

Petit patchwork de combinatoire énumérative

Mireille Bousquet-Mélou, CNRS, LaBRI, Bordeaux

<http://www.labri.fr/~bousquet>

La combinatoire énumérative...

- C'est quoi ?
- Pour quoi ?
- Comment ?

L'art de compter

COMPTER [κ ò t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de \Rightarrow chiffrer, dénombrer, nombrer. *Compter les moutons.*

Problème générique

\mathcal{A} ensemble des moutons

\mathcal{A}_n ensemble des moutons à n pattes

Question

évaluer, estimer, caractériser le nombre

$$a_n = |\mathcal{A}_n|.$$

L'art de compter

COMPTER [$\kappa \tilde{o} t e$]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de \Rightarrow chiffrer, dénombrer, nombrer. *Compter les moutons.*

Problème générique

\mathcal{A} ensemble des moutons

$\mathcal{A}_{n,p}$ ensemble des moutons à n pattes et p cornes

Question

évaluer, estimer, caractériser le nombre

$$a_{n,p} = |\mathcal{A}_{n,p}|.$$

Le coefficient binomial ou la combinatoire de Monsieur Jourdain

$$\begin{aligned} C_n^p &= \text{nombre de combinaisons de } p \text{ éléments pris parmi } n \\ &= \text{nombre de sous-ensembles de } \{1, 2, \dots, n\} \text{ ayant } p \text{ éléments} \\ &= \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} \end{aligned}$$

Exemple : $n = 4, p = 2$

$$\binom{4}{2} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6.$$

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

Plan des exposés

- Compter quoi, et pour quoi ?
- Qu'est ce qu'une (bonne) réponse ?
- Comment compter ? : approche récursive, approche bijective, exemples. Séries génératrices rationnelles, algébriques. Quelques mystères algébriques.



- Un (gros) exemple : triangulations et marches dans le quart de plan



- Autour de l'énumération : asymptotique, manipulation effective de séries, preuves automatiques d'identités, logiciels...

Pourquoi compter ?

- **Probabilités** : modèles discrets ; approximation de phénomènes continus par des modèles discrets.

Pourquoi compter ?

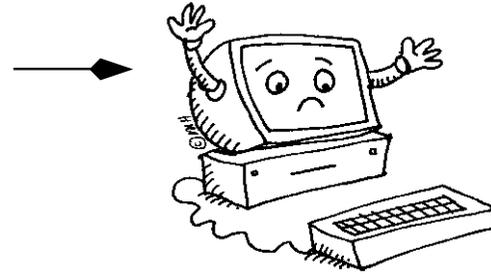
- **Probabilités** : modèles discrets ; approximation de phénomènes continus par des modèles discrets.
- **Algèbre** : structures définies par générateurs et relations (représentation de S_n ; fonctions symétriques, tableaux de Young...)

Pourquoi compter ?

- **Probabilités** : modèles discrets ; approximation de phénomènes continus par des modèles discrets.
- **Algèbre** : structures définies par générateurs et relations (représentation de S_n ; fonctions symétriques, tableaux de Young...)
- **Analyse d'algorithmes** : énumération des entrées selon la taille et le coût de traitement → analyse en moyenne.

