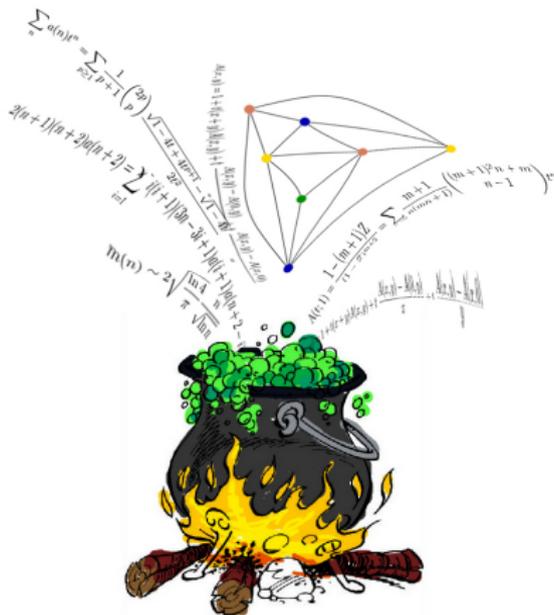


# Méli-mélo(u) de combinatoire

Mireille Bousquet-Mélou, CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux





c'est ici

# Au LaBRI



c'est ici

# Au LaBRI



Xavier Viennot



c'est ici



Xavier Viennot



Combinatoire énumérative



c'est ici



Xavier Viennot



|

Combinatoire énumérative

$$a(n) = \dots$$

$$\sum_n a(n)t^n = \dots$$

et l'asymptotique ?  
Philippe Flajolet



$$a(n) \sim \dots$$
$$\sum_n a(n)z^n \sim \dots$$



c'est ici



Xavier Viennot



Combinatoire énumérative

$$a(n) = \dots$$

$$\sum_n a(n)t^n = \dots$$

et l'asymptotique ?  
Philippe Flajolet



c'est ici

et l'asymptotique ? (bis)  
Tony Guttmann



$$a(n) \sim \dots$$
$$\sum_n a(n)z^n \sim \dots$$



Physique statistique



Xavier Viennot



Combinatoire énumérative

$$a(n) = \dots$$

$$\sum_n a(n)t^n = \dots$$

et l'asymptotique ?  
Philippe Flajolet



$$a(n) \sim \dots$$
$$\sum_n a(n)z^n \sim \dots$$



c'est ici

et l'asymptotique ? (bis)  
Tony Guttmann

Génération aléatoire

Lois limites

Calcul formel

Transitions de phase



Physique statistique

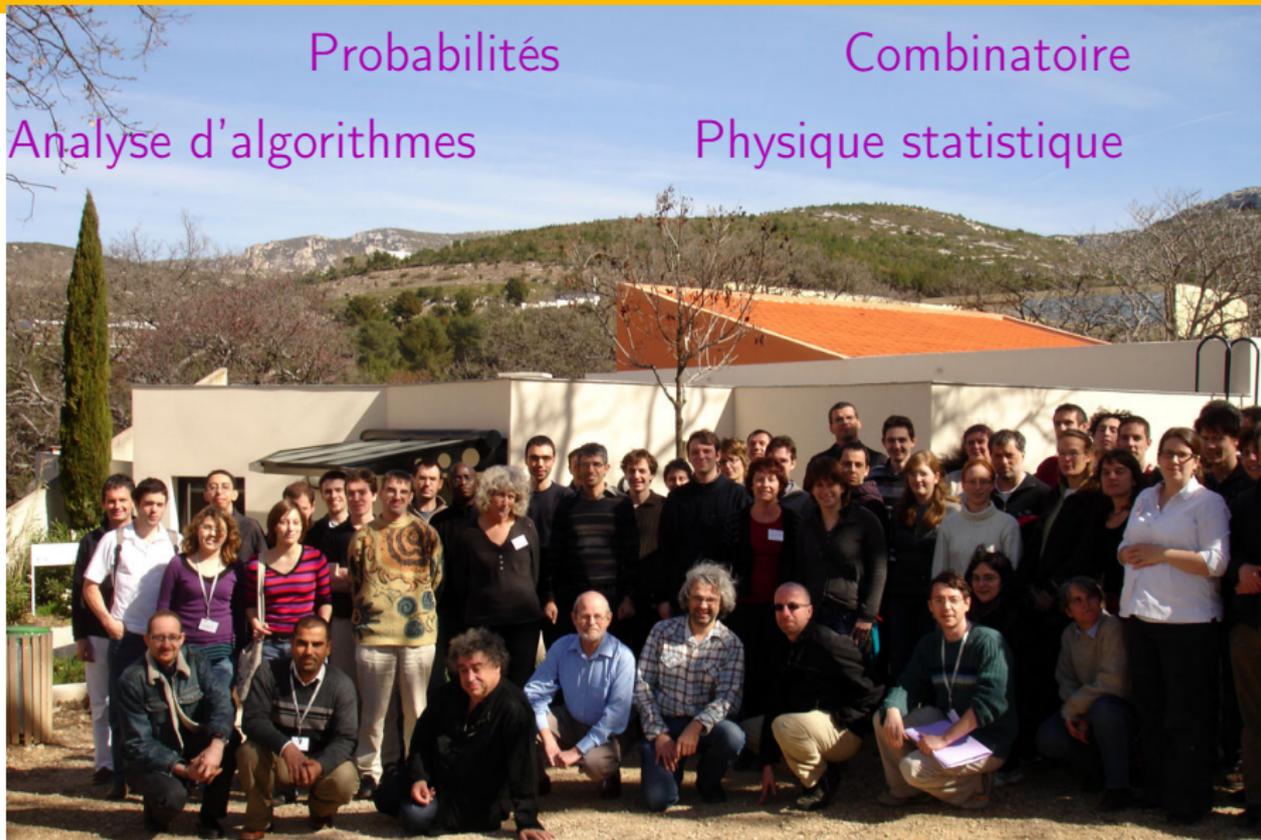
# Le groupe de travail ALEA (GDR Informatique mathématique)

