

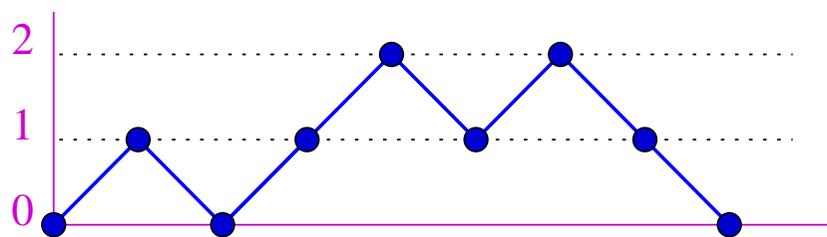
Excursions discrètes

Mireille Bousquet-Mélou, CNRS, LaBRI, Bordeaux

<http://www.labri.fr/~bousquet>

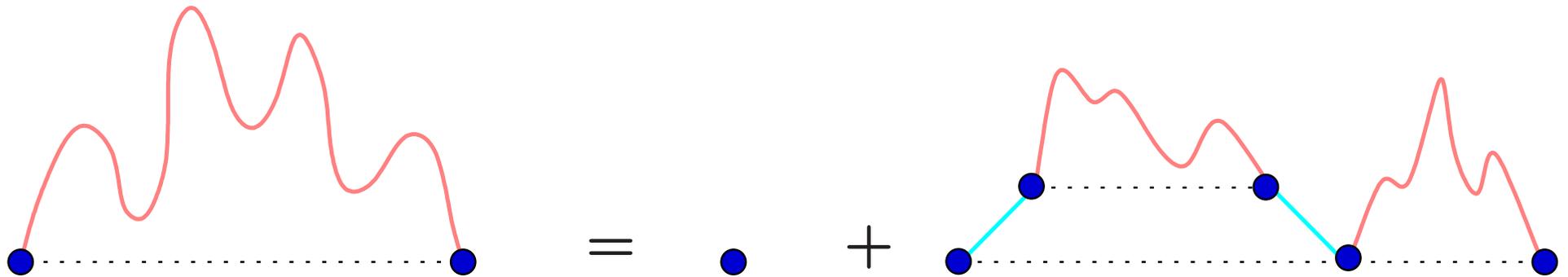
Première partie :

Quatre variations sur les chemins de Dyck



Chemin sur la demi-droite \mathbb{N} , à pas ± 1 , allant de 0 à 0

1. Grammaire algébrique



- Série génératrice : $E \equiv E(t) = \sum_{n \geq 0} e(2n)t^{2n}$
 $E = 1 + t^2 E^2$

La série est algébrique.

Note : la variable t est implicite (presque) partout.

2. Construction pas à pas

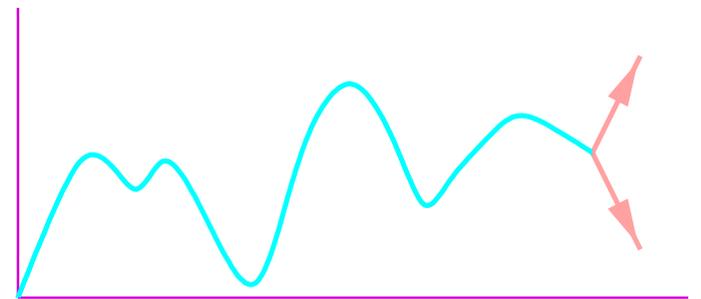
- On compte **tous** les chemins issus de 0 selon longueur (t) et niveau final (u) : série génératrice bivariée

$$W(t, u) \equiv W(u) = \sum_{n,j} w(n; j) t^n u^j = \sum_j W_j u^j$$

Donc $W_j \equiv W_j(t)$ compte selon la longueur les chemins finissant en j . En particulier, $E = W_0$.

