facilement en utilisant le fait qu'il est point fixe du morphisme

$$\Phi : \begin{cases} a \longmapsto ab, \\ b \longmapsto ba. \end{cases}$$

Son préfixe de longueur 2^n est $U_n = \Phi^n(a)$, et les plus courtes chaînes calculant U_n ont $2n + 1$ éléments. Par exemple, la chaîne $\{a, b, ab, aab, abb, abbab, abbabaab\}$ calcule $U_3 = abbabaab$ et a 7 éléments.

Arnold et Brlek ont conjecturé que le nombre de chaînes de longueur minimale calculant U_n est ... 19, dès que $n \geq 3$ [13]. Si un résultat d'énumération signifie plus que son simple énoncé, et traduit en fait les propriétés de *structure* des objets qu'il énumère, c'est bien celui-là. En remarquant que, si E est une chaîne minimale calculant U_{n-1}, alors $\{a, b\} \cup \Phi(E)$ est une chaîne minimale calculant U_n, on voit que le fait que le nombre de chaînes minimales soit ultimement constant signifie qu'elles se construisent *toutes* par itération du procédé ci-dessus. J'ai démontré la conjecture d'A. et B. dans l'article [40].

Bibliographie

[1] A. A. Ali. Enumeration of directed site animals on the decorated square lattices. *Physica A*, 202:520–528, 1994.

[2] J.-P. Allouche. Automates finis en théorie des nombres. *Exposition. Math.*, 5:239–266, 1987.

[3] J.-P. Allouche. The number of factors in a paperfolding sequence. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 46:23–32, 1992.

[4] J.-P. Allouche and M. Bousquet-Mélou. Canonical positions for the factors in the paperfolding sequences. *Theoret. Comput. Science*, 129:263–278, 1994.

[5] J.-P. Allouche and M. Bousquet-Mélou. Facteurs des suites de Rudin-Shapiro généralisées. *Bulletin of the Belgian Math. Society*, 1:145–164, 1994.

[6] J.-P. Allouche and M. Bousquet-Mélou. On the conjectures of Rauzy and Shallit for infinite words. *Commentationes Math. Univ. Carolinae*, 36:705–712, 1995.

[7] L. Alonso and R. Cerf. The three-dimensional polyominoes of minimal area. *Electronic J. Combin.*, 3, 1996, R. 27.

[8] G. Andrews. Plane partitions V: the TSSCPP conjecture. *J. Combin. Theory Ser. A*, 66(1):28–39, 1994.

[9] G. E. Andrews. Macmahon's partitions analysis I: the lecture hall partition theorem. Preprint, Pennsylvania State University, 1996.

[10] G. E. Andrews. *The theory of partitions*, volume 2 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1976.

[11] G. E. Andrews. The hard-hexagon model and Rogers-Ramanujan type identities. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 78(9):5290–5292, 1981.

[12] G. E. Andrews. *q-Series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra*, volume 66 of *Conference board of the mathematical sciences*. American Mathematical Society, 1986.

[13] A. Arnold and S. Brlek. Optimal word chains for the Thue-Morse word. *Inform. and Comput.*, 83:140–151, 1989.

[14] F. C. Auluck. On some new types of partitions associated with generalized Ferrers graphs. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47:679–686, 1951.

[15] E. Barcucci, F. Bertoli, A. del Lungo, and R. Pinzani. The average height of directed column-convex polyominoes having square, hexagonal and triangular cells. In M. Bousquet-Mélou and D. E. Loeb, editors, *Proceedings of Physics and Combinatorics, Math. Comput. Modelling*, Marseille, march 1995.

[16] E. Barcucci, A. del Lungo, R. Pinzani, and R. Sprugnoli. La hauteur des polyominos dirigés verticalement convexes. In *Proceedings of the 31^{th} Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Publications de l'IRMA, 1993.

[17] E. Barcucci, R. Pinzani, E. Rodella, and R. Sprugnoli. A characterization of binary search networks. In L. Budach, editor, *Proceedings of the 8^{th} International Conference Fundamentals of Computational Theory*, volume 529 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 126–135, 1991.

[18] E. Barcucci, R. Pinzani, and R. Sprugnoli. Génération aléatoire des animaux dirigés. In J. Labelle and J.-G. Penaud, editors, *Actes de l'Atelier de combinatoire franco-québecois*, volume 10 of *Publications du LACIM*, pages 17–25, Bordeaux, may 1991.

[19] E. Barcucci, R. Pinzani, and R. Sprugnoli. Directed column-convex polyominoes by recurrence relations. In M.-C. Gaudel and J.-P. Jouannaud, editors, *Proceedings of TAPSOFT '93*, volume 668 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 282–298, 1993.

[20] R. J. Baxter. Hard hexagons: exact solution. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 13:L61–L70, 1980.

[21] R. J. Baxter. Rogers-Ramanujan identities in the hard hexagon model. *J. Statist. Phys.*, 26(3):427–452, 1981.

[22] R. J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics.* Academic Press, San Diego, 1982.

[23] D. Beauquier and M. Nivat. On translating one polyomino to tile the plane. *Discrete Comput. Geom.*, 6:575–592, 1991.