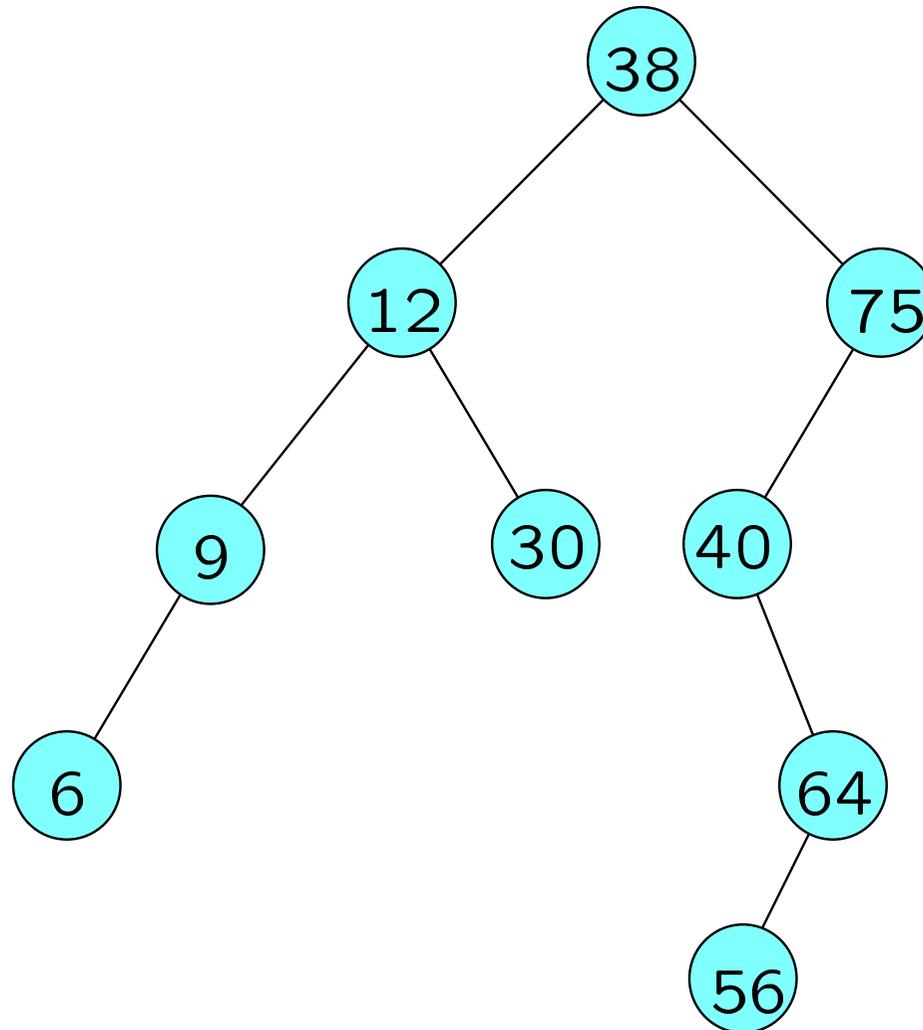
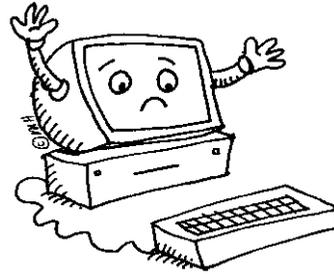
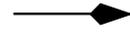
Stockage d'une liste : les arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38



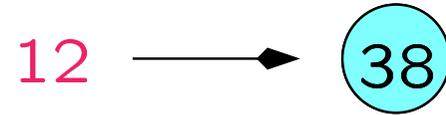
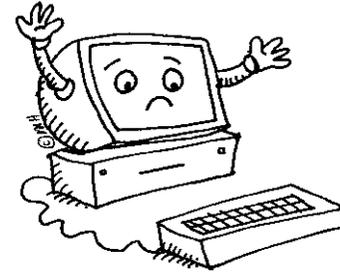
Stockage d'une liste : les arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38



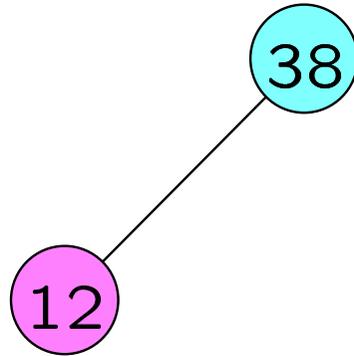
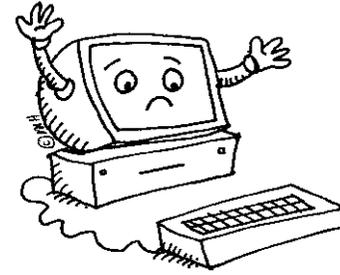
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



