

# Comptage de graphes planaires, voire à mineurs exclus

Mireille Bousquet-Mélou

# Comptons !

## Problème générique

$\mathcal{A}$  ensemble d'objets discrets

$\mathcal{A}_n$  ensemble des objets de taille  $n$

**Question :** évaluer, estimer, caractériser le nombre  $A[n]$  d'objets de taille  $n$

**Réponse :**

$$A[n] = \dots, \quad A[n] \sim \dots, \quad A[n] \leq \dots, \quad \text{ou encore } A(x) = \dots,$$

où  $A(x)$  est la **série génératrice** (ordinaire ou exponentielle) associée :

$$A_o(x) = \sum_{n \geq 0} A[n]x^n, \quad A_e(x) = \sum_{n \geq 0} A[n] \frac{x^n}{n!}$$

# Au centre du dénombrement : la structure des objets

- Compter les objets

- Génération aléatoire

- Dénombrement selon plusieurs paramètres

**Découvrir une décomposition  
*non-ambiguë* des objets**

- Prédire les propriétés statistiques des objets de grande taille

- Codage (compact, efficace)

Objets aléatoires

Résultats asymptotiques

## Comptage de graphes à mineurs exclus

Un sujet très actif...

[Bender-Gao-Wormald 02] — [Bender-Canfield-Richmond 08] — [Bernardi-Noy-Welsh 07] — [Bonichon-Gavoille-Hanusse-Poulalhon-Schaeffer 06] — [Bodirsky-Gröpl-Kang 0?] [Bodirsky-Fusy-Kang-Vigerske 07] — [Fusy 07] — [Gagarin-Labelle-Leroux-Walsh 07] — [Gimenez-Noy 05] — [McDiarmid-Steger-Welsh 05] — [McDiarmid 08] — [Norine-Seymour-Thomas-Wollan 06] —

... basé sur des résultats vénérables :

[Harary-Palmer 73] — [Mullin-Schellenberg 68] — [Tutte 63] — [Trakhtenbrot 58] — [Walsh 82] — [Wormald 79] —

Merci aux hommes en rose !

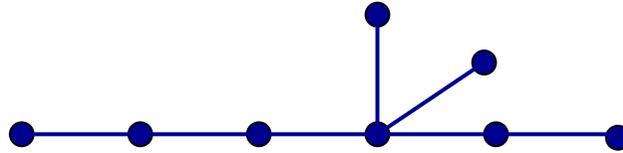
## Comptage de graphes à mineurs exclus

... et surtout planaires.

Oui mais...

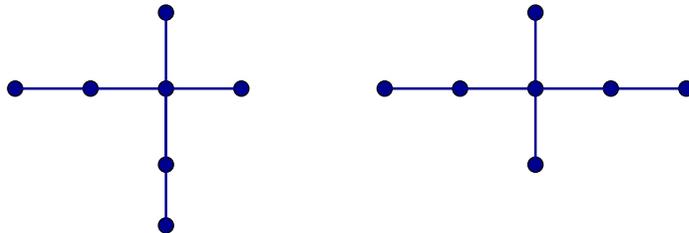
**Quels** graphes planaires ?

# Étiquetés, non étiquetés, pointés, plongés, enracinés...



- 1 arbre non étiqueté à 8 sommets
- 7 arbres **pointés** (un sommet distingué)
- $\frac{8!}{2}$  arbres **étiquetés** par  $\{1, 2, \dots, 8\}$
- 3 arbres **plongés** (= dessinés dans la sphère)
- $3 \times 2 \times 7$  arbres plongés **enracinés** (une arête orientée)

!!!



2 plongements

6.2 + 3.2 plongements enracinés

## A. Compter des arbres

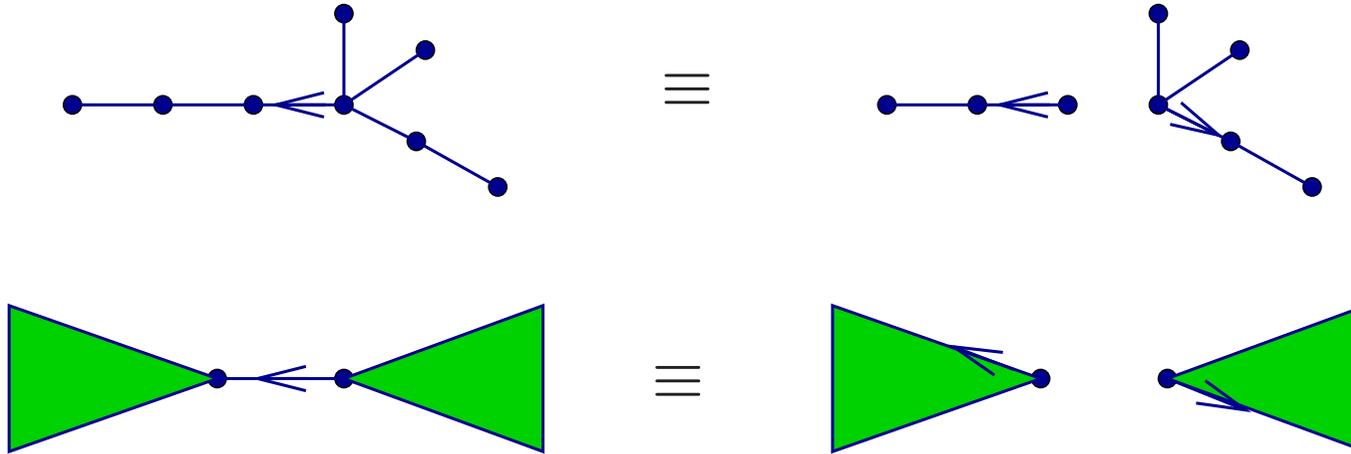
A1. Arbres plongés et enracinés

A2. Arbres étiquetés

A3. Arbres non-étiquetés

## A1. Arbres plongés enracinés (“plans”)

Un arbre plan est la **concaténation** de deux arbres plans.