[24] E. A. Bender. Asymptotic methods in enumeration. *SIAM Rev.*, 16(4):485–515, 1974.

[25] E. A. Bender. Convex n-ominoes. *Discrete Math.*, 8:219–226, 1974.

[26] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, volume 19 of *Publications du LACIM*. Université du Québec à Montréal, 1994.

[27] F. Bergeron and C. Reutenauer. Combinatorial resolution of systems of differential equations III: a special class of differentially algebraic series. *Europ. J. Combinatorics*, 11:501–512, 1990.

[28] A. Berkovich. Fermionic counting of RSOS states and Virasoro character formulas for the unitary minimal series $M(\nu, \nu+1)$: exact results. *Nucl. Phys. B*, 431:315–348, 1994.

[29] A. Berkovich and B. M. McCoy. Generalizations of the Andrews-Bressoud identities for the $n = 1$ superconformal model $SM(2, 4\nu)$. In M. Bousquet-Mélou and D. E. Loeb, editors, *Proceedings of Physics and Combinatorics*, *Math. Comput. Modelling*, Marseille, march 1995.

[30] J. Berstel. *Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation*, volume 20 of *Publications du LACIM*. Université du Québec à Montréal, 1994.

[31] J. Berstel. Recent results in sturmian words. In *Proceedings of Developments in Language Theory*, Magdeburg 1995, 1996. World Scientific.

[32] J. Berstel and S. Brlek. On the length of word chains. *Inform. Process. Lett.*, 26:23–28, 1987.

[33] J. Bétréma and J.-G. Penaud. Animaux et arbres guingois. *Theoret. Comput. Sci.*, 117:67–89, 1993.

[34] J. Bétréma and J.-G. Penaud. Modèles avec particules dures, animaux dirigés et séries en variables partiellement commutatives. Technical Report 93-18, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1993.

[35] V. K. Bhat, H. L. Bhan, and Y. Singh. Enumeration of directed compact site animals in two dimensions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 19:3261–3265, 1986.

[36] R. Bott. An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups. *Bull. Soc. Math. France*, 84:251–281, 1956.

[37] M. Bousquet-Mélou. New enumerative results on two-dimensional directed animals. *Discrete Math.* To appear. Report LaBRI No. 1082-95.

[38] M. Bousquet-Mélou. *q-Énumération de polyominos convexes.* PhD thesis, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1991. Volume 9 of *Publications du LACIM*, Université du Québec à Montréal.

[39] M. Bousquet-Mélou. Convex polyominoes and algebraic languages. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:1935–1944, 1992.

[40] M. Bousquet-Mélou. The number of minimal word chains computing the Thue-Morse word. *Inform. Process. Lett.*, 44:57–64, 1992.

[41] M. Bousquet-Mélou. Une bijection entre les polyominos convexes dirigés et les mots de Dyck bilatères. *RAIRO Inform. Théor. Appl.*, 26:205–219, 1992.

[42] M. Bousquet-Mélou. q-Énumération de polyominos convexes. *J. Combin. Theory Ser. A*, 64:265–288, 1993.

[43] M. Bousquet-Mélou. Codage des polyominos convexes et équations pour l'énumération suivant l'aire. *Discrete Appl. Math.*, 48:21–43, 1994.

[44] M. Bousquet-Mélou. Polyominoes and polygons. In H. Barcelo and G. Kalai, editors, *Proceedings of Jerusalem Combinatorics '93*, volume 178 of *Contemporary Mathematics*, pages 55–70, 1994.

[45] M. Bousquet-Mélou. A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons. *Discrete Math.*, 154:1–25, 1996.

[46] M. Bousquet-Mélou. Percolation models and animals. *European J. Combin.*, 17:343–369, 1996.

[47] M. Bousquet-Mélou and A. R. Conway. Enumeration of directed animals on an infinite family of lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:3357–3365, 1996.

[48] M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson. Lecture hall partitions. *The Ramanujan Journal.* To appear. Report LaBRI 1107-96.

[49] M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson. Lecture hall partitions 2. *The Ramanujan Journal.* To appear. Report LaBRI 1117-96.

[50] M. Bousquet-Mélou and J.-M. Fédou. The generating function of convex polyominoes: the resolution of a q-differential system. *Discrete Math.*, 137:53–75, 1995.

[51] M. Bousquet-Mélou and A. J. Guttmann. Enumeration of three-dimensional convex polygons. Technical Report 1132-96, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1996. Submitted to *Annals of Combinatorics.*

[52] M. Bousquet-Mélou and S. Linusson. Lecture hall partitions to base b. LaBRI, Université Bordeaux 1, 1996.

[53] M. Bousquet-Mélou and X. G. Viennot. Empilements de segments et q-énumération de polyominos convexes dirigés. *J. Combin. Theory Ser. A*, 60:196–224, 1992.

[54] R. G. Bowers and A McKerrel. An exact relation between the classical n-vector model ferromagnet and the self-avoiding walk problem. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 6:2721–2732, 1973.