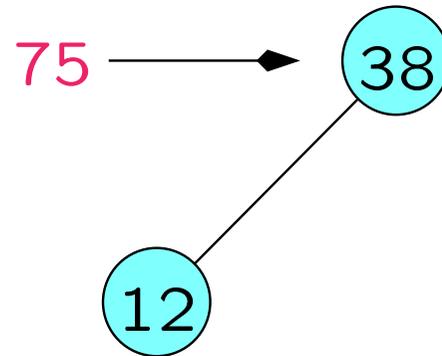
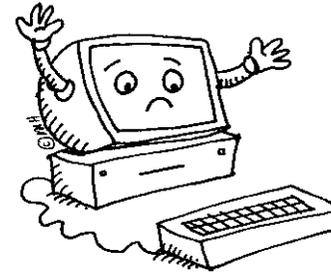
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



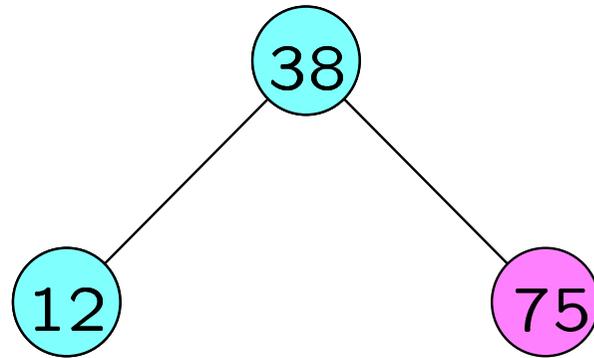
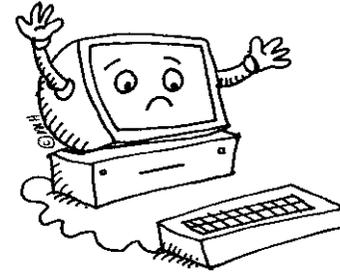
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



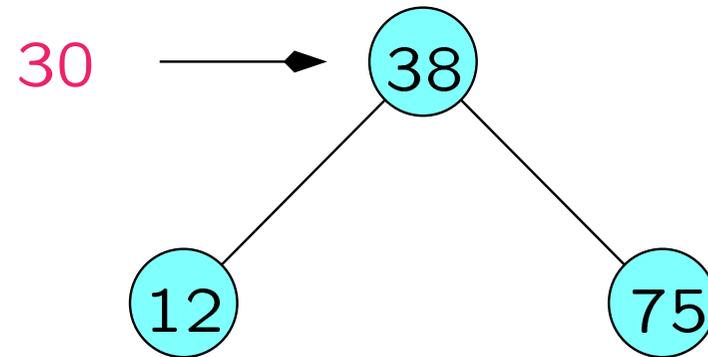
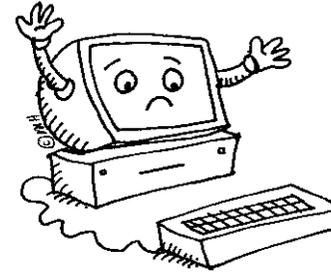
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



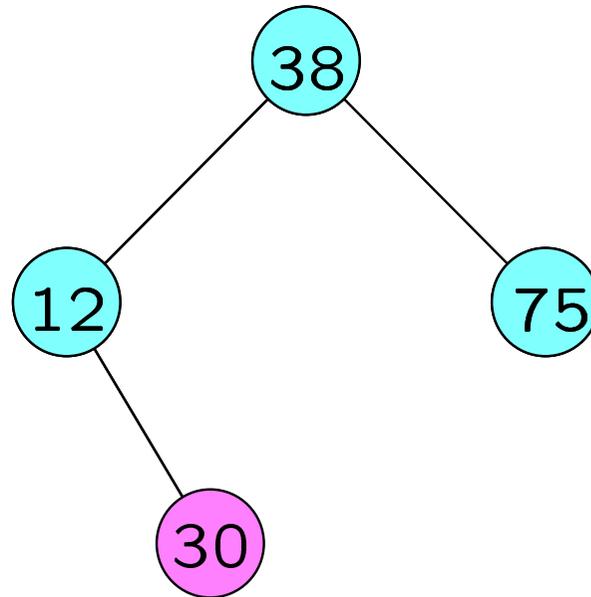
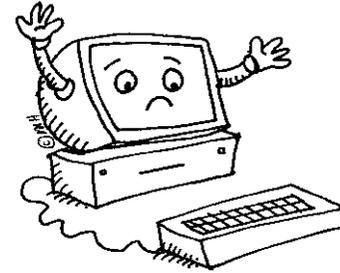
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