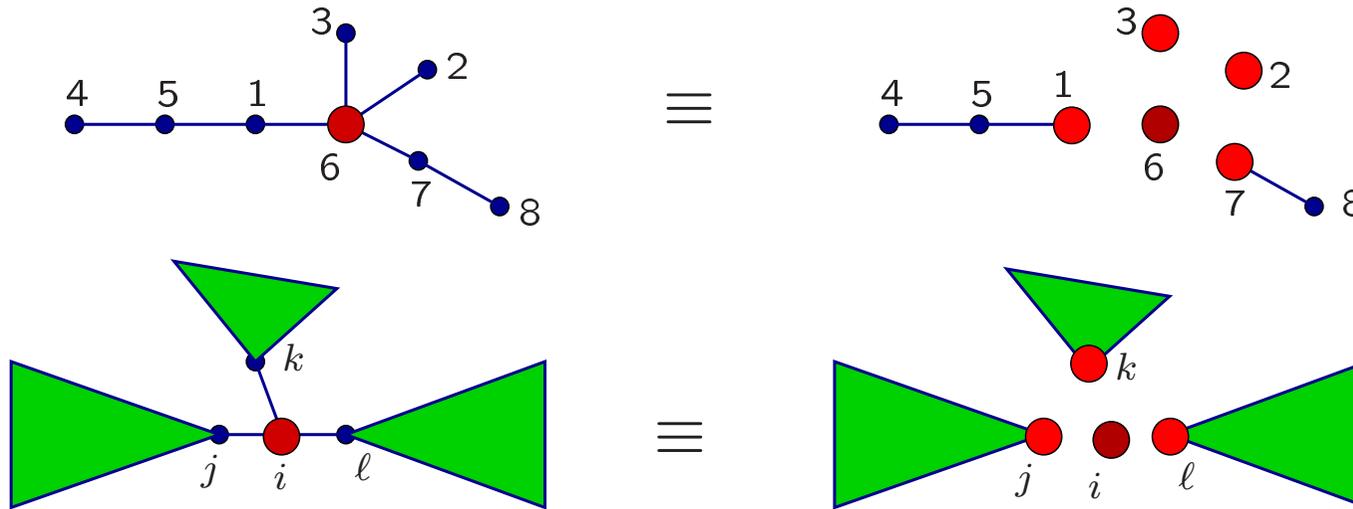
$$P[1] = 1 \quad \text{et} \quad P[n] = \sum_{k=1}^{n-1} P[k]P[n-k]$$

$$P(x) := \sum_{n \geq 1} P[n]x^n = x + P(x)^2 \Rightarrow P(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

Nombres de Catalan

## A2. Arbres étiquetés

- Un arbre étiqueté **pointé** est la concaténation d'un sommet et d'un **ensemble** d'arbres étiquetés pointés.

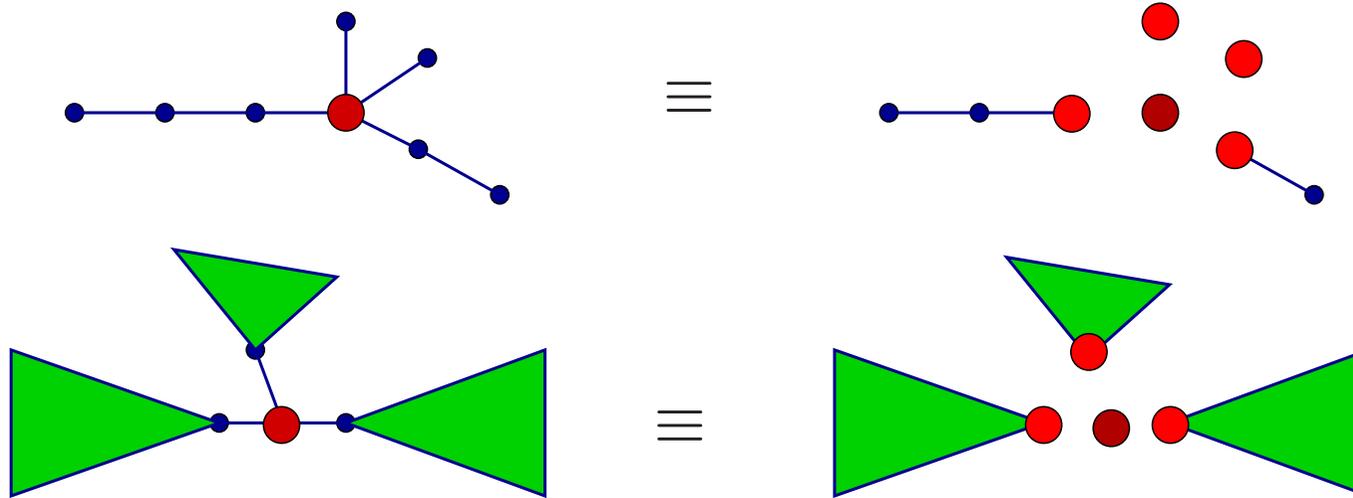


- Un arbre étiqueté de taille  $n$  admet  $n$  pointages différents
- En séries exponentielles

$$E'(x) := \sum_{n \geq 1} nE[n] \frac{x^n}{n!} = \exp(xE'(x)) \Rightarrow E(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} n^{n-2}$$