Probabilités

Combinatoire

Analyse d'algorithmes

Physique statistique



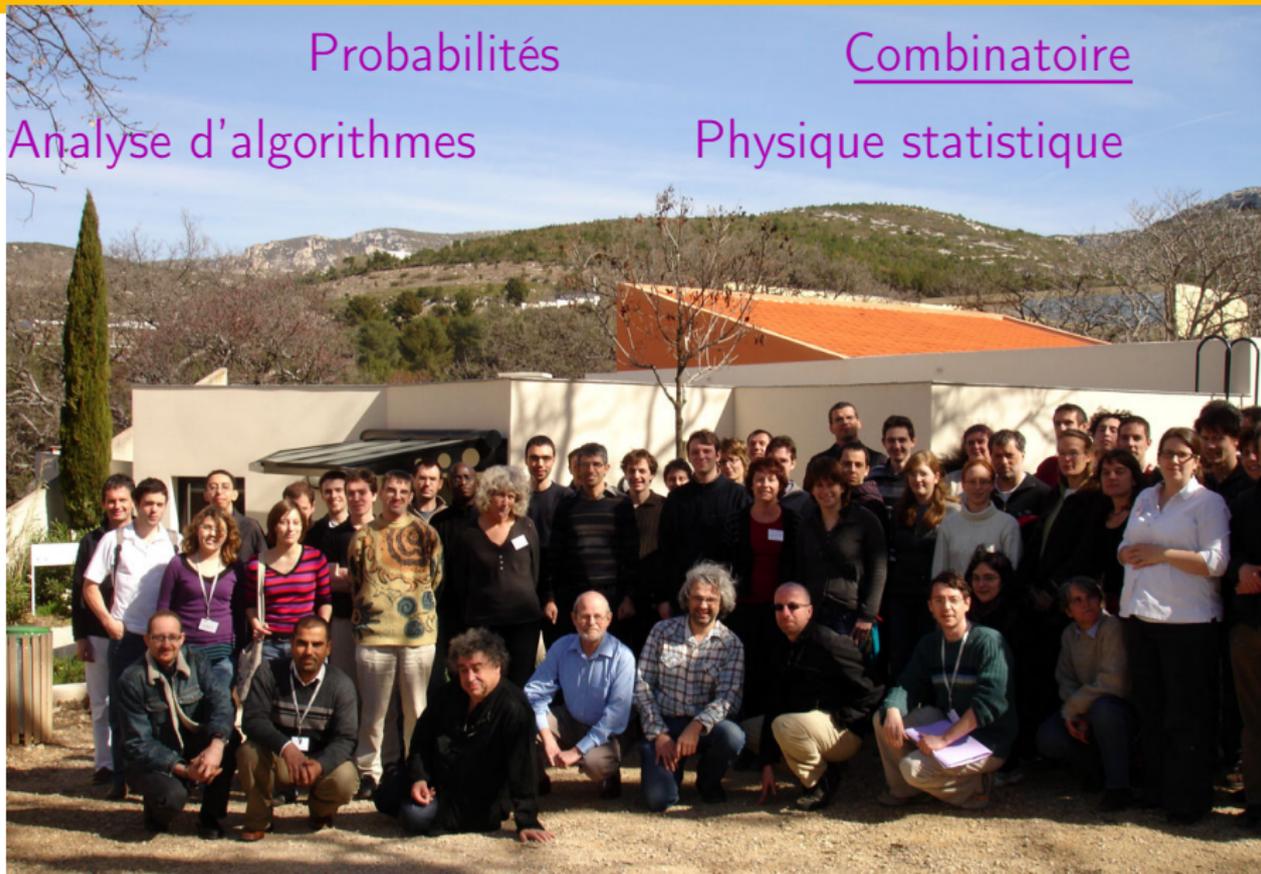
# Le groupe de travail ALEA (GDR Informatique mathématique)

Probabilités

Combinatoire

Analyse d'algorithmes

Physique statistique



# Combinatoire énumérative : l'art de compter

# Combinatoire énumérative : l'art de compter

COMPTER [k ɔ̃ t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de  $\Rightarrow$  chiffrer, dénombrer, nombrer.  
*Compter les moutons.*



COMPTER [κ ð t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de  $\Rightarrow$  chiffrer, dénombrer, nombrer.  
*Compter les moutons.*



COMPTER [κ ò t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de  $\Rightarrow$  chiffrer, dénombrer, nombrer.  
*Compter les moutons.*

Combien ?

Combinatoire énumérative : l'art de compter

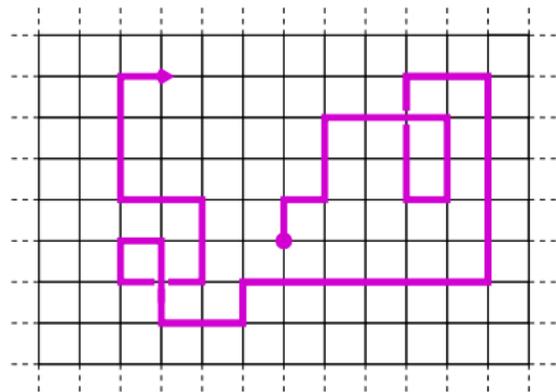


Combien...



Combien...

- de chemins de longueur  $n$  sur une grille carrée ?



$$a(n) = 4^n$$

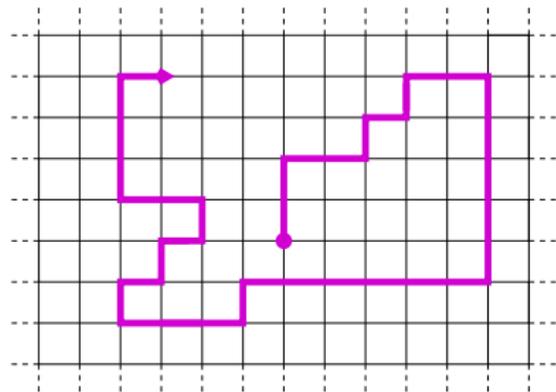
$$A(t) = \sum_n a(n)t^n = \frac{1}{1-4t}$$

Série génératrice



Combien...

- de chemins **auto-évitants** de longueur  $n$  sur une grille carrée ?

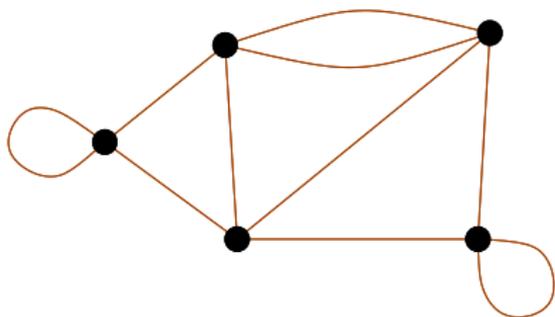


$$a(n) \sim c\mu^n n^{11/32} ?$$



Combien...

- de **cartes** à  $n$  arêtes ?



$$a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$$

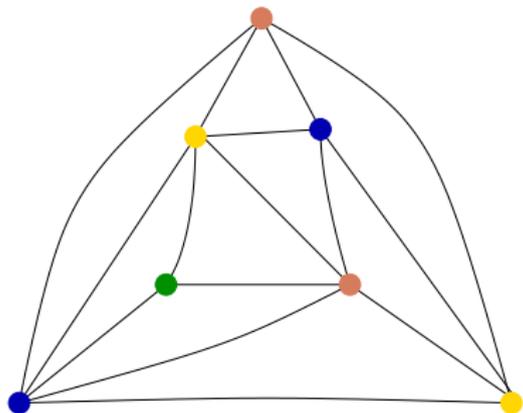
$$\sum_n a(n)t^n = \frac{(1-12t)^{3/2} - 1}{12t}$$

Série génératrice



Combien...