- Construction pas à pas :

$$W(u) = 1 + tuW(u) + \frac{t}{u}W(u) - \frac{t}{u}W_0$$
$$\Rightarrow (u - t(1 + u^2))W(u) = u - tW_0$$



Résolution : la méthode du noyau

$$(u - t(1 + u^2))W(u) = u - tW_0$$

- Le noyau $u - t(1 + u^2)$ a deux racines U_1 et U_2 , dont une est finie en $t = 0$

$$U_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2}}{2t} = t + t^3 + O(t^5)$$

- Substituons u par U_1 :

$$W_0 = \frac{U_1}{t} \quad \left(= \frac{1}{tU_2} \right) \text{ car } U_1U_2 = 1.$$

Une équation algébrique pour E

$$E = \frac{1}{tU_2}$$

Donc $D(t, E) = 0$ avec

$$D(t, z) = (1 - tU_2z)$$

Une équation algébrique pour E

$$E = \frac{1}{tU_2}$$

Donc $D(t, E) = 0$ avec

$$D(t, z) = (1 - tU_2z)(1 - tU_1z)$$

Une équation algébrique pour E

$$E = \frac{1}{tU_2}$$

Donc $D(t, E) = 0$ avec

$$\begin{aligned} D(t, z) &= (1 - tU_2z)(1 - tU_1z) \\ &= 1 - t(U_1 + U_2)z + t^2U_1U_2z^2 \\ &= 1 - z + t^2z^2 \end{aligned}$$

Car

$$U_i - t(1 + U_i^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 + U_2 = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad U_1U_2 = 1$$

3. Les chemins de Dyck de hauteur $\leq k$, pas à pas

- Soit

$$W^{(k)}(u) = \sum_{j=0}^k W_j^{(k)} u^j$$

où $W_j^{(k)} \equiv W_j^{(k)}(t)$ compte les chemins allant de 0 à j bornés par la hauteur k .
La série $W^{(k)}(u)$ est un **polynôme** en u .

- Construction pas à pas :

$$W^{(k)}(u) = 1 + t \left(u + \frac{1}{u} \right) W^{(k)}(u) - \frac{t}{u} W_0^{(k)} - tu^{k+1} W_k^{(k)}$$

$$\Rightarrow (u - t(1 + u^2)) W^{(k)}(u) = u - tW_0^{(k)} - tu^{k+2} W_k^{(k)}$$

Résolution : la méthode du noyau

$$\Rightarrow (u - t(1 + u^2))W^{(k)}(u) = u - tW_0^{(k)} - tu^{k+2}W_k^{(k)}$$

- Le noyau $K(u) = u - t(1 + u^2)$ admet deux racines, toutes deux substituables car $W^{(k)}(u)$ est un polynôme en u . Pour $i = 1, 2$,

$$W_0^{(k)} + U_i^{k+2}W_k^{(k)} = \frac{U_i}{t}$$

Résolution : la méthode du noyau

$$\Rightarrow (u - t(1 + u^2))W^{(k)}(u) = u - tW_0^{(k)} - tu^{k+2}W_k^{(k)}$$

- Le noyau $K(u) = u - t(1 + u^2)$ admet deux racines, toutes deux substituables car $W^{(k)}(u)$ est un polynôme en u . Pour $i = 1, 2$,

$$W_0^{(k)} + U_i^{k+2}W_k^{(k)} = \frac{U_i}{t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} U_1^{k+2} & 1 \\ U_2^{k+2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_k^{(k)} \\ W_0^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Résolution : la méthode du noyau

$$\Rightarrow (u - t(1 + u^2))W^{(k)}(u) = u - tW_0^{(k)} - tu^{k+2}W_k^{(k)}$$

- Le noyau $K(u) = u - t(1 + u^2)$ admet deux racines, toutes deux substituables car $W^{(k)}(u)$ est un polynôme en u . Pour $i = 1, 2$,

$$W_0^{(k)} + U_i^{k+2}W_k^{(k)} = \frac{U_i}{t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} U_1^{k+2} & 1 \\ U_2^{k+2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_k^{(k)} \\ W_0^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_0^{(k)} = \frac{1}{t} \frac{\begin{vmatrix} U_1^{k+2} & U_1 \\ U_2^{k+2} & U_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1^{k+2} & 1 \\ U_2^{k+2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{t} \frac{\begin{vmatrix} U_1^{k+1} & 1 \\ U_2^{k+1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1^{k+2} & 1 \\ U_2^{k+2} & 1 \end{vmatrix}}$$

car $U_1U_2 = 1$.