Il y a  $E[n] = n^{n-2}$  arbres étiquetés sur  $n$  sommets (formule de Cayley)

### A3. Arbres non étiquetés



- Les arbres non étiquetés **pointés** (sur un sommet) sont formés d'un sommet et d'un **multi-ensemble** d'arbres non-étiquetés pointés : la SG ordinaire de ces arbres satisfait

$$N^\bullet(x) = x \exp \left( N^\bullet(x) + \frac{1}{2}N^\bullet(x^2) + \frac{1}{3}N^\bullet(x^3) + \dots \right)$$

- Théorème de dissymétrie [Otter 48]:

$$N(x) := \sum_{n \geq 1} x^n N[n] = N^\bullet(x) - \frac{1}{2}N^\bullet(x)^2 + \frac{1}{2}N^\bullet(x^2)$$

**Raffinements, asymptotique, lois limites**

## Arbres plans (= plongés, enracinés)

$$P(x) = \sum_{n \geq 1} P[n]x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

- Étude des singularités de la série génératrice :

$$P[n] \sim -\frac{1}{2\Gamma(-1/2)} 4^n n^{-3/2}$$

## Arbres plans (= plongés, enracinés)

$$P(x) = \sum_{n \geq 1} P[n]x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

- Étude des singularités de la série génératrice :

$$P[n] \sim -\frac{1}{2\Gamma(-1/2)} 4^n n^{-3/2}$$

- Raffinement : comptage selon le nombre de sommets ( $x$ ) et de feuilles ( $s$ )

$$P(x, s) = \sum_{n \geq 1} P[n, \ell]x^n s^\ell = \frac{1 - x(s-1) - \sqrt{1 - 2x(s+1) + x^2(s-1)^2}}{2(1 + t(1-s))}$$

$$\mathbb{E}(F_n) \sim \frac{n}{2}, \quad \text{var}(F_n) \sim \sigma^2 n$$

et les variations autour de la moyenne, normalisées, sont gaussiennes :

$$\frac{F_n - n/2}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

## Asymptotique des arbres : des exposants universels

	Enracinés	Non enracinés
Plongés	$\kappa_1 4^n n^{-3/2}$	$\kappa_4 4^n n^{-5/2}$
	Pointés	Non pointés
Étiquetés	$\kappa_2 e^n n^{-3/2} n!$	$\kappa_5 e^n n^{-5/2} n!$
Quelconques	$\kappa_3 \mu^n n^{-3/2}$	$\kappa_6 \mu^n n^{-5/2}$ $\mu > e$

Un arbre pointé a en moyenne un nombre exponentiel d'automorphismes

## **B. Compter des graphes planaires**

B1. Graphes plongés et enracinés

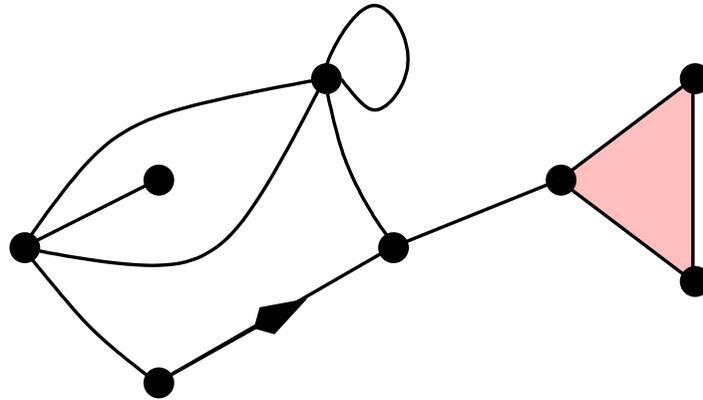
B2. Graphes étiquetés

B3. Graphes non-étiquetés (?)

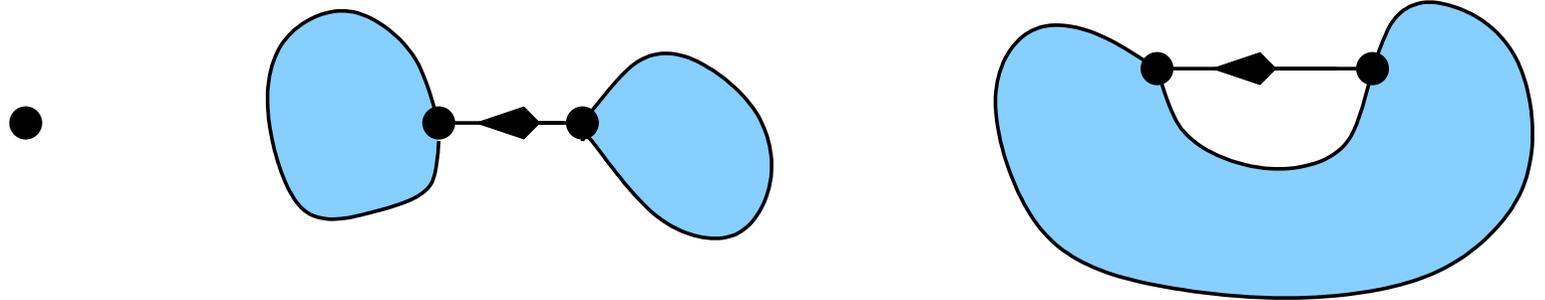
## B1. Graphes plongés et enracinés : des cartes !

**Exemple** : comptage de toutes les cartes planaires (multigraphes connexes plongés et enracinés) selon sommets ( $x$ ), arêtes ( $y$ ) et degré de la face racine ( $u$ ).