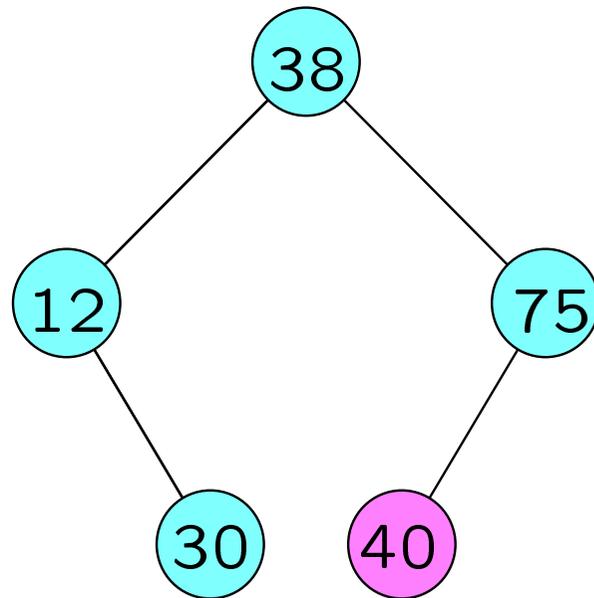
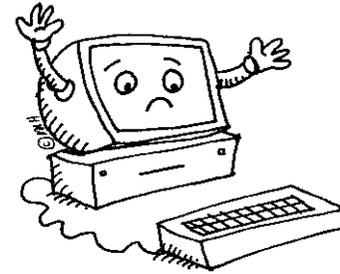
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



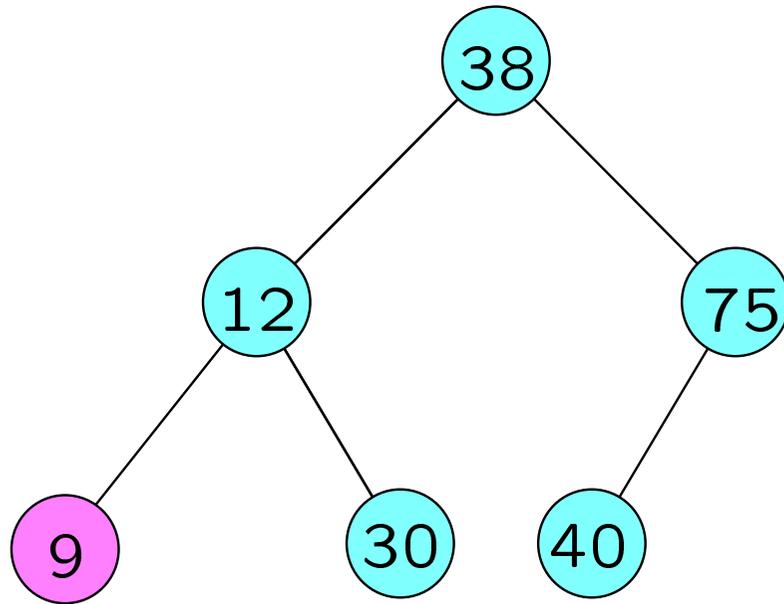
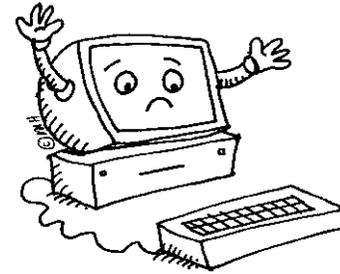
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