Forme rationnelle

$$E^{(k)} = \frac{1}{t} \frac{\begin{vmatrix} U_1^{k+1} & 1 \\ U_2^{k+1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1^{k+2} & 1 \\ U_2^{k+2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{F_k}{F_{k+1}}$$

où

$$F_k = t^k \frac{U_1^{k+1} - U_2^{k+1}}{U_1 - U_2}$$

est un polynôme en t . De plus,

$$\sum_{k \geq 0} F_k z^k = \frac{1}{(1 - tU_1z)(1 - tU_2z)} = \frac{1}{D(t, z)}$$

où $D(t, z)$ est le polynôme annulateur de E (série des excursions) :

$$1 - E + t^2 E^2 = 0 \quad \text{et} \quad F_k - F_{k-1} + t^2 F_{k-2} = 0$$

4. Matrices de transfert

$W_j^{(k)}$: chemins allant de 0 à j , bornés par la hauteur k .

$$W_j^{(k)} = \mathbb{I}_{j=0} + t(W_{j-1}^{(k)} + W_{j+1}^{(k)})$$

⇒ La SG des excursions de hauteur $\leq k$ est

$$W_0^{(k)} = \frac{F_k}{F_{k+1}}$$

où $F_0 = 1$ et F_{k+1} est le déterminant de $1 - tA^{(k)}$ (taille : $k + 1$).

Matrice d'adjacence :

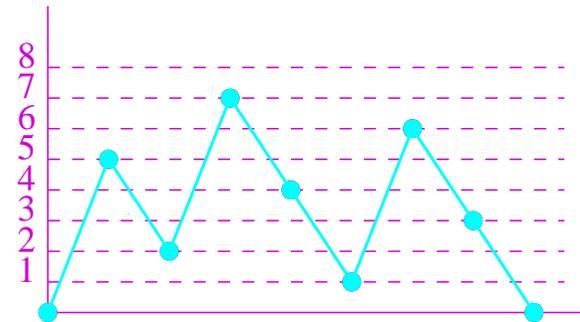
$$A^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deuxième partie :

Excursions générales

Ensemble de pas : $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$, **FINI**. On note $a = \max \mathcal{S}$ et $-b = \min \mathcal{S}$

Excursion : chemin positif allant de 0 à 0 et prenant ses pas dans \mathcal{S} .



Questions

- Que vaut E , la série génératrice des **excursions** ? Est-ce une série algébrique ? Si oui, de quel degré ? Comment calculer son polynôme minimal ?
- Que vaut $E^{(k)}$, la série génératrice des **excursions de hauteur $\leq k$** ? Est-ce une série rationnelle ? Si oui, peut-on caractériser son numérateur et son dénominateur par des relations de récurrences linéaires ? De quel ordre ?

1. Grammaires algébriques

[Duchon 98, Labelle-Yeh 90...]

- **Systeme algébrique positif** ($\sim a + b$ équations)

Exemple : Chemins à pas $+3, -2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} E = 1 + L_1 R_1 + L_2 R_2 & L_1 = L_2 R_1 + L_3 R_2 \\ R_1 = L_1 R_2 & L_2 = L_3 R_1 \\ R_2 = tE & L_3 = tE \end{array} \right.$$

- **Application** : génération aléatoire
- **En suspens** : asymptotique ? Équation algébrique pour E ?

2. Construction pas à pas

- $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$, FINI. On note $a = \max \mathcal{S}$ et $-b = \min \mathcal{S}$, et on pondère le pas $s \in \mathcal{S}$ par ω_s . Le poids d'un chemin est multiplicatif.

- Proposition [mbm-Petkovšek 00] : Soit

$$K(u) = u^b \left(1 - t \sum_{s \in \mathcal{S}} \omega_s u^s \right).$$

C'est un polynôme en u de degré $a + b$. La SG des excursions est :

$$E = \frac{(-1)^{b+1}}{t\omega_{-b}} \prod_{i=1}^b U_i$$

où U_1, U_2, \dots, U_b sont les “petites” racines de $K(u)$, i.e. les racines finies en $t = 0$.

2. Construction pas à pas

- $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$, FINI. On note $a = \max \mathcal{S}$ et $-b = \min \mathcal{S}$, et on pondère le pas $s \in \mathcal{S}$ par ω_s . Le poids d'un chemin est multiplicatif.