- de triangulations à  $n$  triangles, coloriées en 4 couleurs ?



$$2(n+1)(n+2)a(n+2) = \sum_{i=1}^n i(i+1)(3n-3i+1)a(i+1)a(n+2-i)$$

$$(2t + 5A(t) - 3tA'(t))A''(t) = 48t$$

Une médaille...

... de l'INSMI

Institut national des sciences **mathématiques** et de leur **interactions**

Des mathématiques ?

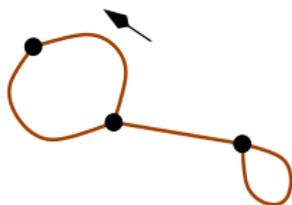
# Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !

# Bijections vs. équations

## Bijections vs. équations

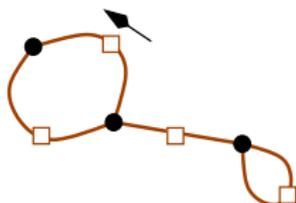
Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$



## Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

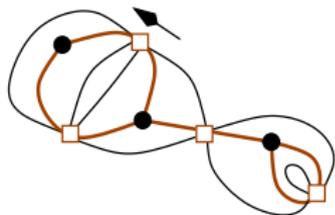
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



## Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

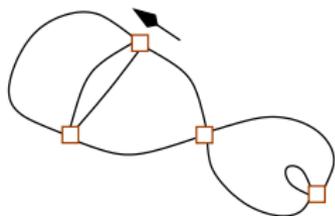
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



## Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

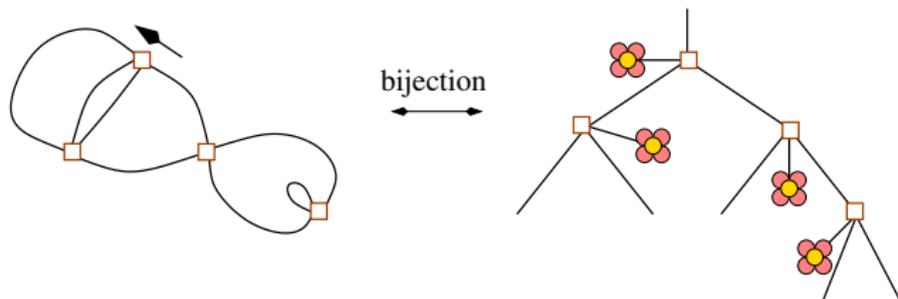
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



# Bijections vs. équations

Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

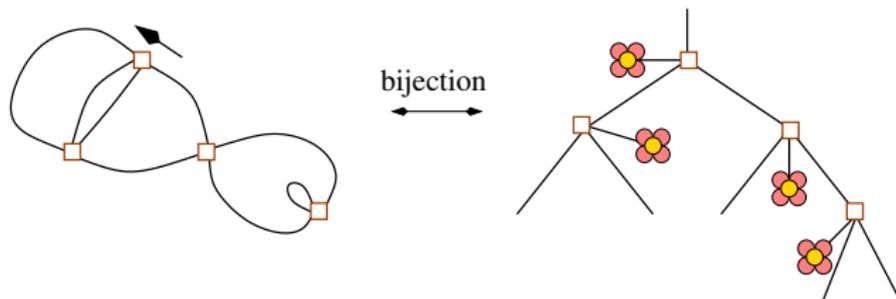
- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



# Bijections vs. équations

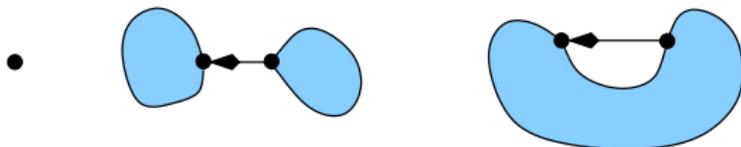
Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



- Preuve récursive [Tutte, 60's]:  $\sum_n a(n)t^n = A(t; 1)$  avec

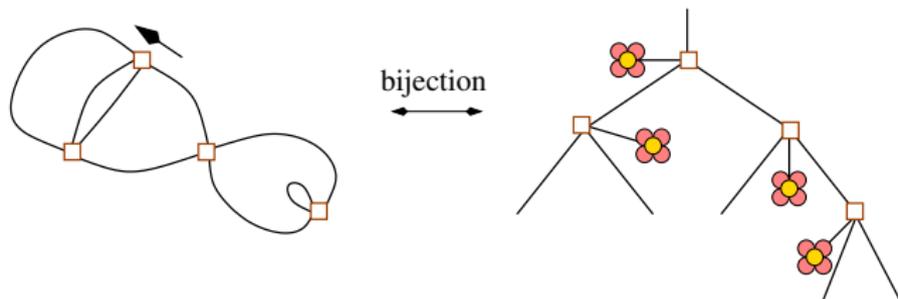
$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$



# Bijections vs. équations

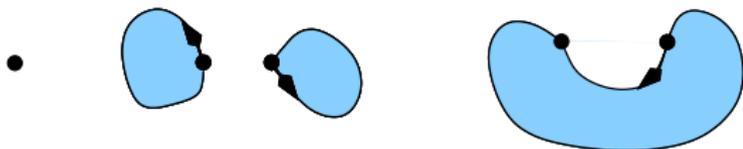
Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $a(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{(n+1)(n+2)} \binom{2n}{n}$

- Preuve bijective [Schaeffer, 1997]



- Preuve récursive [Tutte, 60's]:  $\sum_n a(n)t^n = A(t; 1)$  avec

$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$



# Bijections vs. équations

## Les bijections

- c'est beau... mais c'est dur !

# Bijections vs. équations

## Les bijections

- c'est beau... mais c'est dur !

## Les approches récursives

- sont (souvent) plus robustes
- la fin justifie les moyens...

# Bijections vs. équations

## Les bijections

- c'est beau... mais c'est dur !

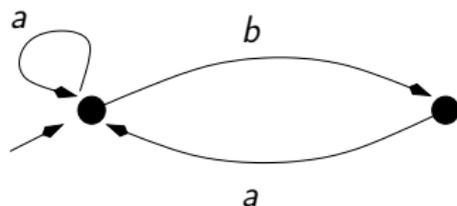
## Les approches récursives

- sont (souvent) plus robustes
- la fin justifie les moyens...