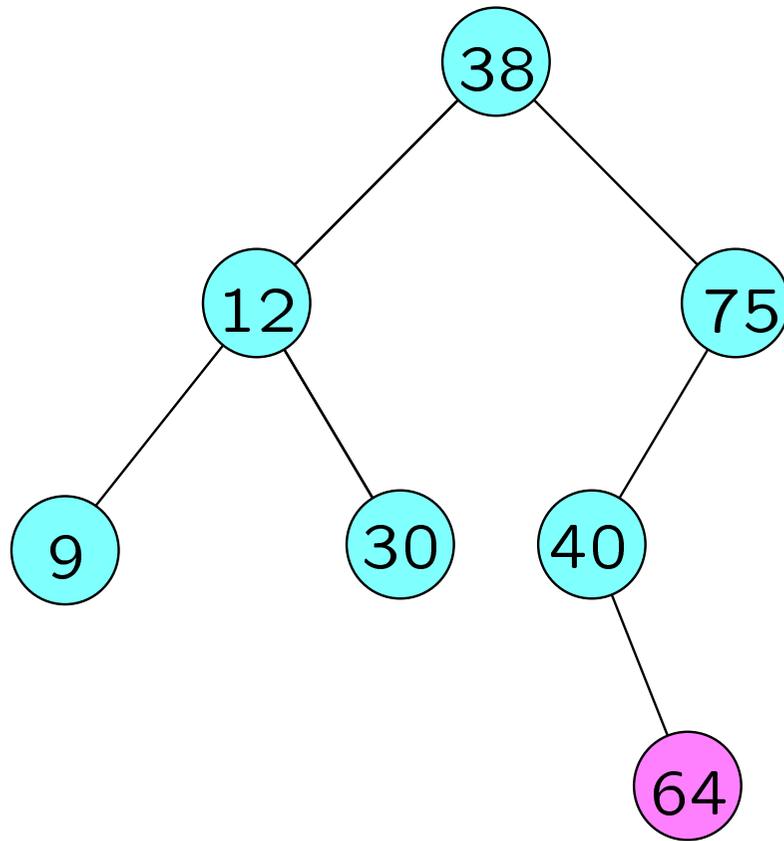
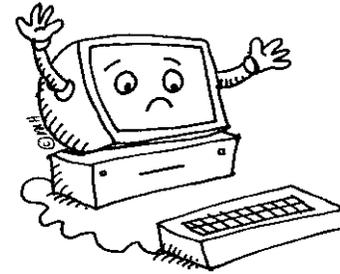
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