- Proposition [mbm-Petkovšek 00] : Soit

$$K(u) = u^b \left(1 - t \sum_{s \in \mathcal{S}} \omega_s u^s \right).$$

C'est un polynôme en u de degré $a + b$. La SG des excursions est :

$$E = \frac{(-1)^{b+1}}{t\omega_{-b}} \prod_{i=1}^b U_i = \frac{(-1)^{a+1}}{t\omega_a} \prod_{i=b+1}^{a+b} \frac{1}{U_i}$$

où U_1, U_2, \dots, U_b sont les racines de $K(u)$ finies en $t = 0$,
et U_{b+1}, \dots, U_{a+b} les racines de $K(u)$ infinies en $t = 0$.

- Analyse asymptotique [Banderier-Flajolet 02]

Un exemple

Prenons $\mathcal{S} = \{-2, 3\}$ et $\omega_{-2} = \omega_3 = 1$. On a :

$$E = -\frac{U_1 U_2}{t} = \frac{1}{t U_3 U_4 U_5}$$

où U_1, U_2 (resp. U_3, U_4, U_5) sont les petites (resp. grandes) racines de

$$K(u) = u^2 (1 - t(u^{-2} + u^3)) = u^2 - t(1 + u^5).$$

Une équation algébrique pour les excursions

- SG des excursions ($a = 3, b = 2$) :

$$E = \frac{1}{tU_3U_4U_5}$$

- Donc $D(t, E) = 0$ avec

$$D(t, z) = (1 - tU_3U_4U_5z)$$

Une équation algébrique pour les excursions

- SG des excursions ($a = 3, b = 2$) :

$$E = \frac{1}{tU_3U_4U_5}$$

- Donc $D(t, E) = 0$ avec

$$D(t, z) = (1 - tU_3U_4U_5z)(1 - tU_2U_4U_5z)(1 - tU_1U_4U_5z) \cdots (1 - tU_1U_2U_3z)$$

Donc la série E est algébrique de degré au plus $\binom{5}{3}$ (en général $\binom{a+b}{a}$).

- **Sauf que** : On ne connaît pas vraiment les U_i , mais seulement leurs fonctions symétriques élémentaires (les coefficients du noyau $K(u)$)

⇒ Algorithme de l'ornithorynque [Banderier-Flajolet 02] (?) développant $D(t, z)$ en termes des fonctions élémentaires des U_i

$$K(u) = u^b \left(1 - t \sum_{s \in \mathcal{S}} \omega_s u^s \right).$$

Développement de $D(t, z)$ en fonctions élémentaires des U_i

Exemple : pour $S = \{-3, +5\}$, on a $D(t, E) = 0$ avec

$$\begin{aligned} D(t, z) = & -t^{56} z^{56} - 2t^{48} z^{51} + t^{48} z^{50} - t^{48} z^{49} + 7t^{48} z^{48} - t^{40} z^{46} + t^{40} z^{45} + 3t^{40} z^{43} \\ & - 5t^{40} z^{42} + 6t^{40} z^{41} - 21t^{40} z^{40} - 3t^{32} z^{37} - 3t^{32} z^{36} + 8t^{32} z^{35} + 10t^{32} z^{34} \\ & - 15t^{32} z^{33} + 35t^{32} z^{32} + 2t^{24} z^{31} - 2t^{24} z^{30} + 9t^{24} z^{28} - 22t^{24} z^{27} - 10t^{24} z^{26} \\ & + 20t^{24} z^{25} - 35t^{24} z^{24} + 3t^{16} z^{22} + 5t^{16} z^{21} - 9t^{16} z^{20} + 18t^{16} z^{19} + 5t^{16} z^{18} \\ & - 15t^{16} z^{17} + (21t^8 - 1)t^8 z^{16} + t^8 z^{15} - 3t^8 z^{13} + 3t^8 z^{12} - 5t^8 z^{11} - t^8 z^{10} \\ & + 6t^8 z^9 - 7t^8 z^8 - z + 1 \end{aligned}$$



Le degré de E

On a $D(t, E) = 0$ avec $D(t, z)$ de degré $\binom{a+b}{a}$ en z .

Quel est le vrai degré de E ?

On suppose $\text{pgcd}(S) = 1$.

Le degré de E

On a $D(t, E) = 0$ avec $D(t, z)$ de degré $\binom{a+b}{a}$ en z .

Quel est le **vrai** degré de E ?

On suppose $\text{pgcd}(\mathcal{S}) = 1$.