Série  $M(x, y, u) \equiv M(u)$



## Comptage des cartes planaires enracinées



$$M(u) = x + yu^2M(u)^2 + \frac{yu}{u-1}(uM(u) - M(1))$$

Donc [...]  $M(x, y; u)$  est une série algébrique. En particulier, la SG selon sommets ( $x$ ) et arêtes ( $y$ ) est de degré 4 :

$$M(x, y; 1) = x \frac{4(U + V + 1)}{(U + 2)(V + 2)}$$

avec

$$y = \frac{U(U + 2)}{4(U + V + 1)^2} \quad \text{et} \quad xy = \frac{V(V + 2)}{4(U + V + 1)^2}$$

[Tutte 68]

## Cartes planaires enracinées : séries algébriques

- Cartes planaires simples :

$$M^{(s)}(x, y) = \frac{4U(U+1)(U+V+2)}{V(U+2)(V+2)^2}$$

avec

$$x = \frac{U(U+2)}{V(V+2)}, \quad y = \frac{V(V+2)((U+2)^2 - UV)}{4(U+1)^2(U+2)(U+V+2)}.$$

- Cartes planaires 3-connexes [Mullin-Schellenberg 68]:

$$M^{(3)}(x, y) = x^2 y^2 \left( \frac{1}{1+xy} - \frac{y}{1+y} - \frac{(1+U)^2(1+V)^2}{(1+U+V)^3} \right)$$

avec

$$U = xy(1+V)^2, \quad V = y(1+U)^2$$

- Exposant universel : pour “toute” famille de cartes planaires enracinées,

$$M[n] \sim \kappa \mu^n n^{-5/2}$$

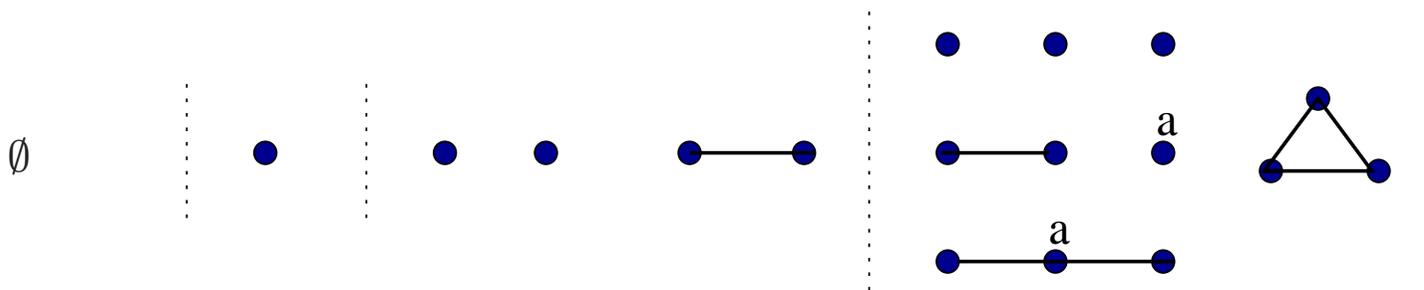
## B2. Graphes planaires étiquetés : descente en connexité

- Les graphes planaires 3-connexes sont des cartes (plongement unique)
  - Les graphes planaires 2-connexes sont obtenus en remplaçant chaque arête d'un 3-connexe par un 2-connexe bipointé (**substitution**)
  - Les graphes planaires connexes sont des **arbres** de graphes 2-connexes (**décomposition en blocs 2-connexes**)
  - Les graphes planaires sont des **ensembles** de graphes planaires connexes.
- ⇒ Un ensemble d'équations fonctionnelles connu depuis (au moins) 1982...

## Connexité

- Un graphe est connexe (1-connexe) s'il a au moins 1 sommet et si deux sommets quelconques sont liés par un chemin
- Pour  $k \geq 2$ , un graphe est  $k$ -connexe si pour tout  $\ell < k$ , la destruction de  $\ell$  sommets et des arêtes adjacentes ne le déconnecte pas.

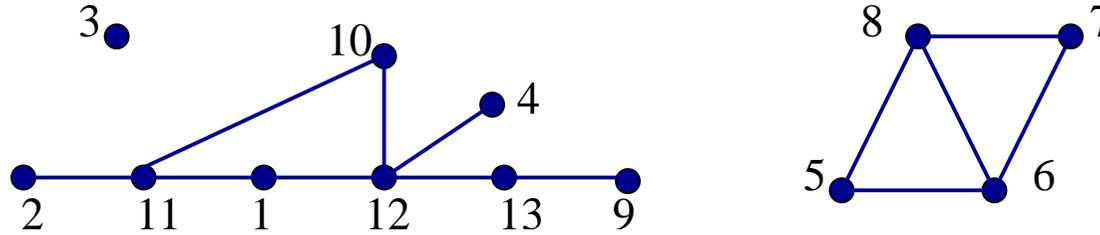
$$G^{(k)}(x, y) = \sum_{G \text{ } k\text{-connexe}} \frac{x^{v(G)}}{v(G)!} y^{e(G)}$$



$$\begin{aligned}
 G^{(0)} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}(1 + y) + \frac{x^3}{3!}(1 + 3y + 3y^2 + y^3) + O(x^4) \\
 G^{(1)} &= \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}(y) + \frac{x^3}{3!}(3y^2 + y^3) + O(x^4) \\
 G^{(2)} &= \frac{x^2}{2!}(y) + \frac{x^3}{3!}(y^3) + O(x^4) \\
 G^{(3)} &= \frac{x^3}{3!}(y^3) + O(x^4)
 \end{aligned}$$