*adieu l'élégance !*

# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : équations différentielles discrètes (à coeffs. polynomiaux)



$$A(t) = 1 + tA(t) + tB(t)$$

$$B(t) = tA(t)$$

# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : équations différentielles discrètes (à coeffs. polynomiaux)

The diagrammatic equation shows a large brown inverted triangle on the left, followed by an equals sign, a small green dot, a plus sign, and a diagram of two brown inverted triangles on the right. The two triangles on the right are connected at their bottom vertices by a thin black line that meets a small brown dot at the junction. Below the diagrammatic equation is the algebraic equation  $A(t) = 1 + tA(t)^2$ .

$$A(t) = 1 + tA(t)^2$$

# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation quadratique pour les cartes :

$$A(t; x) = 1 + tx^2 A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$



# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation quadratique pour les cartes :

$$\begin{aligned}A(x) &= 1 + tx^2A(x)^2 + tx \frac{x A(x) - A(1)}{x - 1} \\ &= 1 + tx^2A(x)^2 + tx \Delta_{x,1}(xA(x))\end{aligned}$$



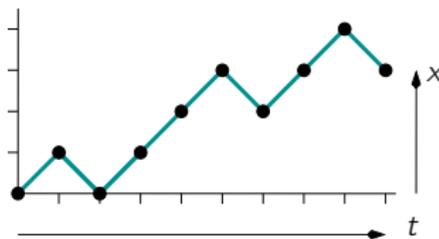
$\Delta_{x,1}$  : opérateur de dérivée discrète

# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation linéaire :

$$\begin{aligned}A(t; x) &= 1 + txA(x) + t \frac{A(x) - A(0)}{x} \\ &= 1 + txA(x) + t \Delta_{x,0}(A(x))\end{aligned}$$

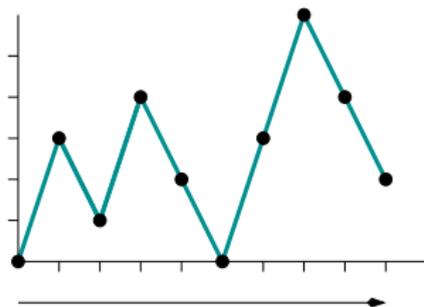


# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation d'ordre  $> 1$  :

$$A(x) = 1 + tx^3A(x) + t \frac{A(x) - A(0) - xA'(0)}{x^2}$$



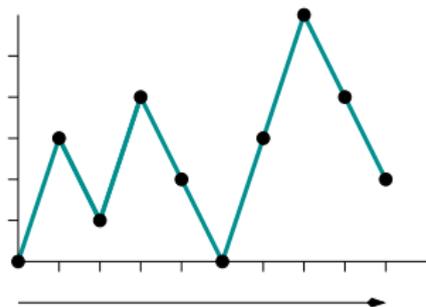
# Énumération et équations fonctionnelles

- Comptage de chemins dans un graphe, de langages réguliers : systèmes d'équations linéaires
- Comptage d'arbres, de langages algébriques : équations polynomiales
- Structures plus complexes : **équations différentielles discrètes** (à coeffs. polynomiaux)

Équation d'ordre  $> 1$  :

$$A(x) = 1 + tx^3A(x) + t \frac{A(x) - A(0) - xA'(0)}{x^2}$$

$\Delta_{x,0}^{(2)}$







# Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !

# Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !  
du moins, ranger un peu leurs solutions



# Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !  
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$



# Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !  
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

- Séries algébriques

$$P(t, A(t)) = 0$$



# Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !  
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

- Séries algébriques

$$P(t, A(t)) = 0$$

- Séries différentiellement finies (D-finies)

$$\sum_{i=0}^d P_i(t)A^{(i)}(t) = 0$$



# Des mathématiques ?

⇒ résoudre des équations !  
du moins, ranger un peu leurs solutions

- Séries rationnelles

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

- Séries algébriques

$$P(t, A(t)) = 0$$

- Séries différentiellement finies (D-finies)

$$\sum_{i=0}^d P_i(t) A^{(i)}(t) = 0$$

- Séries D-algébriques

$$P(t, A(t), A'(t), \dots, A^{(d)}(t)) = 0$$



# Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

## Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série  $A(t; x)$  solution d'une équation différentielle discrète<sup>a</sup> ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

<sup>a</sup>propre

# Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

## Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série  $A(t; x)$  solution d'une équation différentielle discrète<sup>a</sup> ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

<sup>a</sup>propre

- Cartes planaires

$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$

## Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série  $A(t; x)$  solution d'une équation différentielle discrète<sup>a</sup> ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

<sup>a</sup>propre

- Cartes planaires

$$A(t; x) = 1 + tx^2A(t; x)^2 + tx \frac{x A(t; x) - A(t; 1)}{x - 1}$$
$$\Rightarrow 27t^2 A(t; 1)^2 + (1 - 18t)A(t; 1) + 16t - 1 = 0$$

# Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

## Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série  $A(t; x)$  solution d'une équation différentielle discrète<sup>a</sup> ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

<sup>a</sup>propre

- Cartes planaires proprement 3-coloriées

$$A(t; x) \equiv A(x) = 1 + tx^2 \frac{P(t, x, A(x), \Delta A(x), \Delta^{(2)} A(x), \Delta^{(3)} A(x))}{2(2x+1)(x+2)(x+1)}$$

# Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

## Théorème [mbm-Jehanne 2006]

Toute série  $A(t; x)$  solution d'une équation différentielle discrète<sup>a</sup> ordinaire est algébrique :

$$P(t, x, A(t; x)) = 0$$

<sup>a</sup>propre

- Cartes planaires proprement 3-coloriées

$$A(t; x) \equiv A(x) = 1 + tx^2 \frac{P(t, x, A(x), \Delta A(x), \Delta^{(2)} A(x), \Delta^{(3)} A(x))}{2(2x+1)(x+2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow A(t; 1) = \frac{(1+2S)(1-2S^2-4S^3-4S^4)}{(1-2S^3)^2}$$

avec  $S(1-2S^3) = t(1+2S)^3$ .

# Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Quelques os quand même :

- c'est effectif... en théorie  $\Rightarrow$  calcul formel

# Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Quelques os quand même :

- c'est effectif... en théorie  $\Rightarrow$  calcul formel
- si l'ordre de l'équation est un paramètre

**Exemple :** intervalles du treillis de  $m$ -Tamari

$$A(t; x) \equiv A(x) = x + xt (A(x) \cdot \Delta_{x,1})^{(m)} (A(x))$$

# Les équations différentielles discrètes ordinaires, c'est facile

Quelques os quand même :

- c'est effectif... en théorie  $\Rightarrow$  calcul formel
- si l'ordre de l'équation est un paramètre

**Exemple :** intervalles du treillis de  $m$ -Tamari

$$A(t; x) \equiv A(x) = x + xt (A(x) \cdot \Delta_{x,1})^{(m)} (A(x))$$

Soit  $S \equiv S(t)$  la série solution de  $t = S(1 - S)^{m^2+2m}$ . Alors

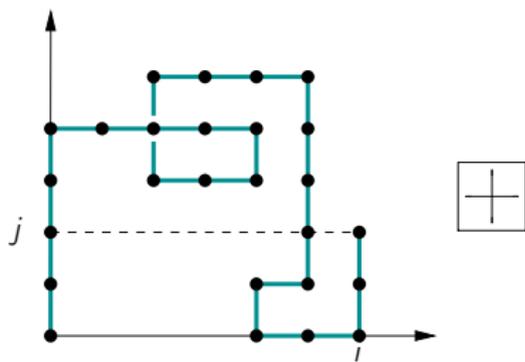
$$A(t; 1) = \frac{1 - (m+1)S}{(1 - S)^{m+2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{m+1}{n(mn+1)} \binom{(m+1)^2 n + m}{n-1} t^n.$$

avec **Éric Fusy** et **Louis-François Prévaille-Ratelle**, 2011



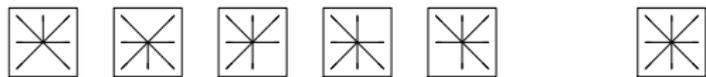
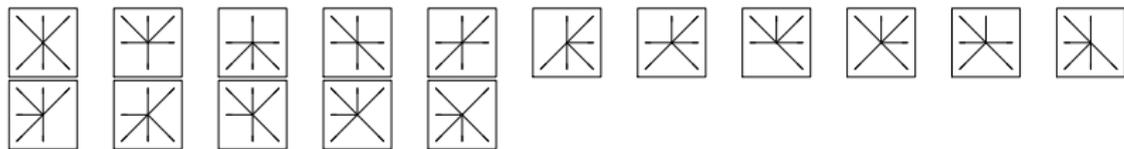
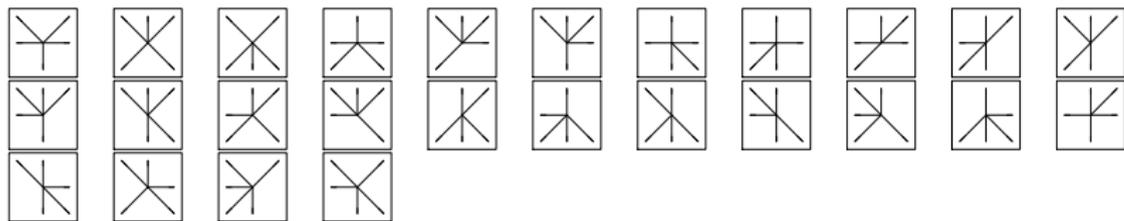
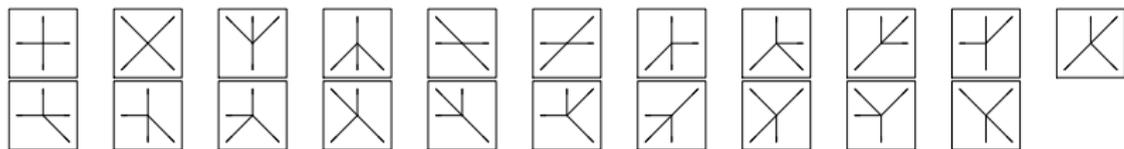
Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Dérivées par rapport à deux variables : chemins du quart de plan



$$A(x, y) = 1 + t(x + y)A(x, y) + t \frac{A(x, y) - A(0, y)}{x} + t \frac{A(x, y) - A(x, 0)}{y}$$

$$A = 1 + t(x + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$





# Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Dérivées par rapport à deux variables : chemins du quart de plan



Algébrique

$$A(x, y) = 1 + txyA + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



D-fini mais transcendant

$$A(x, y) = 1 + t(x + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



Pas D-fini

$$A(x, y) = 1 + tx(1 + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$

# Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Dérivées par rapport à deux variables : chemins du quart de plan



Algébrique

$$A(x, y) = 1 + txyA + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



D-fini mais transcendant

$$A(x, y) = 1 + t(x + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$



Pas D-fini

$$A(x, y) = 1 + tx(1 + y)A + t\Delta_{x,0}A + t\Delta_{y,0}A$$

Mais pourquoi ? (et comment ?)

# Classification des chemins du quart de plan à petits pas

## Théorème

La série  $A(t; x, y)$  est D-finie ssi un certain groupe<sup>a</sup> est fini.  
Elle est algébrique ssi, en prime, la “somme d’orbite”<sup>b</sup> s’annule.

[mbm-Mishna 10], [Bostan-Kauers 10]

D-finie

[Kurkova-Raschel 12]

non-singulier non-D-finie

[Mishna-Rechnitzer 07], [Melczer-Mishna 13]

singulier non-D-finie

<sup>a</sup>de transformations birationnelles

<sup>b</sup>une fraction rationnelle déduite du groupe

# Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Du grain à moudre :

- chemins du quadrant avec des grands pas (avec Alin Bostan, et Steve Melczer)
- plus de variables : chemins dans un cône 3D  $\Rightarrow$  classification (presque) complète (avec Alin Bostan, Manuel Kauers, Steve Melczer, 2014)
- avec  $m$  variables : permutations sans sous-suite croissante de longueur  $m + 1 \Rightarrow$  série D-finie [mbm 2010]

# Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Du grain à moudre :

- chemins du quadrant avec des grands pas (avec Alin Bostan, et Steve Melczer)
- plus de variables : chemins dans un cône 3D  $\Rightarrow$  classification (presque) complète (avec Alin Bostan, Manuel Kauers, Steve Melczer, 2014)
- avec  $m$  variables : permutations sans sous-suite croissante de longueur  $m + 1 \Rightarrow$  série D-finie [mbm 2010]

# Les équations aux dérivées partielles discrètes, c'est moins facile. Même dans le cas linéaire !

Du grain à moulin :

- chemins du quadrant avec des grands pas (avec Alin Bostan, et Steve Melczer)
- plus de variables : chemins dans un cône 3D  $\Rightarrow$  classification (presque) complète (avec Alin Bostan, Manuel Kauers, Steve Melczer, 2014)
- avec  $m$  variables : permutations sans sous-suite croissante de longueur  $m + 1 \Rightarrow$  série D-finie [mbm 2010]