- **Cas générique** : $\mathcal{S} = \llbracket -b, a \rrbracket$ et les ω_s sont des indéterminées indépendantes $\Rightarrow D(t, z)$ est irréductible (pas de relations non triviales entre les U_i)
- Dès que le **groupe de Galois de $K(u)$** sur $\mathbb{K}(t)$ est le groupe symétrique \mathfrak{S}_{a+b} , $D(t, z)$ est irréductible
- **Marches à deux pas** : Pour $\mathcal{S} = \{-b, a\}$, avec $\omega_{-b} = \omega_a = 1$ et a, b premiers entre eux, $D(t, z)$ est irréductible

$$K(u) = u^b - t(1 + u^{a+b})$$

[mbm 07]

Exemples réductibles : marches symétriques

- Si $\mathcal{S} = -\mathcal{S}$ et $\omega_s = \omega_{-s}$, alors $a = b$,

$$U_{a+1} = 1/U_1, \quad \dots, \quad U_{2a} = 1/U_a$$

et E est de degré au plus 2^a .

- Exemple : $\mathcal{S} = \{\pm 1, \pm 2\}$, $\omega_s = 1$

$$D(t, z) = (1 + tz)^2 \left(t^4 z^4 - t^2(2t + 1)z^3 + t(3t + 2)z^2 - (2t + 1)z + 1 \right).$$

3. Marches de hauteur $\leq k$, pas à pas

Proposition : La SG des excursions de hauteur $\leq k$ est

$$E^{(k)} = \frac{(-1)^{a+1} \det(U_i^{a+b+k-1}, \dots, U_i^{b+k}, U_i^{b-1}, U_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}{t\omega_a \det(U_i^{a+b+k}, \dots, U_i^{b+k+1}, U_i^{b-1}, U_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}$$

3. Marches de hauteur $\leq k$, pas à pas

Proposition : La SG des excursions de hauteur $\leq k$ est

$$\begin{aligned}
 E^{(k)} &= \frac{(-1)^{a+1} \det(U_i^{a+b+k-1}, \dots, U_i^{b+k}, U_i^{b-1}, U_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}{t\omega_a \det(U_i^{a+b+k}, \dots, U_i^{b+k+1}, U_i^{b-1}, U_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}, \\
 &= \frac{(-1)^{a+1}}{t\omega_a} \frac{s_{k^a}(\mathcal{U})}{s_{(k+1)^a}(\mathcal{U})}
 \end{aligned}$$

où

$$s_{k^a}(u) = \frac{\det(u_i^{a+b+k-1}, \dots, u_i^{b+k}, u_i^{b-1}, u_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}{\prod_{i < j} (u_i - u_j)}$$

est une fonction de Schur rectangulaire

3. Marches de hauteur $\leq k$, pas à pas

Proposition : La SG des excursions de hauteur $\leq k$ est

$$\begin{aligned}
 E^{(k)} &= \frac{(-1)^{a+1} \det(U_i^{a+b+k-1}, \dots, U_i^{b+k}, U_i^{b-1}, U_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}{t\omega_a \det(U_i^{a+b+k}, \dots, U_i^{b+k+1}, U_i^{b-1}, U_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}, \\
 &= \frac{(-1)^{a+1}}{t\omega_a} \frac{s_{k^a}(\mathcal{U})}{s_{(k+1)^a}(\mathcal{U})} \\
 &= \frac{F_k}{F_{k+1}} \quad \text{forme rationnelle}
 \end{aligned}$$

où

$$s_{k^a}(u) = \frac{\det(u_i^{a+b+k-1}, \dots, u_i^{b+k}, u_i^{b-1}, u_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}{\prod_{i < j} (u_i - u_j)}$$

est une fonction de Schur rectangulaire, et

$$F_k = (-1)^{k(a+1)} (t\omega_a)^k s_{k^a}(\mathcal{U})$$

est un polynôme en t .

([mbm 07], cf. aussi [Banderier 01])

4. Matrices de transfert

Lemme : La SG des excursions de hauteur $\leq k$ est

$$E^{(k)} = \frac{F_k}{F_{k+1}}$$

où $F_0 = 1$ et F_{k+1} est le déterminant de $1 - tA^{(k)}$ (taille : $k + 1$).