# I. Des graphes planaires aux planaires connexes

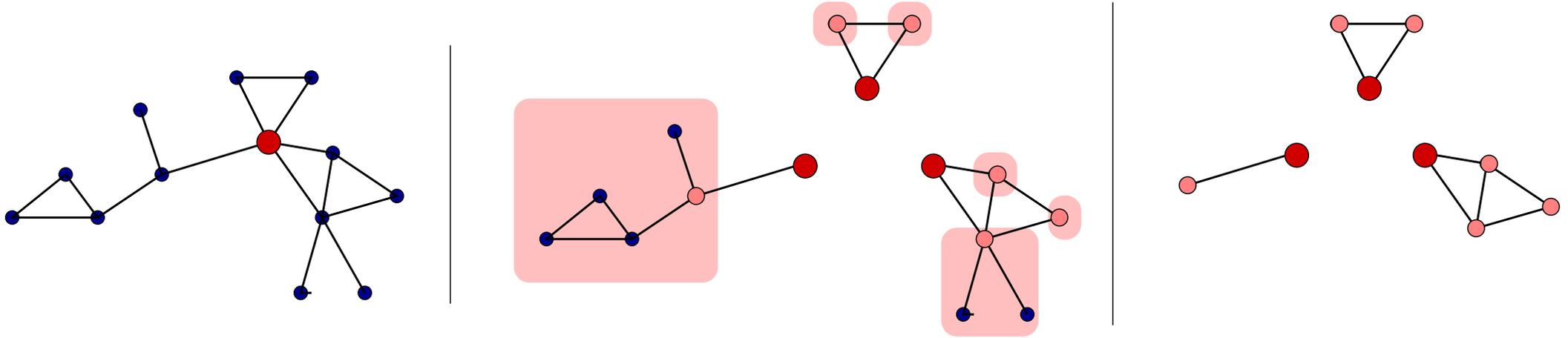
- Un graphe planaire (étiqueté) est un **ensemble** de graphes planaires connexes.



$$G^{(0)}(x, y) = \exp(G^{(1)}(x, y))$$

## II. Des graphes planaires connexes aux planaires 2-connexes

- Un graphe planaire connexe **pointé** est un **ensemble** de graphes 2-connexes pointés où chaque sommet non-pointé a été remplacé par un graphe connexe pointé (!)



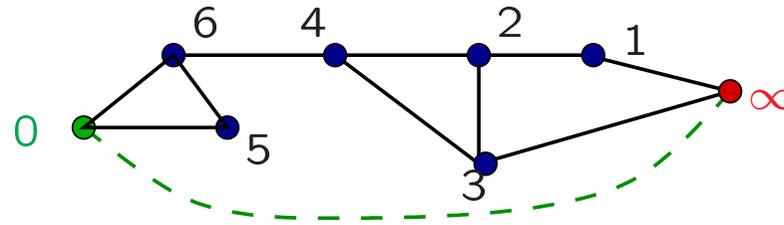
$$G_x^{(1)} = \exp \left( G_x^{(2)} \left( xG_x^{(1)}, y \right) \right)$$

avec

$$G_x^{(k)}(x, y) = \frac{\partial G^{(k)}}{\partial x}(x, y)$$

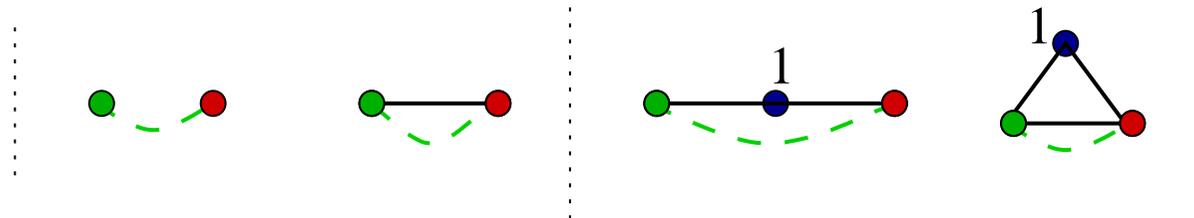
## II.1. Des graphes planaires 2-connexes aux... réseaux

**Réseau** : graphe planaire ayant 2 sommets pointés d'étiquettes 0 et  $\infty$  (les pôles), tel que le (multi-)graphe obtenu en ajoutant l'arête  $(0, \infty)$  soit 2-connexe.



$$R(x, y) := \sum_{n, m} \frac{x^n}{n!} y^m R[n, m]$$

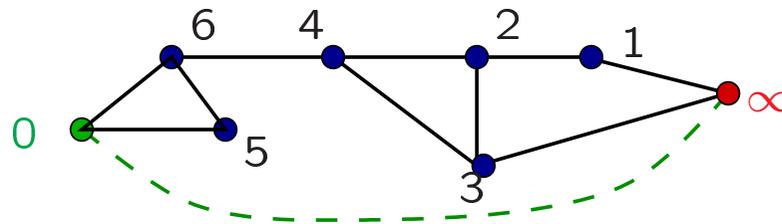
où  $R[n, m]$  est le nombre de réseaux à  $n + 2$  sommets et  $m$  arêtes.



$$R(x, y) = \frac{x^0}{0!} (1 + y) + \frac{x}{1!} (y^2 + y^3) + O(x^2)$$

## II.1. Des graphes planaires 2-connexes aux... réseaux

**Réseau** : graphe planaire ayant 2 sommets pointés d'étiquettes 0 et  $\infty$  (les pôles), tel que le (multi-)graphe obtenu en ajoutant l'arête  $(0, \infty)$  soit 2-connexe.