[55] R. Brak and A. J. Guttmann. Exact solution of the staircase and row-convex polygon perimeter and area generating function. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:4581–4588, 1990.

[56] R. Brak, A. J. Guttmann, and I. G. Enting. Exact solution of the row-convex polygon perimeter generating function. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:2319–2326, 1990.

[57] R. Brak, A. L. Owczarek, and T. Prellberg. Exact scaling behaviour of partially convex vesicles. *J. Statist. Phys.*, 76:1101–1128, 1994.

[58] S. Brlek. Remarques sur les chaînes de mots. Communication personnelle, 1996.

[59] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes I. Crystals and mazes. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 53:629–641, 1957.

[60] P. Cartier and D. Foata. *Problèmes combinatoires de commutations et réarrangements*, volume 85 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1969.

[61] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France, and G. Rauzy. Suites algébriques, automates et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 108:401–419, 1980.

[62] J. Coates. Courbes elliptiques. Technical report, Université Bordeaux I, 1994. Exposé aux Leçons de Mathématiques d'Aujourd'hui.

[63] L. Comtet. *Analyse combinatoire.* Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[64] A. R. Conway. Longitudinal size exponent for square-lattice directed animals. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:7007–7010, 1994.

[65] A. R. Conway. Some exact results for moments of $2D$ directed animals. Technical report, University of Melbourne, 1995. Submitted.

[66] A. R. Conway, R. Brak, and A. J. Guttmann. Directed animals on two-dimensional lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:3085–3091, 1993.

[67] A. R. Conway, I. G. Enting, and A. J. Guttmann. Algebraic techniques for enumerating self-avoiding walks on the square lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:1519–1534, 1993.

[68] A. R. Conway and A. J. Guttmann. On two-dimensional percolation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 28:891–904, 1995.

[69] A. R. Conway and A. J. Guttmann. Square lattice self-avoiding walks and corrections-to-scaling. Technical report, University of Melbourne, 1996. Submitted.

[70] J. H. Conway and J. C. Lagarias. Tiling with polyominoes and combinatorial group theory. *J. Combin. Theory Ser. A*, 53:183–208, 1990.

[71] R. Cori. *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, volume 27 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1975.

[72] R. Cori and B. Vauquelin. Planar maps are well-labeled trees. *Can. J. Math.*, 33:1023–1042, 1981.

[73] C. Davis and D. E. Knuth. Number representations and dragon curves I. *Journal of Recreational Mathematics*, 3(2):66–81, 1970.

[74] C. Davis and D. E. Knuth. Number representations and dragon curves II. *Journal of Recreational Mathematics*, 3:133–149, 1970.

[75] P.-G. de Gennes. *Scaling concepts in polymer physics.* Cornell University Press, 1979.

[76] M. Dekking, M. Mendès France, and A. van der Poorten. Folds! *Math. Intelligencer*, 4:130–195, 1982.

[77] M. Delest. Polyominoes and animals: some recent results. *J. Math. Chem.*, 8:3–18, 1991.

[78] M. Delest and J.-M. Fédou. Exact formulas for fully diagonal compact animals. Technical Report 89-07, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1989.

[79] M.-P. Delest. Generating functions for column-convex polyominoes. *J. Combin. Theory Ser. A*, 48:12–31, 1988.

[80] M.-P. Delest and S. Dulucq. Enumeration of directed column-convex animals with a given perimeter and area. *Croat. Chem. Acta*, 66:59–80, 1993.

[81] M.-P. Delest and J.-M. Fédou. Enumeration of skew Ferrers diagrams. *Discrete Math.*, 112:65–79, 1993.

[82] M.-P. Delest, D. Gouyou-Beauchamps, and B. Vauquelin. Enumeration of parallelogram polyominoes with given bond and site perimeter. *Graphs Combin.*, 3:325–339, 1987.

[83] M.-P. Delest and G. Viennot. Algebraic languages and polyomino enumeration. *Theoret. Comput. Sci.*, 34:169–206, 1984.

[84] A. Denise and D. Gouyou-Beauchamps. Communication personnelle. 1996.

[85] D. Dhar. Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to Baxter's hard square lattice gas model. *Phys. Rev. Lett.*, 49:959–962, 1982.

[86] D. Dhar. Exact solution of a directed-site animals-enumeration problem in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 51:853–856, 1983.

[87] D. Dhar, M. K. Phani, and M. Barma. Enumeration of directed site animals on two-dimensional lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15:L279–L284, 1982.

[88] V. Diekert and G. Rozenberg, editors. *The book of traces.* World Scientific, Singapore, 1995.

[89] A. A. Diwan. A new combinatorial complexity measure for words. Tata Institute, Bombay, India, 1986.

[90] C. Domb. Finite cluster partition functions for the D-vector model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 9:983–998, 1976.

[91] V. Domocos. A combinatorial method for the enumeration of column-convex polyominoes. *Discrete Math.*, 152:115–123, 1996.

[92] J.-P. Dubernard and I. Dutour. Énumération de polyominos convexes dirigés. In R. Simion, editor, *Proceedings of the 6^{th} conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, pages 109–118, DIMACS, may 1994.