# Les équations aux dérivées partielles discrètes non linéaires, c'est encore moins facile

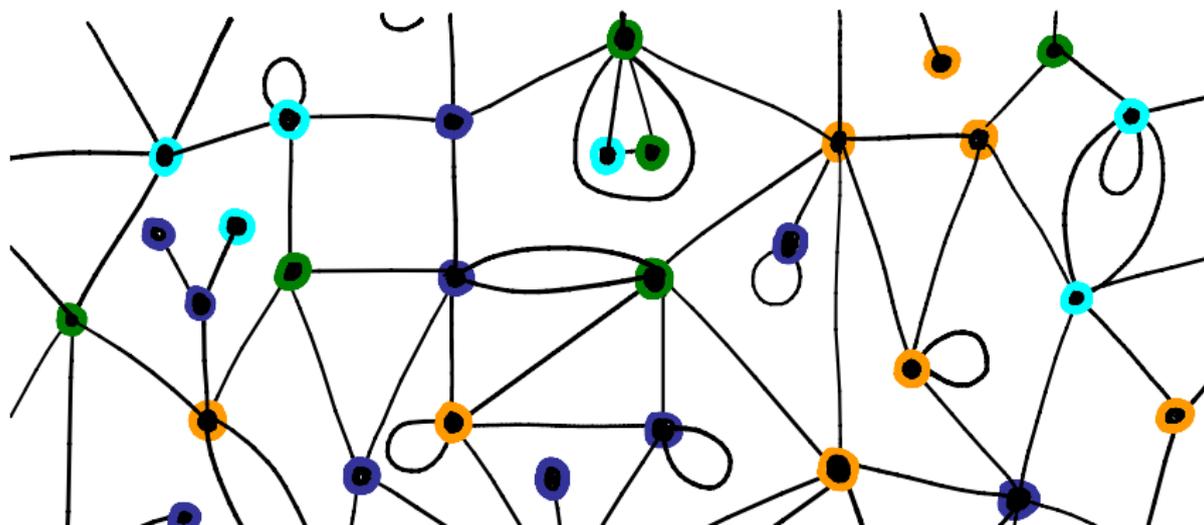
Un (seul) exemple : le modèle de Potts sur les cartes planaires

$$\begin{aligned} A(x, y) = & 1 + xyt((\nu - 1)(y - 1) + qy) A(x, y)A(1, y) \\ & + xyt(x\nu - 1)A(x, y)A(x, 1) \\ & + xyt(\nu - 1) \frac{x A(x, y) - A(1, y)}{x - 1} + xyt \frac{y A(x, y) - A(x, 1)}{y - 1} \end{aligned}$$

# Les équations aux dérivées partielles discrètes non linéaires, c'est encore moins facile

Un (seul) exemple : le modèle de Potts sur les cartes planaires

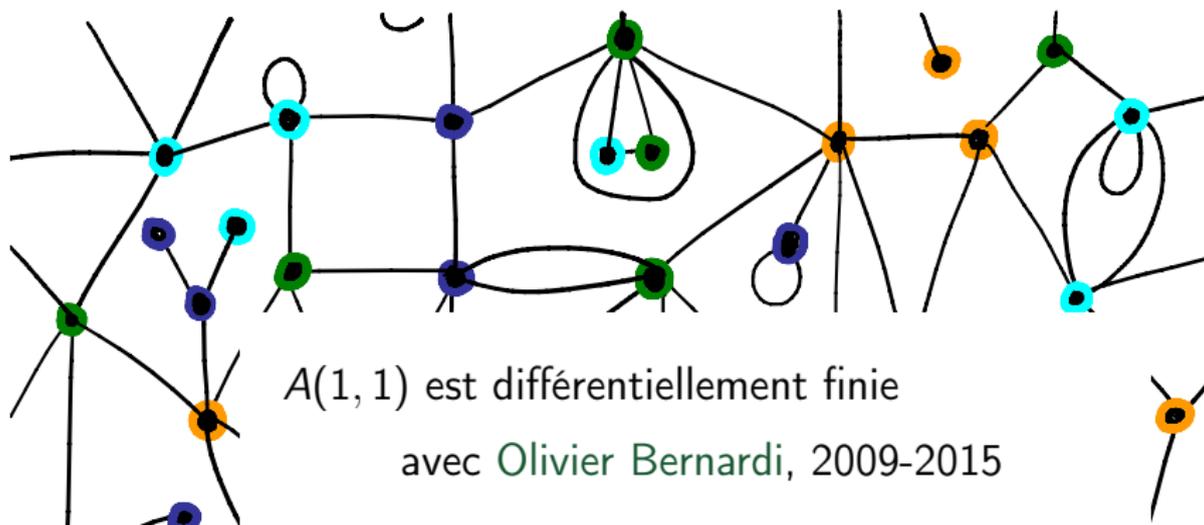
$$\begin{aligned} A(x, y) = & 1 + xyt ((\nu - 1)(y - 1) + qy) A(x, y)A(1, y) \\ & + xyt(x\nu - 1)A(x, y)A(x, 1) \\ & + xyt(\nu - 1) \frac{x A(x, y) - A(1, y)}{x - 1} + xyt \frac{y A(x, y) - A(x, 1)}{y - 1} \end{aligned}$$



# Les équations aux dérivées partielles discrètes non linéaires, c'est encore moins facile

Un (seul) exemple : le modèle de Potts sur les cartes planaires

$$\begin{aligned} A(x, y) = & 1 + xyt ((\nu - 1)(y - 1) + qy) A(x, y)A(1, y) \\ & + xyt(x\nu - 1)A(x, y)A(x, 1) \\ & + xyt(\nu - 1) \frac{x A(x, y) - A(1, y)}{x - 1} + xyt \frac{y A(x, y) - A(x, 1)}{y - 1} \end{aligned}$$



$A(1, 1)$  est différentiellement finie

avec Olivier Bernardi, 2009-2015

# Une médaille...

... de l'INSMI

Institut national des sciences **mathématiques** et de leur **interactions**

- résoudre des équations !
- et les interactions ?

## et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique

# et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...

# et les interactions ?

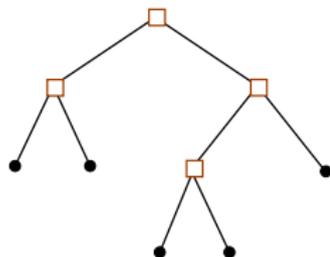
D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...

*(un peu d'asymptotique)*

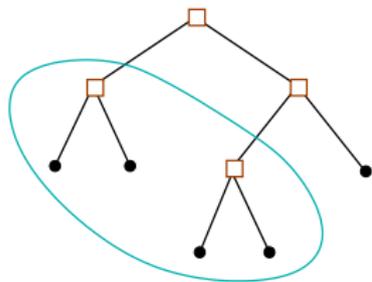
# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres



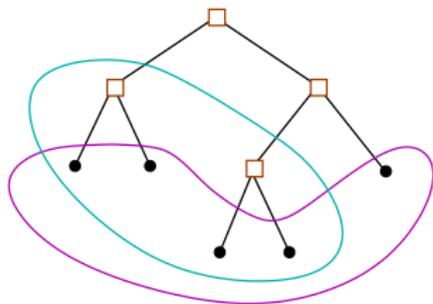
# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres



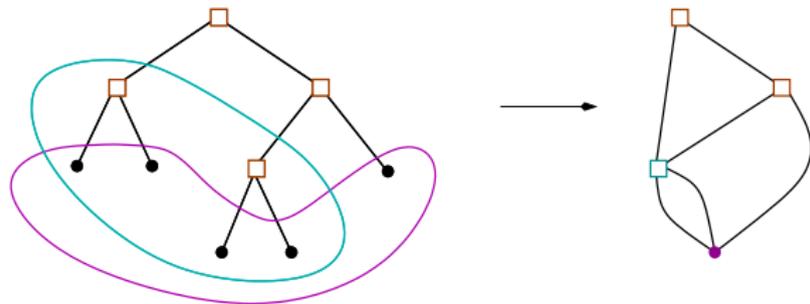
# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres



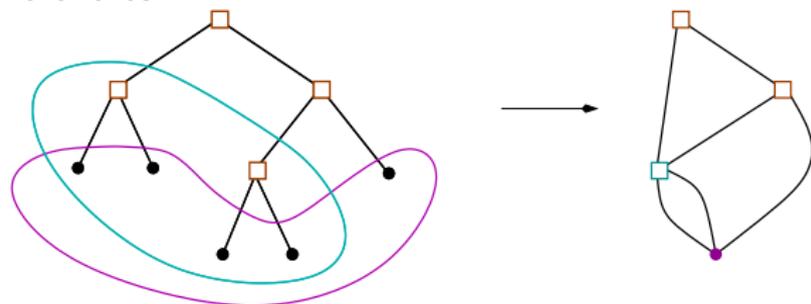
# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres



# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres

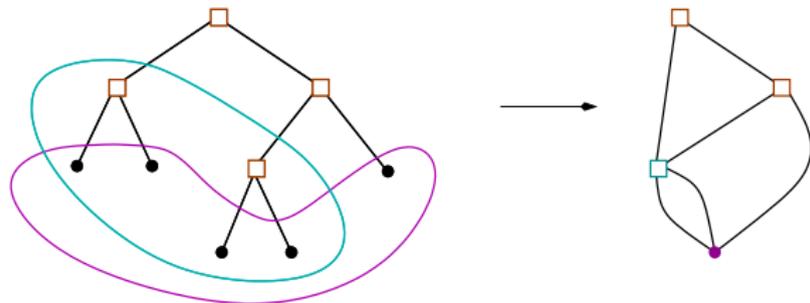


Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille  $n$  satisfait

$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres



Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille  $n$  satisfait

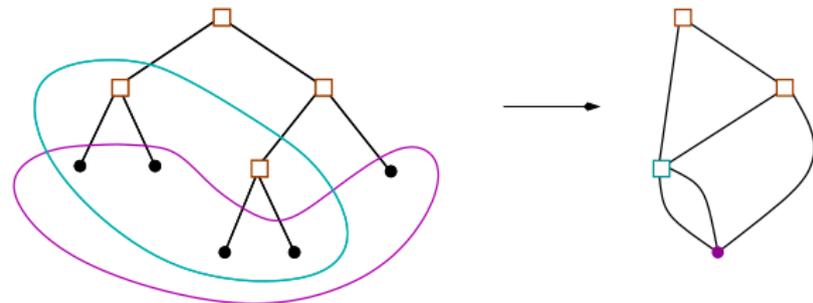
$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

⇒ Analyse asymptotique : estimer le coefficient de  $t^n$  dans

$$\sum_n a(n)t^n = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \frac{\sqrt{1-4t+4t^{p+1}} - \sqrt{1-4t}}{2t^2}$$

# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres



Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille  $n$  satisfait

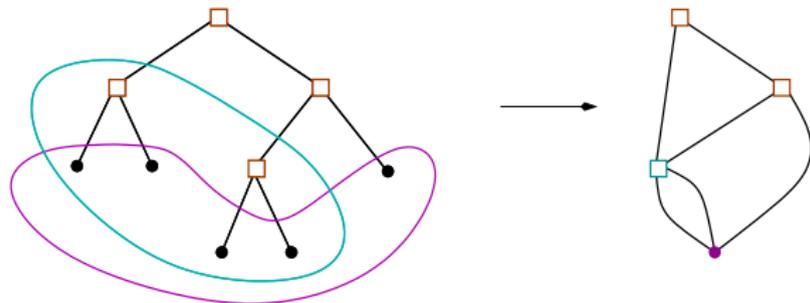
$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

⇒ Analyse asymptotique : estimer le coefficient de  $t^n$  dans

$$\sum_n a(n)t^n = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \frac{\sqrt{1-4t+4t^{p+1}} - \sqrt{1-4t}}{2t^2}$$

# et les interactions ? Un exemple en informatique

## Compression d'arbres



Le nombre moyen de sommets restants après compression d'un arbre de taille  $n$  satisfait

$$m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$$

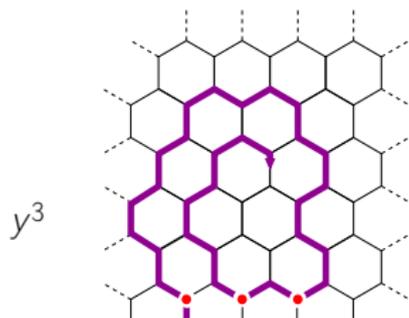
⇒ Analyse asymptotique : estimer le coefficient de  $t^n$  dans

$$\sum_n a(n)t^n = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} \frac{\sqrt{1-4t+4t^{p+1}} - \sqrt{1-4t}}{2t^2}$$

et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

# et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitant dans un demi-plan, en interaction avec son bord :



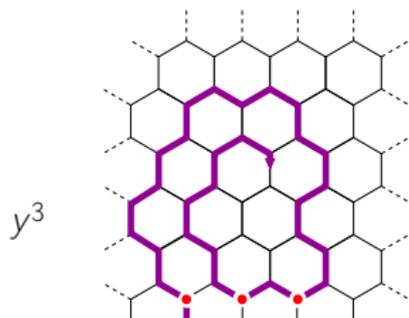
# et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitatants dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



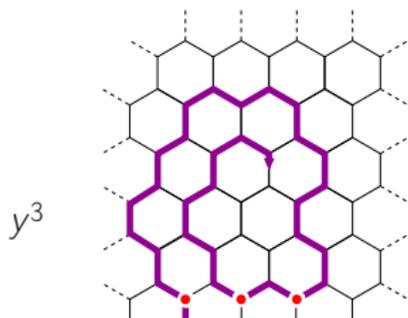
## et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitants dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



**Théorème : localisation de la transition de phase (2012)**

Pour  $y > y_c = 1 + \sqrt{2}$ , le chemin adhère au bord. Pour  $y < y_c$ , il s'en échappe.