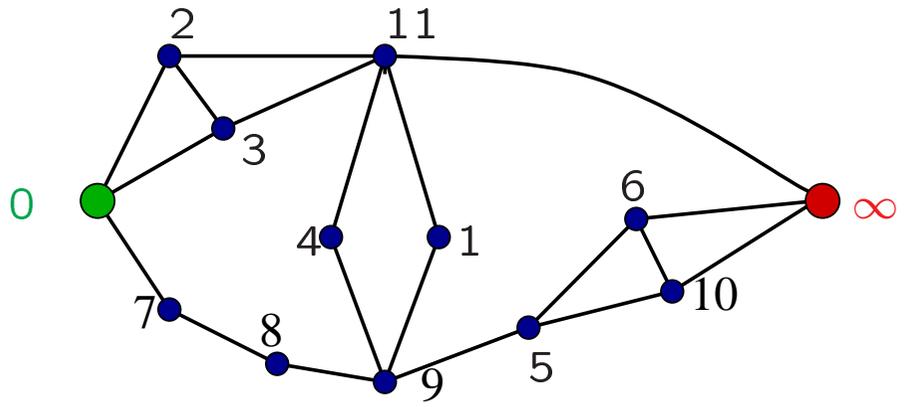
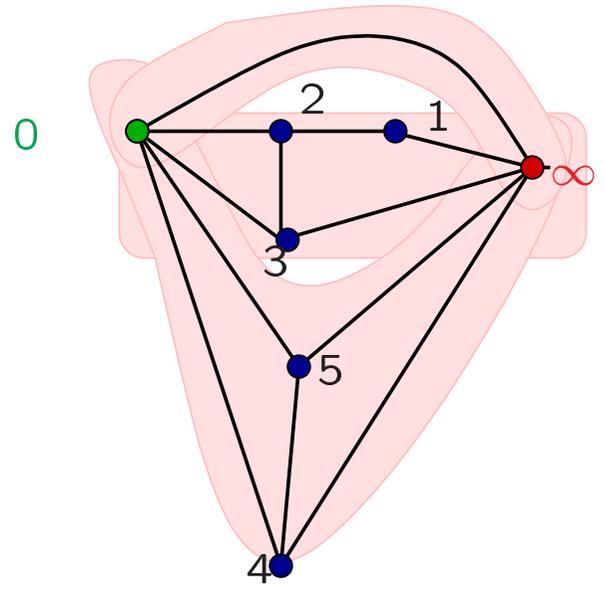
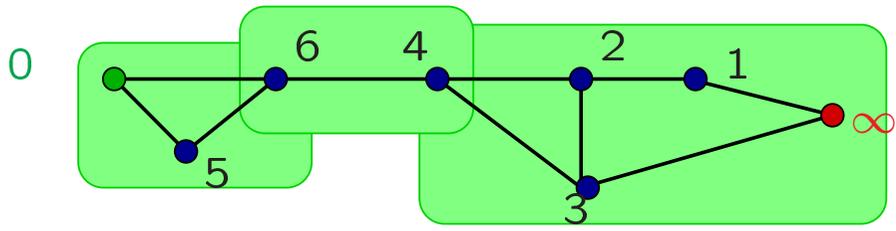
$$R(x, y) := \sum_{n, m} \frac{x^n}{n!} y^m R[n, m] = \frac{2(1+y)}{x^2} G_y^{(2)}$$

où  $R[n, m]$  est le nombre de réseaux à  $n + 2$  sommets et  $m$  arêtes.

# Trois types de réseaux (2 arêtes au moins)

- Type I : Réseaux série

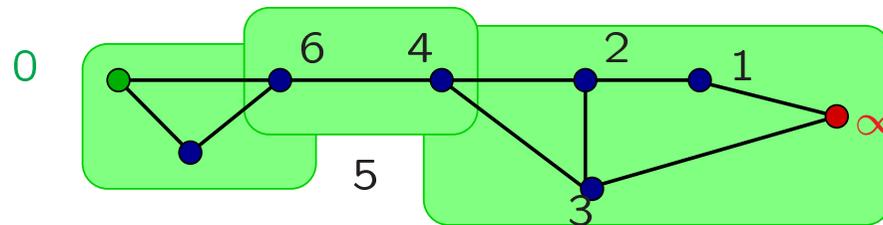
- Type II : Réseaux parallèle



- Type III : Les autres...

## II.2. Décomposition des réseaux

- 0 ou 1 arête :  $1 + y$
- Type I : Réseaux série

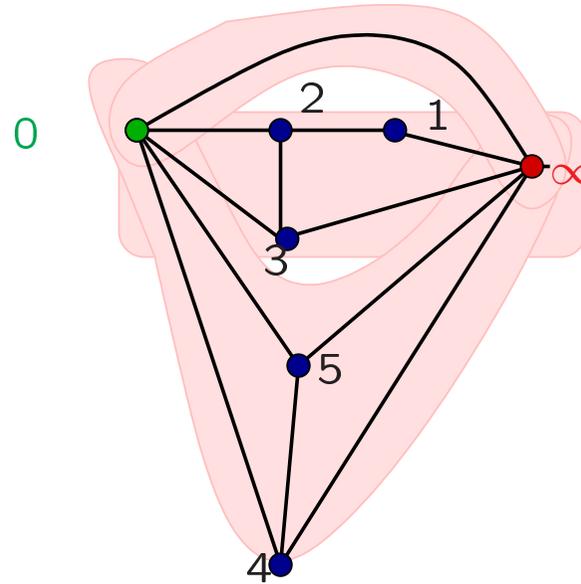


$$R_s = \frac{x(R-1)^2}{1+x(R-1)}$$

- Un réseau (à au moins 1 arête) est une **suite** de réseaux non-série.
- Un réseau-série est une **suite d'au moins 2** réseaux non-série