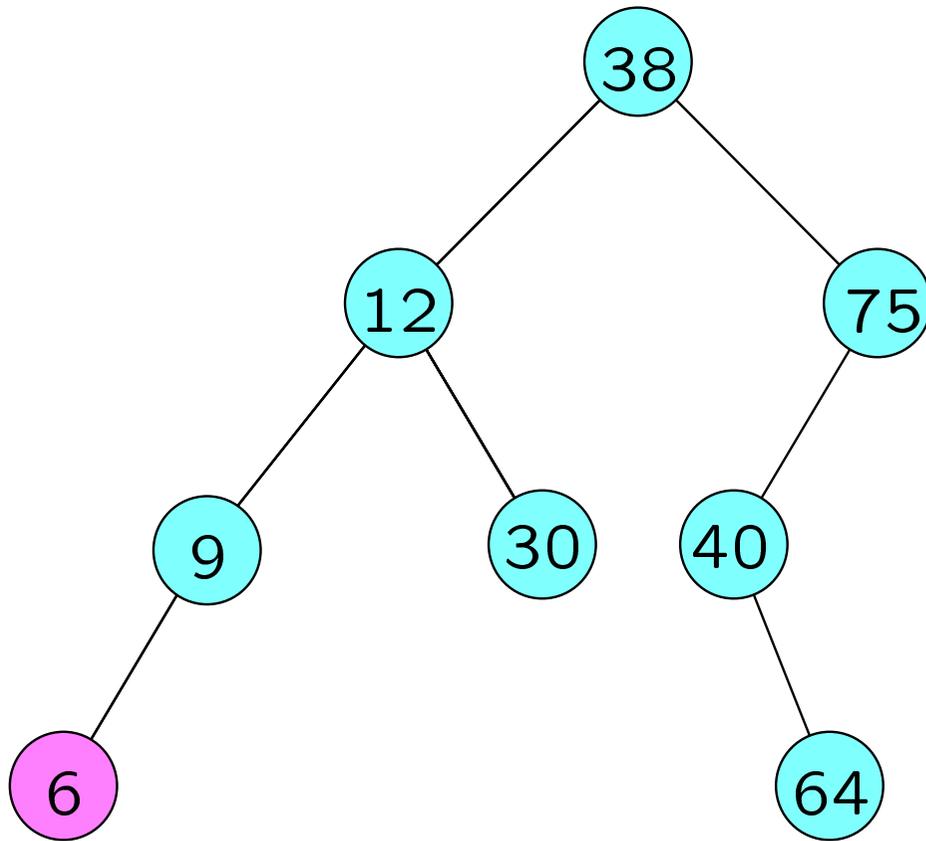
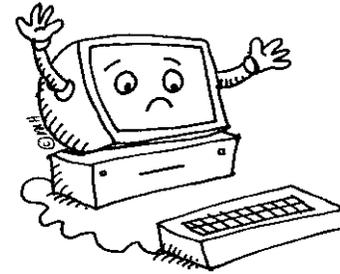
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



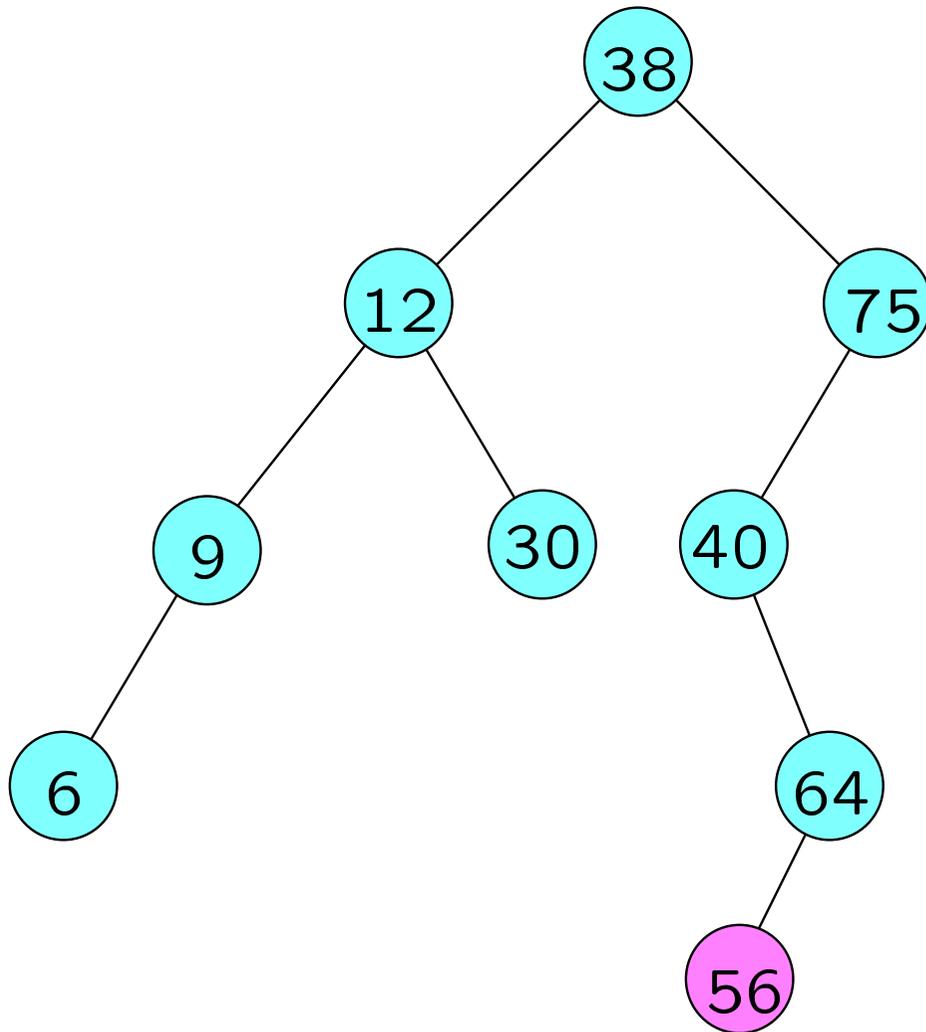
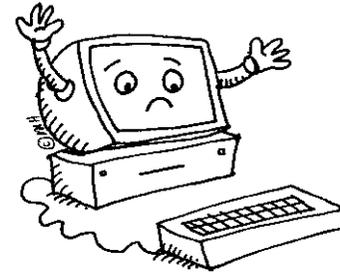
Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →



Arbres binaires de recherche

56 6 64 9 40 30 75 12 38 →

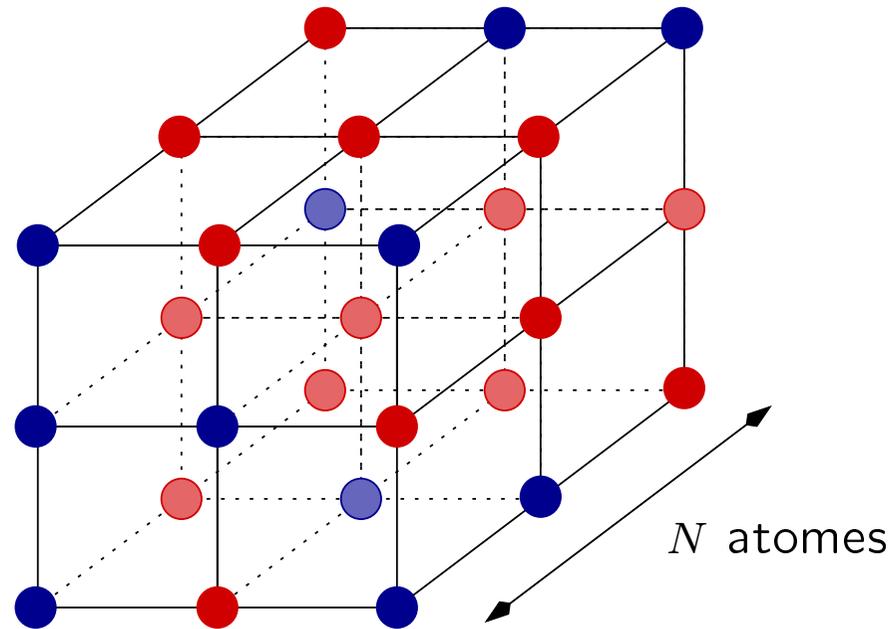


Pourquoi compter ?

- **Probabilités** : modèles discrets ; approximation de phénomènes continus par des modèles discrets.
- **Algèbre** : structures définies par générateurs et relations (représentation de S_n ; fonctions symétriques, tableaux de Young...)
- **Analyse d'algorithmes** : énumération des entrées selon la taille et le coût de traitement → analyse en moyenne.
- **Physique statistique** : modèles discrets décrivant les interactions entre composants microscopiques → prédiction du comportement macroscopique

Un modèle de cristal ferromagnétique [Lenz] : le modèle d'Ising

À une échelle microscopique...



But : Calculer la somme suivante, portant sur tous les coloriage possibles des sommets :

$$Z(N) = \sum_{\text{conf.}} x^{\bullet-\bullet},$$

où x est un nombre dépendant de la température et du matériau.