Exemple : $\mathcal{S} = \{-2, -1, \dots, 2, 3\}$

$$A^{(6)} = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 \end{pmatrix}$$

Deux expressions de F_k ?

$$F_k = \det(1 - tA^{(k)}) = (-1)^{k(a+1)} (t\omega_a)^k s_{k^a}(\mathcal{U}).$$

Provient de la formule de Jacobi-Trudi duale :

$$s_\lambda = \det \left(e^{\lambda'_j + i - j} \right)_{1 \leq i, j \leq \lambda_1},$$

où λ' est la partition conjuguée de λ .

$$A^{(6)} = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 \end{pmatrix}$$

Récurrance pour les polynômes F_k

$$F_k = (-1)^{k(a+1)} (t\omega_a)^k \frac{\det(U_i^{a+b+k-1}, \dots, U_i^{b+k}, U_i^{b-1}, U_i^{b-2}, \dots, 1)_{1 \leq i \leq a+b}}{\prod_{i < j} (U_i - U_j)}$$

Proposition : la SG des polynômes F_k est rationnelle, et

$$\sum_{k \geq 0} F_k z^k = \frac{N(t, z)}{D(t, z)}$$

où $D(t, z)$ est le polynôme annulateur de E (série des excursions).

De plus, $N(t, E) \neq 0$ et $N(t, z)$ a degré $\binom{a+b}{a} - a - b$ en z .

Y'a pas de mystère...

Récurrence pour les $F_k \leftrightarrow$ Équation algébrique pour E

On a

$$\sum_{k \geq 0} F_k z^k = \frac{N(t, z)}{D(t, z)}$$

Si $D(t, z) = \sum_{k=0}^d z^k a_k$, où les a_k sont des polynômes en t ,

$$\sum_{i=0}^d a_i F_{k-i} = 0$$

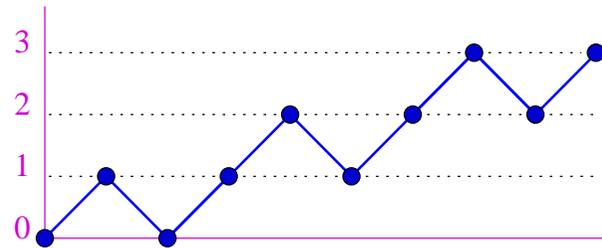
Comme $E^{(k)} = F_k / F_{k+1}$,

$$\sum_{i=0}^d a_i E^{(k-i+1)} \dots E^{(k)} = 0.$$

En prenant la limite $k \rightarrow \infty$, on retrouve l'équation satisfaite par E :

$$\sum_{i=0}^d a_i E^i = D(t, E) = 0$$

Chemins culminants



Chemins finissant à leur hauteur maximale :

$$W_k^{(k)} = \frac{1}{t} \frac{U_1 - U_2}{U_1^k - U_2^k},$$

et la série des chemins culminants,

$$\sum_k W_k^{(k)}$$

n'est pas différentiellement finie. De plus,

$$c(n) \sim \frac{2^n}{4n}$$

[mbm-Ponty 07]

Étude de la hauteur des excursions ?

Excursions de longueur n aléatoires : loi de la hauteur, à partir de l'expression de $E^{(k)}$?

[de Bruijn et al. 72] : Hauteur des chemins de Dyck (arbres plans) à partir de

$$E^{(k)} = \frac{1}{t} \frac{U_1^{k+1} - U_2^{k+1}}{U_1^{k+2} - U_2^{k+2}}$$

+ [Banderier-Flajolet 02]

(On attend une loi theta après normalisation en \sqrt{n} [Kaigh 76])

D'autres questions

- Excursions de longueur n aléatoires : loi de la hauteur, à partir de l'expression de $E^{(k)}$?
- Le degré de la série E qui compte les excursions :
 - Au plus $d_{a,b} = \binom{a+b}{a}$ en général (exactement $d_{a,b}$ sur les marches à deux pas)
 - Au plus 2^a dans le cas symétrique $\mathcal{S} = -\mathcal{S}$. Quid de $\mathcal{S} = \{\pm 1, \pm a\}$?
- Lien entre les non-terminaux de la grammaire et les séries U_i ?
- Sommes de fonctions de Schur : que vaut $P(z)$ dans

$$\sum_{k \geq 0} s_{ka}(u) z^k = \frac{N(u, z)}{D(u, z)} \quad ?$$

Z'avez d'aut'questions ?