[93] S. Dulucq and D. Gouyou-Beauchamps. Sur les facteurs des suites de Sturm. *Theoret. Comput. Sci.*, 71:381–400, 1990.

[94] I. Dutour. *Grammaires d'objets : énumération, bijections et génération aléatoire.* PhD thesis, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1996.

[95] I. G. Enting and A. J. Guttmann. Area-weighted moments of convex polygons on the square lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:2639–2642, 1989.

[96] I. G. Enting and A. J. Guttmann. Polygons on the honeycomb lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:1371–1384, 1989.

[97] I. G. Enting, A. J. Guttmann, L. B. Richmond, and N. C. Wormald. Enumeration of almost-convex polygons on the square lattice. *Random Structures Algorithms*, 3:445–461, 1992.

[98] H. Eriksson. *Computational and combinatorial aspects of Coxeter groups.* PhD thesis, KTH, Stockholm, 1994.

[99] H. Eriksson and K. Eriksson. Affine Coxeter groups as infinite permutations. In B. Leclerc and J.-Y. Thibon, editors, *Proceedings of the 7^{th} conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, pages 185–194, Marne-la-Vallée, june 1995.

[100] J. W. Essam. Exact enumeration of parallel walks on directed lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:L863–L869, 1993.

[101] L. Euler. *Introductio in analysin infinitorum.* Marcum-Michaelem Bousquet, Lausannae, 1748. Traduction française : Introduction à l'analyse infinitésimale, ACL éditions, Paris, 1987.

[102] J.-M. Fédou and N. Rouillon. Polyominos et q-analogues de fonctions de Bessel, une preuve combinatoire. In B. Leclerc and J.-Y. Thibon, editors, *Proceedings of the 7^{th} conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, pages 203–220, Marne-la-Vallée, june 1995.

[103] S. Feretić. A new coding for column-convex directed animals. *Croat. Chem. Acta*, 66:81–90, 1993.

[104] S. Feretić. The area generating function for the column-convex polyominoes on the checkerboard lattice. *Croat. Chem. Acta*, 68:75–90, 1995.

[105] S. Feretić. A new way of counting the column-convex polyominoes by the perimeter. In B. Leclerc and J.-Y. Thibon, editors, *Proceedings of the 7^{th} conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, pages 371–378, Marne-la-Vallée, june 1995. To appear in *Discrete Math.*

[106] S. Feretić. An alternative method for q-counting directed column-convex polyominoes. In D. Stanton and D. White, editors, *Proceedings of the 8^{th} conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, pages 187–198, Minneapolis, june 1996.

[107] S. Feretić. The column-convex polyominoes perimeter generating function for everybody. *Croat. Chem. Acta*, 1996. To appear.

[108] S. Feretić and D. Svrtan. On the number of column-convex polyominoes with given perimeter and number of columns. In A. Barlotti, M. Delest, and R. Pinzani, editors, *Proceedings of the* 5^{th} *conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, pages 201–214, Florence, june 1993.

[109] S. Feretić and D. Svrtan. Combinatorics of diagonally convex directed polyominoes. In R. Simion, editor, *Proceedings of the* 6^{th} *conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, pages 163–172, DIMACS, may 1994. To appear in *Discrete Math.*

[110] S. Feretić and D. Svrtan. Combinatorics of diagonally convex directed polyominoes. *Discrete Math.*, 157:147–168, 1996.

[111] M. E. Fisher and M. F. Sykes. Excluded-volume problem and the Ising model of ferromagnetism. *Phys. Rev.*, 114(1):45–58, 1959.

[112] P. Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Math.*, 32:125–161, 1980.

[113] P. Flajolet. Analytic models and ambiguity of context-free languages. *Theoret. Comput. Sci.*, 49:283–309, 1987.

[114] P. Flajolet. Pólya festoons. Technical report, INRIA Rocquencourt, Project Algorithms, 1991.

[115] P. Flajolet and A. Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM J. Disc. Math.*, 3(2):216–240, 1990.

[116] P. Flajolet, B. Salvy, and P. Zimmermann. Lambda–Upsilon–Omega: the 1989 cookbook. Technical Report 1073, INRIA Rocquencourt, Le Chesnay, France, 1989.

[117] P. Flajolet and R. Sedgewick. The average case analysis of algorithms: complex asymptotics and generating functions. Technical Report 2026, INRIA Rocquencourt, Le Chesnay, France, 1993.

[118] P. Flajolet and R. Sedgewick. The average case analysis of algorithms: counting and generating functions. Technical Report 1888, INRIA Rocquencourt, Le Chesnay, France, 1993.

[119] P. Flajolet and R. Sedgewick. The average case analysis of algorithms: saddle point asymptotics. Technical Report 2376, INRIA Rocquencourt, Le Chesnay, France, 1994.

[120] P. Flajolet and M. Soria. Gaussian limiting distributions for the number of components in combinatorial structures. *J. Combin. Theory Ser. A*, 53:165–182, 1990.

[121] P. Flajolet and M. Soria. General combinatorial schemas: gaussian limit distributions and exponential tails. *Discrete Math.*, 114:159–180, 1993.