avec Nick Beaton, Hugo Duminil-Copin, Jan de Gier et Tony Guttmann

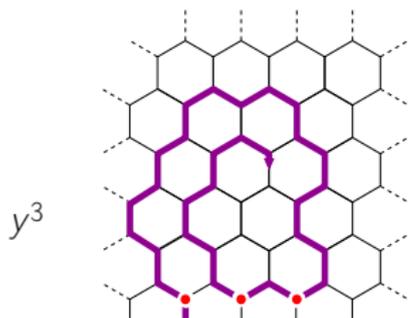
# et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitants dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



**Théorème : localisation de la transition de phase (2012)**

Pour  $y > y_c = 1 + \sqrt{2}$ , le chemin adhère au bord. Pour  $y < y_c$ , il s'en échappe.



avec Nick Beaton, Hugo Duminil-Copin, Jan de Gier et Tony Guttmann

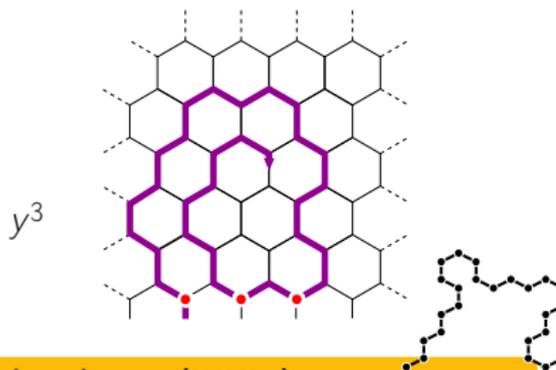
# et les interactions ? Un exemple (un peu) plus physique

Chemins auto-évitants dans un demi-plan, en interaction avec son bord :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{y^{\text{contacts}(\omega)}}{a_n(y)}$$

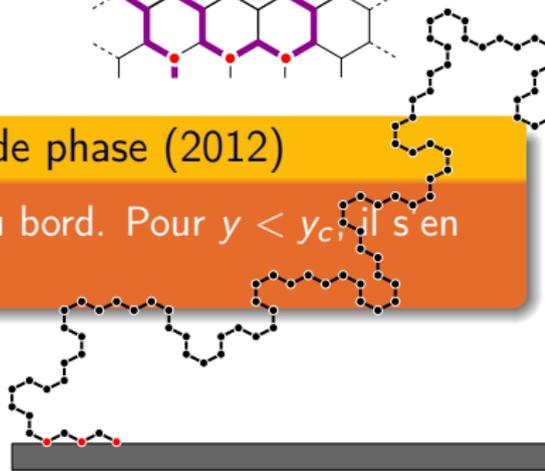
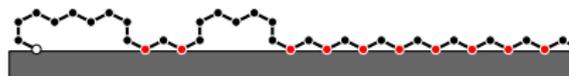
avec

$$a_n(y) = \sum_{|\omega|=n} y^{\text{contacts}(\omega)}$$



**Théorème : localisation de la transition de phase (2012)**

Pour  $y > y_c = 1 + \sqrt{2}$ , le chemin adhère au bord. Pour  $y < y_c$ , il s'en échappe.



avec Nick Beaton, Hugo Duminil-Copin, Jan de Gier et Tony Guttmann

## et les interactions ?

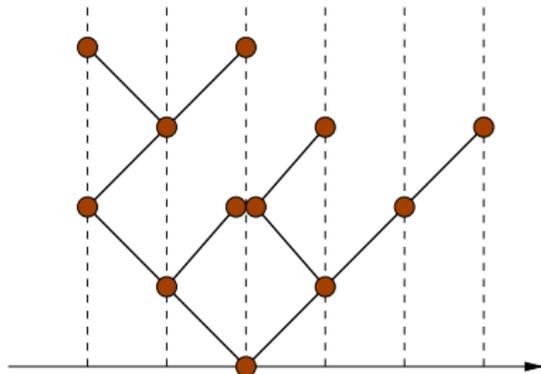
D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...
  - ▶ probabilités
  - ▶ algèbre

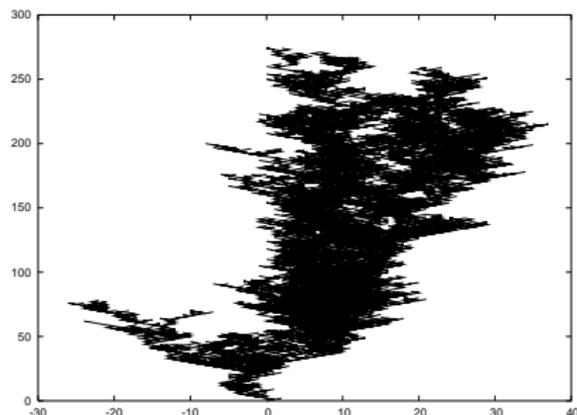
# et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...
  - ▶ probabilités
  - ▶ algèbre



[mbm 2006]



Integrated SuperBrownian  
Excursion (ISE) [Aldous 93]

## et les interactions ?

D'où viennent nos problèmes (d'énumération) ?

- de l'informatique
- de la physique statistique
- et des maths...
  - ▶ probabilités
  - ▶ algèbre

À résoudre :

$$A(x) = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k} \left( tx(A(x) \Delta_{x,1})^{(m)} \right)^{(k)} \right) (x)$$

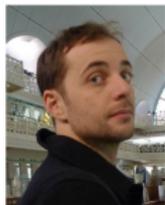
⇒ Caractère d'une représentation du groupe symétrique (espaces diagonaux covariants) [Bergeron 2011]

avec Guillaume Chapuy et Louis-François Prévile-Ratelle, 2013

avec, par ordre d'apparition...



avec, par ordre d'apparition...



merci !

- à l'INSMI

merci !

- à l'INSMI
- aux orateurs



merci !

- à l'INSMI
- aux orateurs



- aux organisateurs  
Nicolas Bonichon, Adrien Boussicault, Auriane Dantes,  
Vincent Delecroix, Olivier Guibert, Elia Meyre... et Pascal Weil

merci !

The image features a central illustration of a black cooking pot with a silver handle, filled with green bubbling liquid and sitting on a fire of logs. Surrounding the pot are various mathematical elements:

- Top Left:** A summation formula  $\sum_n a(n) r^n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p}$ .
- Top Center:** A network graph with five nodes (red, blue, yellow, green, orange) and several edges.
- Top Right:** A summation formula  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m+1}{(m+1)^n} \binom{(m+1)^2 n + m}{n-1} x^n$ .
- Middle Left:** A summation formula  $2(n+1)(n+2)(n+3) = \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2)$ .
- Middle Right:** A brain illustration with a small graph overlaid on it.
- Bottom Left:** An asymptotic formula  $m(n) \sim 2\sqrt{\frac{\ln 4}{\pi} \frac{n}{\sqrt{\ln n}}}$ .
- Bottom Center:** A small graph with nodes and edges, similar to the one at the top.