## II.2. Décomposition des réseaux

- Type II : Réseaux parallèle

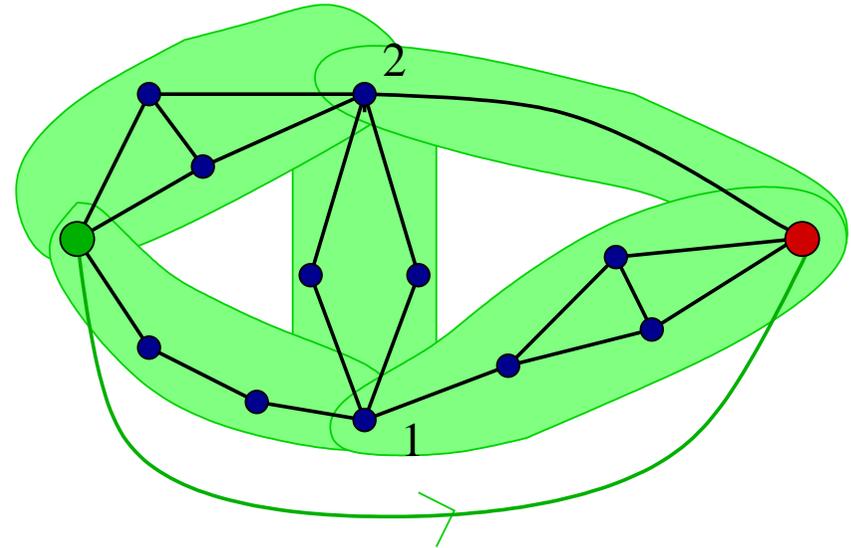
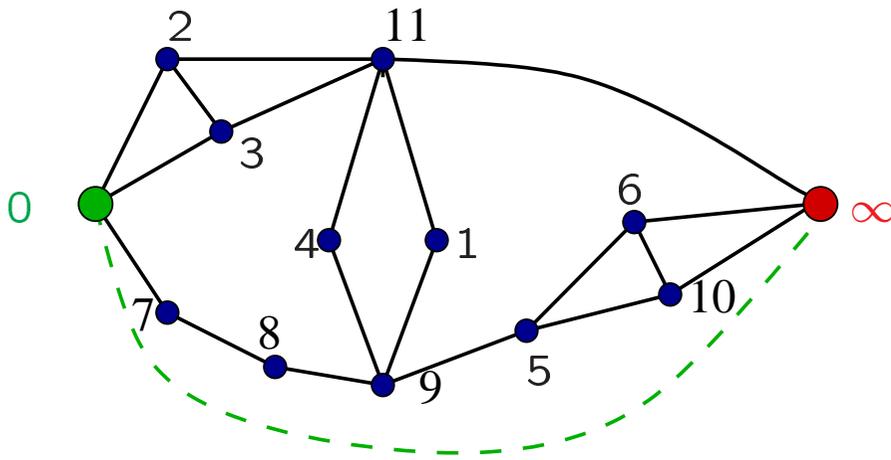


$$R_p = R - 1 - y - \log \frac{R}{1 + y}$$

— Un réseau à pôles non-adjacents est un **ensemble** de réseaux non-parallèle à pôles non-adjacents

## II.2. Décomposition des réseaux

- Type III : Les autres sont obtenus à partir d'une **CARTE** 3-connexe enracinée en remplaçant chaque arête non-racine par un réseau.



$$R_a = \frac{M^{(3)}(x, R-1)}{2x^2(R-1)}$$

où  $M^{(3)}(x, y)$  compte les **cartes** planaires 3-connexes enracinées (à 4 sommets au moins)

## On y est !

- Soient  $U$ ,  $V$  et  $M^{(3)}$  définies par :  $U = xy(1 + V)^2$ ,  $V = y(1 + U)^2$ ,

$$M^{(3)} = x^2y^2 \left( \frac{1}{1 + xy} - \frac{y}{1 + y} - \frac{(1 + U)^2(1 + V)^2}{(1 + U + V)^3} \right)$$

- Définissons  $R(x, y)$  implicitement par :

$$\frac{x(R - 1)^2}{1 + x(R - 1)} - \log \frac{R}{1 + y} + \frac{M^{(3)}(x, R - 1)}{2x^2(R - 1)} = 0$$

- puis  $G^{(2)}(x, y)$  par

$$R = \frac{2(1 + y)}{x^2} G_y^{(2)} \quad \text{et} \quad G^{(2)}(x, 0) = 0,$$

- puis  $G^{(1)}(x, y)$  par

$$G_x^{(1)} = \exp \left( G_x^{(2)} \left( x G_x^{(1)}, y \right) \right) \quad \text{et} \quad G^{(1)}(0, y) = 0,$$

- et enfin

$$G^{(0)} = \exp(G^{(1)})$$

Alors  $G^{(k)}(x, y)$  compte les graphes planaires  $k$ -connexes selon sommets et arêtes. Tout ça est disponible depuis (au moins) 1982.

# Asymptotique et lois limites des graphes planaires étiquetés

## [Gimenez-Noy 05]

- Nombre de graphes planaires étiquetés à  $n$  sommets :

$$G[n] \sim \kappa \gamma^n n^{-7/2}$$

où  $\kappa$  et  $\gamma \simeq 27.226\dots$  sont “explicités”.