[122] D. Foata and M. P. Schützenberger. *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, volume 138 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, New-York, Berlin, 1970.

[123] G. Forgacs and V. Privman. Directed compact lattice animals: exact results. *J. Statist. Phys.*, 49:1165–1180, 1987.

[124] M. Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 196:126–134, Dec. 1957.

[125] A. M. Garsia. A q-analogue of the Lagrange inversion formula. *Houston J. Math.*, 7:205–237, 1981.

[126] G. Gasper and M. Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, 1990.

[127] I. Gessel. A noncommutative generalization and q-analog of the Lagrange inversion formula. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 257:455–482, 1980.

[128] I. Gessel. On the number of convex polyominoes. Manuscript, 1990.

[129] I. Gessel and G. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. Math.*, 58(3):300–321, 1985.

[130] J. W. L. Glaisher. A theorem in partitions. *Messenger of Math.*, 12:158–170, 1883.

[131] S. W. Golomb. Checker boards and polyominoes. *Amer. Math. Monthly*, 61:675–682, 1954.

[132] S. W. Golomb. *Polyominoes.* Scribner, New-York, 1965.

[133] S. W. Golomb. Polyominoes which tile rectangles. *J. Combin. Theory Ser. A*, 51:117–124, 1989.

[134] X. Gourdon and B. Salvy. Effective asymptotics of linear recurrences with rational coefficients. *Discrete Math.*, 153:145–163, 1996.

[135] D. Gouyou-Beauchamps and G. Viennot. Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem. *Adv. in Appl. Math.*, 9:334–357, 1988.

[136] A. J. Guttmann and I. G. Enting. The number of convex polygons on the square and honeycomb lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 21:L467–L474, 1988.

[137] A. J. Guttmann and I. G. Enting. Inversion relations, the Ising model and self-avoiding polygons. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, 47:735–738, 1996.

[138] A. J. Guttmann and I. G. Enting. Solvability of some statistical mechanical models. *Phys. Rev. Lett.*, 76:344–347, 1996.

[139] A. J. Guttmann and T. Prellberg. Staircase polygons, elliptic integrals, Heun functions and lattice Green functions. *Phys. Rev. E*, 47:R2233–R2236, 1993.

[140] A. J. Guttmann, T. Prellberg, and A. L. Owczarek. On the symmetry classes of planar self-avoiding walks. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:6615–6623, 1993.

[141] A. J. Guttmann and N. C. Wormald. On the number of spiral self-avoiding walks. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 17:L271–L274, 1984.

[142] V. Hakim and J.-P. Nadal. Exact results for 2D directed animals on a strip of finite width. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 16:L213–L218, 1983.

[143] J. M. Hammersley. The number of polygons on a lattice. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 57:516–523, 1961.

[144] F. Harary. *Graph theory and crystal physics*, chapter 1, *Graphical enumeration problems*, pages 1–41. Academic Press, London, New-York, 1967.

[145] F. Ibn-Majdoub-Hassani. *Combinatoire des polyominos et des tableaux décalés oscillants.* PhD thesis, LRI, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1996.

[146] G. S. Joyce. On the Dhar directed site animals enumeration problem for the simple cubic lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:L919–L924, 1989.

[147] G. S. Joyce and A. J. Guttmann. Exact results for the generating function of directed column-convex animals on the square lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:4359–4367, 1994.

[148] D. Kim. The number of convex polyominoes with given perimeter. *Discrete Math.*, 70:47–51, 1988.

[149] D. A. Klarner. Some results concerning polyominoes. *Fibonacci Quart.*, 3:9–20, 1965.

[150] D. A. Klarner. Cell growth problems. *Can. J. Math.*, 19:851–863, 1967.

[151] D. A. Klarner and R. L. Rivest. A procedure for improving the upper bound for the number of n-ominoes. *Can. J. Math.*, 25:585–602, 1973.

[152] D. A. Klarner and R. L. Rivest. Asymptotic bounds for the number of convex n-ominoes. *Discrete Math.*, 8:31–40, 1974.

[153] D. A. Klarner and P. Woodworth. Asymptotics for coefficients of algebraic functions. *Aequationes Math.*, 23:236–241, 1981.

[154] D. E. Knuth. *The art of computer programming*, volume 2. Addisson-Wesley, Reading, MA, second edition, 1981.

[155] C. Krattenthaler. Operators methods and Lagrange inversion: a unified approach to Lagrange formulas. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 305:431–465, 1988.

[156] G. Kuperberg. Symmetries of plane partitions and the permanent-determinant method. *J. Combin. Theory Ser. A*, 68:115–151, 1994.

[157] J. Labelle. Paths in the cartesian, triangular and hexagonal lattices. Technical Report 242, LACIM, Université du Québec à Montréal, 1994.

[158] M. Lassalle. Polynômes de Jacobi généralisés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312:425–428, 1991.

[159] M. Latteux, B. Ratoandromanana, D. Robillard, and D. Simplot. Mots de figures composées de pixels. Technical Report 95-269, LIFL, Université de Lille, France, 1995.

[160] P. Leroux and A. Robitaille. Classes de symétrie des polyominos convexes. Université du Québec à Montréal, Preprint 1996.

[161] J. Levine. Note on the number of pairs of non-intersecting routes. *Scripta Math.*, 24:335–338, 1959.

[162] K. Y. Lin. Perimeter generating function for row-convex polygons on the rectangular lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:4703–4705, 1990.

[163] K. Y. Lin. Exact solution of the convex polygon perimeter and area generating function. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24:2411–2417, 1991.

[164] K. Y. Lin. Number of almost-convex polygons on the square lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992.

[165] K. Y. Lin and S. J. Chang. Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 21:2635–2642, 1988.

[166] K. Y. Lin and W. J. Tzeng. Perimeter and area generating functions of the staircase and row-convex polygons on the rectangular lattice. *Internat. J. Modern Phys. B*, 5:1913–1925, 1991.

[167] K. Y. Lin and F. Y. Wu. Unidirectional convex polygons on the honeycomb lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:5003–5010, 1990.

[168] L. Lipshitz. The diagonal of a D-finite power series is D-finite. *J. Algebra*, 113:373–378, 1988.

[169] L. Lipshitz. D-finite power series. *J. Algebra*, 122:353–373, 1989.

[170] M. Lothaire. *Combinatorics on words*, volume 17 of *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. Addison-Wesley, 1983.

[171] D. MacDonald, D. L. Hunter, K. Kelly, and N. Jan. Self-avoiding walks in two to five dimensions: exact enumeration and series studies. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:1429–1440, 1992.

[172] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press, 1979.

[173] P. A. MacMahon. *Combinatory analysis (2 vols.)*. Cambridge University Press, 1915–1916. Reprinted: Chelsea, New-York, 1960.

[174] N. Madras and G. Slade. *The self-avoiding walk*. Probability and its Applications. Birkhäuser, Boston, 1993.

[175] F. Mignosi. On the number of factors of sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 82:71–84, 1991.

[176] W. H. Mills, D. P. Robbins, and H. Rumsey. Proof of the Macdonald conjecture. *Invent. Math.*, 66:73–87, 1982.

[177] M. Morse and G. Hedlund. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.*, 60:815–866, 1938.

[178] M. Morse and G. Hedlund. Symbolic dynamics II: sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.

[179] L. Moser and E. L. Whitney. Weighted compositions. *Can. Math. Bull.*, 4(1):39–43, 1961.

[180] G. Komatsu N. Inui, M. Katori and K. Kameoka. The number of directed compact site animals and extrapolation formula of directed percolation probability. *J. Phys. Soc. Japan*, 66:1306–1309, 1997.

[181] J.-P. Nadal, B. Derrida, and J. Vannimenus. Directed animals in 2 dimensions : numerical and exact results. *J. Physique*, 43:1561–1574, 1982.

[182] B. Nienhuis. Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1062–1065, 1982.

[183] B. Nienhuis. Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas. *J. Statist. Phys.*, 34:731–761, 1984.

[184] A. L. Owczarek and T. Prellberg. Exact solution of the discrete (1+1)-dimensional SOS model with field and surface interactions. *J. Statist. Phys.*, 70:1175–1194, 1993.

[185] J.-G. Penaud. Animaux dirigés diagonalement convexes et arbres ternaires. Technical report, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1990.

[186] M. Petkovšek, H. S. Wilf, and D. Zeilberger. $A = B$. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

[187] G. Pólya. On the number of certain lattice polygons. *J. Combin. Theory*, 6:102–105, 1969.

[188] T. Prellberg. Uniform q-series asymptotics for staircase polygons. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 28:1289–1304, 1995.

[189] T. Prellberg and R. Brak. Critical exponents from nonlinear functional equations for partially directed cluster models. *J. Statist. Phys.*, 78:701–730, 1995.

[190] V. Privman and M. Barma. Radii of gyration of fully and partially directed animals. *Z. Phys. B: Condensed Matter*, 57:59–63, 1984.

[191] V. Privman and G. Forgacs. Exact solution of the partially directed compact lattice animal model. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:L543–L547, 1987.

[192] V. Privman and N. M. Švrakić. Exact generating function for fully directed compact lattice animals. *Phys. Rev. Lett.*, 60:1107–1109, 1988.

[193] V. Privman and N. M. Švrakić. *Directed models of polymers, interfaces, and clusters: scaling and finite-size properties*, volume 338 of *Lecture Notes in Phys.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[194] G. Rauzy. Suites à termes dans un alphabet fini. *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 1982—1983, exposé 25.

[195] R. C. Read. Contributions to the cell growth problem. *Can. J. Math.*, 14:1–20, 1962.

[196] D. H. Redelmeier. Counting polyominoes: yet another attack. *Discrete Math.*, 36:191–203, 1981.

[197] S. Redner and I. Majid. Critical properties of directed self-avoiding walks. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 16:L307–L310, 1983.

[198] R. M. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Invent. Math.*, 12:177–209, 1971.

[199] E. Roblet. *Une interprétation combinatoire des approximants de Padé.* PhD thesis, LaBRI, Université Bordeaux 1, 1994. Volume 17 of *Publications du LACIM*, Université du Québec à Montréal.