- Distribution du nombre d'arêtes :

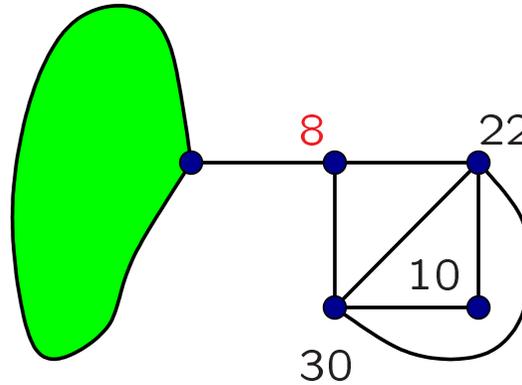
$$\mathbb{E}(A_n) \sim \mu n \quad \text{et} \quad \text{var}(A_n) \sim \sigma^2 n$$

et les fluctuations autour de la moyenne, normalisées par  $\sqrt{n}$ , sont asymptotiquement gaussiennes.

- Estimation du nombre de graphes planaires à  $n$  sommets et  $\lfloor \alpha n \rfloor$  arêtes, pour  $1 < \alpha < 3$ .

## Asymptotique et lois limites des graphes planaires étiquetés

- Pour tout graphe planaire  $H$ , le nombre d'occurrences pendantes de  $H$  dans un graphe planaire aléatoire à  $n$  sommets est linéaire en moyenne, de variance linéaire et à variations gaussiennes.



- En particulier, les graphes planaires ont en moyenne un **nombre exponentiel d'automorphismes** (échange de deux feuilles voisines)
- Un graphe planaire de taille  $n$  est connexe avec probabilité  $\sim 0.96$ . Le nombre de composantes connexes est distribué comme  $1 + P(1.03\dots)$ , où  $P(\nu)$  désigne une loi de Poisson. ETC !
- Génération aléatoire en taille approchée et temps linéaire [Fusy 07]

### B3. Graphes planaires non étiquetés

- Existence d'une constante de croissance [Denise-Vasconcellos-Welsh 96]:

$$(G^u[n])^{1/n} \rightarrow \gamma_u$$

- Borne inférieure :

$$\frac{G^\ell[n]}{n!} \leq G^u[n] \Rightarrow \gamma_\ell = 27.22... \leq \gamma_u$$

En fait l'inégalité est stricte [McDiarmid-Steger-Welsh 05] .

- Borne supérieure

$$\gamma_u < 30.061...$$

[Bonichon-Gavoille-Hanusse-Poulalhon-Schaeffer 06]

(Borne fournie par les cartes planaires simples (graphes plongés enracinés) : 34.26...)

**C. Exclure d'autres mineurs ?**

## C1. Des problèmes plus simples : sous-familles de graphes planaires

- Du déjà vu : les arbres (et les forêts) (pas de  $K_3$ )

Énumération des forêts

- plongées et enracinées,
- étiquetées,
- non étiquetées  $F[n] \sim \kappa\mu^n n^{-5/2}$

- Pas très très loin : graphes planaires extérieurs (ni  $K_4$  ni  $K_{2,3}$ )

[Bodirsky-Fusy-Kang-Vigerske 07]

Énumération des graphes planaires extérieurs

- plongés et enracinés,
- étiquetés,
- non étiquetés  $PE[n] \sim \kappa\gamma^n n^{-5/2}$

- Graphes série-parallèle étiquetés [Bodirsky-Gimenez-Kang-Noy 07]

$SP[n] \sim \kappa\eta^n n^{-5/2} n!$

## C2. Problèmes plus durs : graphes plongeables dans une surface donnée

- Graphes plongés et enracinés : encore des cartes [Bender, Canfield, Gao, Richmond...] Séries algébriques
- Graphes étiquetés [McDiarmid 08] : Pour toute surface  $S$ , le nombre de graphes étiquetés plongeables dans  $S$  satisfait

$$\left( \frac{G^{S,\ell}[n]}{n!} \right)^{1/n} \rightarrow \gamma_\ell$$

où la constante  $\gamma_\ell$  est la même que dans le cas planaire ( $\gamma = 27.22\dots$ )

- Graphes non-étiquetés [McDiarmid 08] : Pour toute surface  $S$ , le nombre de graphes non étiquetés plongeables dans  $S$  satisfait

$$\left( G^{S,u}[n] \right)^{1/n} \rightarrow \gamma_u$$

où la constante  $\gamma_u$  est encore indépendante de la surface (et inconnue !)

### C3. Problèmes encore plus durs : exclure des mineurs quelconques

- Graphes étiquetés [Norine et al. 06] : pour toute famille de mineurs exclus, il existe une constante  $\gamma$ , dépendant de cette famille, telle que

$$G^{\ell}[n] \leq \gamma^n n!$$

(à comparer avec le nombre total de graphes étiquetés,  $2^{n(n-1)/2}$ )

- Raffinements [Bernardi et al. 07] Par exemple :

soit  $n! \leq G^{\ell}[n] \leq \gamma^n n!$ , soit  $G^{\ell}[n] \leq \varepsilon^n n!$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $n$  grand

- À voir : pour les graphes non étiquetés à mineurs exclus,

$$G^u[n] \leq \gamma^n$$

## Quelques questions

- Asymptotique des graphes étiquetés plongeables dans une surface  $S$  :

$$\frac{G^{S,\ell}[n]}{n!} \sim \kappa \gamma_\ell^n n! n^{???$$

(connu pour les cartes enracinées :  $\kappa \mu^n n^{5(g-1)/2}$  [Bender-Canfield 86])

- Autres familles de graphes (largeur arborescente bornée...)

## Quelques questions

- Asymptotique des graphes étiquetés plongeables dans une surface  $S$  :

$$\frac{G^{S,\ell}[n]}{n!} \sim \kappa \gamma_\ell^n n! n^{???$$

(connu pour les cartes :  $\kappa \mu^n n^{5(g-1)/2}$ )

- Autres familles de graphes (largeur arborescente bornée...)
- Z'avez d'aut' questions ?