[200] E. Roblet and X. G. Viennot. Thérie combinatoire des T-fractions et approximants de Padé en deux points. *Discrete Math.*, 153:271–288, 1996.

[201] B. Salvy and P. Zimmermann. GFUN: a MAPLE package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20:163–167, 1994.

[202] J. Shallit and Y. Breitbart. Automaticity: properties of a measure of descriptional complexity. In P. Enjalbert, E. W. Mayr, and K. W. Wagner, editors, *STACS 1994*, volume 775 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 619–630.

[203] R. P. Stanley. Combinatorial reciprocity theorems. *Adv. Math.*, 14:194–253, 1974.

[204] R. P. Stanley. Differentiably finite power series. *Europ. J. Combinatorics*, 1:175–188, 1980.

[205] R. P. Stanley. Linear diophantine equations and local cohomology. *Invent. Math.*, 68:175–193, 1982.

[206] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics*, volume 1. Wadsworth and Brooks, Monterey, 1986.

[207] D. Stauffer and A. Aharony. *Introduction to percolation theory.* Taylor and Francis, London, second edition, 1992.

[208] J. R. Stembridge. Nonintersecting paths, pfaffians and plane partitions. *Adv. Math.*, 83:96–131, 1990.

[209] J. R. Stembridge. Some hidden relations involving the ten symmetry classes of plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 69:372–409, 1994.

[210] G. Szekeres and A. J. Guttmann. Spiral self-avoiding walks on the triangular lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:481–493, 1987.

[211] H. N. V. Temperley. Statistical mechanics and the partition of numbers I. The transition of liquid helium. *Proc. Royal. Soc. London A*, 199:361–375, 1949.

[212] H. N. V. Temperley. Statistical mechanics and the partition of numbers II. The form of crystal surfaces. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 48:683–697, 1952.

[213] H. N. V. Temperley. Combinatorial problems suggested by the statistical mechanics of domains and of rubber-like molecules. *Phys. Rev.*, 103:1–16, 1956.

[214] A. Thue. Über unendliche Zeichenreihen. *Kra. Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. Kl., Christiana*, 7:1–22, 1906.

[215] A. Thue. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichereihen. *Kra. Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. Kl., Christiana*, 10:1–67, 1912.

[216] W. J. Tzeng and K. Y. Lin. Exact solution of the row-convex polygon generating function for the checkerboard lattice. *Internat. J. Modern Phys. B*, 5:2551–2562, 1991.

[217] G. Viennot. Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux. LACIM, Université du Québec à Montréal, 1983.

[218] G. Viennot. *Problèmes combinatoires posés par la physique statistique*, volume 121–122 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1985.

[219] X. Viennot. Heaps of pieces 1: basic definitions and combinatorial lemmas. In G. Labelle and P. Leroux, editors, *Combinatoire énumérative*, volume 1234 of *Lecture Notes in Math.*, Montréal, 1985.

[220] X. G. Viennot. A survey of polyomino enumeration. In P. Leroux and C. Reutenauer, editors, *Proceedings of the* 4^{th} *conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, volume 11 of *Publications du LACIM*, pages 399–420, 1992.

[221] E. M. Wright. Stacks. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 19:313–320, 1968.

[222] F. Y. Wu. The infinite-state Potts model and restricted multidimensional partitions of an integer. In M. Bousquet-Mélou and D. E. Loeb, editors, *Proceedings of Physics and Combinatorics*, *Math. Comput. Modelling*, Marseille, march 1995.

[223] D. Zeilberger. Self-avoiding walks, the language of science and Fibonacci numbers. *J. Statist. Plann. Inference.* To appear. http://www.math.temple.edu/ zeilberg.

[224] D. Zeilberger. A holonomic systems approach to special functions identities. *J. Comput. Appl. Math.*, 32:321–368, 1990.

Curriculum vitae

Nom : Bousquet-Mélou
Prénom : Mireille
Date de naissance : 12 mai 1967
Adresse : 40 bis rue Saint-Rémi, 33000 Bordeaux. Téléphone : 56 52 24 77
Adresse professionnelle :
LaBRI, Université Bordeaux 1
351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex
Téléphone : 56 84 69 06 - Fax : 56 84 66 69 - bousquet@labri.u-bordeaux.fr

Fonctions occupées

- 1986–1990 : Élève à l'École Normale Supérieure (Ulm)
- 1990– : Chargée de recherche au CNRS

Séjours dans des universités étrangères

- Septembre–Novembre 1991 : Université du Québec à Montréal, Canada
- Avril–Mai 1992 : Institut Mittag-Leffler, Stockholm, Suède
- Avril 1994 : Université du Québec à Montréal, Canada
- Avril 1995 : Université du Québec à Montréal, Canada
- Septembre–Novembre 1995 : Université de Melbourne, Australie

Diplômes

- 1988 : DEA "Statistiques et modélisation stochastique", Université Paris 11
- 1991 : Doctorat de Mathématiques et Informatique, Université Bordeaux 1 (Directeur X.-G. Viennot). Thèse éditée par les Publications du LACIM (Université du Québec à Montréal), No. 9, 1991.

Autres "distinctions"

- 1989 : Agrégation de mathématiques, option probabilités, rang 1
- 1993 : Médaille de bronze du CNRS
- 1993 : Prix IBM "Jeune chercheur" en informatique

Activités scientifiques diverses

- 1992–1995 : Responsable du Séminaire d'Informatique du LaBRI.
- Organisatrice du colloque "Physique et Combinatoire", mars 1995, CIRM, Luminy (France). Édition d'un volume spécial du *Journal of Mathematical and Computer Modelling* consacré à ces thèmes.
- 1996–1997 : Cours de combinatoire énumérative au DEA d'informatique de l'Université Bordeaux 1 (deuxième semestre).

Publications

Note. Les articles marqués d'une astérisque correspondent à des travaux effectués lors de mon doctorat. Les autres sont postérieurs.

Partitions d'entiers

[1] Bousquet-Mélou (M.) et Eriksson (K.). – Lecture hall partitions. *The Ramanujan Journal.* – À paraître. Rapport LaBRI No. 1107-96.

[2] Bousquet-Mélou (M.) et Eriksson (K.). – Lecture hall partitions 2. *The Ramanujan Journal.* – À paraître. Rapport LaBRI No. 1117-96.

Polygones convexes

[3]* Bousquet-Mélou (M.). – Une bijection entre les polyominos convexes dirigés et les mots de Dyck bilatères. *RAIRO Inform. Théor. Appl.*, vol. 26, 1992, pp. 205–219.

[4]* Bousquet-Mélou (M.) et Viennot (X. G.). – Empilements de segments et q-énumération de polyominos convexes dirigés. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 60, 1992, pp. 196–224.

[5]* Bousquet-Mélou (M.). – q-Énumération de polyominos convexes. *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 64, 1993, pp. 265–288.

[6]* Bousquet-Mélou (M.). – Convex polyominoes and heaps of segments. *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 25, 1992, pp. 1925–1934.

[7]* Bousquet-Mélou (M.). – Codage des polyominos convexes et équations pour l'énumération suivant l'aire. *Discrete Appl. Math.*, vol. 48, 1994, pp. 21–43.

[8]* Bousquet-Mélou (M.). – Convex polyominoes and algebraic languages. *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 25, 1992, pp. 1935–1944.

[9] Bousquet-Mélou (M.) et Fédou (J.-M.). – The generating function of convex polyominoes: the resolution of a q-differential system. *Discrete Math.*, vol. 137, 1995, pp. 53–75.

[10] Bousquet-Mélou (M.). – A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons. *Discrete Math.*, vol. 154, 1996, pp. 1–25.

[11] Bousquet-Mélou (M.). – Polyominoes and polygons. *In: Proceedings of Jerusalem Combinatorics '93*, éd. par Barcelo (H.) et Kalai (G.), *Contemporary Mathematics*, vol. 178, 1994, pp. 55–70.

[12] Bousquet-Mélou (M.). – Percolation models and animals. *European J. Combin.*, vol. 17, 1996, pp. 343–369.

[13] Bousquet-Mélou (M.) et Guttmann (A. J.). – *Enumeration of three-dimensional convex polygons.* – Rapport LaBRI No. 1132-96. Soumis à *Annals of Combinatorics.*

Animaux dirigés

[14] Bousquet-Mélou (M.). – New enumerative results on two-dimensional directed animals. *Discrete Math.* – À paraître.

[15] Bousquet-Mélou (M.) et Conway (A. R.). – Enumeration of directed animals on an infinite family of lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 29, 1996, pp. 3357–3365.

Combinatoire des mots

[16] Bousquet-Mélou (M.). – The number of minimal word chains computing the Thue-Morse word. *Inform. Process. Lett.*, vol. 44, 1992, pp. 57–64.

[17] Allouche (J.-P.) et Bousquet-Mélou (M.). – Canonical positions for the factors in the paper-folding sequences. *Theoret. Comput. Science*, vol. 129, 1994, pp. 263–278.

[18] Allouche (J.-P.) et Bousquet-Mélou (M.). – Facteurs des suites de Rudin-Shapiro généralisées. *Bulletin of the Belgian Math. Society*, vol. 1, 1994, pp. 145–164.

[19] Allouche (J.-P.) et Bousquet-Mélou (M.). – On the conjectures of Rauzy and Shallit for infinite words. *Commentationes Math. Univ. Carolinae*, vol. 36, 1995, pp. 705–712.

Divers

[20] Bousquet-Mélou (M.) et Habsieger (L.). – Sur les matrices à signes alternants. *Discrete Math.*, vol. 139, 1995, pp. 57–72.

[21] Bergeron (F.), Bousquet-Mélou (M.) et Dulucq (S.). – Standard paths in the composition poset. *Ann. Sci. Math. Québec*, vol. 19, 1995, pp. 139–151.

Thèse

[22]* Bousquet-Mélou (M.). – *q-Énumération de polyominos convexes.* – LaBRI, Université Bordeaux 1, 1991. Vol. 9 des *Publications du LACIM*, Université du Québec à Montréal.