Pourquoi compter ?

- **Probabilités** : modèles discrets ; approximation de phénomènes continus par des modèles discrets.
- **Algèbre** : structures définies par générateurs et relations (représentation de S_n ; fonctions symétriques, tableaux de Young...)
- **Analyse d'algorithmes** : énumération des entrées selon la taille et le coût de traitement → analyse en moyenne.
- **Physique statistique** : modèles discrets décrivant les interactions entre composants microscopiques → prédiction du comportement macroscopique
- **Pour élucider la structure des objets**

Une réponse (première partie)

Expression

- $a_n = 3^{n-1}$
- $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \rightarrow$ simplification ?
- $a_{m,n,p} = \det \left[\binom{m+n}{m+i-j} \right]_{1 \leq i,j \leq p} \rightarrow$ évaluation ?

Relation de récurrence

- $n^3 a_{n-1} - (17n^2 + 17n + 5)(2n + 1)a_n + (n + 1)^3 a_{n+1} = 0 \rightarrow$ solution ?

Estimation asymptotique

- $a_n \sim \kappa (17 + 12\sqrt{2})^n n^{-3/2}$
- $a_n \sim \kappa \sqrt{2 + \sqrt{2}}^n n^{11/32}$

Une réponse (première partie)

Expression

- $a_n = 3^{n-1}$
- $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \rightarrow$ simplification ?
- $a_{m,n,p} = \det \left[\binom{m+n}{m+i-j} \right]_{1 \leq i,j \leq p} \rightarrow$ évaluation ? $\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^p \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$

Relation de récurrence

- $n^3 a_{n-1} - (17n^2 + 17n + 5)(2n + 1)a_n + (n + 1)^3 a_{n+1} = 0 \rightarrow$ solution ?

Estimation asymptotique

- $a_n \sim \kappa (17 + 12\sqrt{2})^n n^{-3/2}$
- $a_n \sim \kappa \sqrt{2 + \sqrt{2}}^n n^{11/32}$

Séries génératrices

La **série génératrice ordinaire** des objets de \mathcal{A} , comptés selon leur taille, est

$$A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{a \in \mathcal{A}} t^{|a|}.$$

H. Wilf : “A clothesline on which we hang up a sequence of numbers for display”.

La **série génératrice exponentielle** des objets de \mathcal{A} , comptés selon leur taille, est

$$A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{t^{|a|}}{|a|!}.$$

Plusieurs variables : possibilité de **séries mixtes**

$$A(x, y) = \sum_{n, m \geq 0} a_{n, m} \frac{x^n}{n!} y^m$$

(graphes à n sommets et m arêtes par exemple).

Séries formelles : $A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n.$

Somme $A(t) + B(t) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) t^n$

Produit $A(t).B(t) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{i+j=n} a_i b_j$

Quasi-inverse $\frac{1}{1 - A(t)} = \sum_{n \geq 0} A(t)^n$ (si $a_0 = 0$)

Substitution $B(A(t)) = \sum_{n \geq 0} b_n A(t)^n$ (si $a_0 = 0$)

Dérivée $A'(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}.$

Remarque : si les séries ont un rayon de convergence strictement positif, ces opérations coïncident avec les opérations usuelles sur les fonctions d'une variable complexe.

Une réponse (deuxième partie)

Expression de la série génératrice

- $A(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$ (Fibonacci)

- $A(t) = (1-t) \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{(1+t)/(1-t)(1-t+\sqrt{1-6t+t^2})}} \right)$

- $A(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)\dots}$

Équation fonctionnelle

- Algébrique

$$t^3 A(t)^4 + t^2(3+4t)A(t)^3 + t(3-29t+6t^2)A(t)^2 + (1-7t+29t^2+4t^3)A(t) - (1-t)^3 = 0$$

- Différentielle (linéaire)

$$(t-5)A(t) + (7t^2-112t+1)A'(t) + 3t(2t^2-51t+1)A''(t) + t^2(t^2-34t+1)A^{(3)}(t) = 0.$$

→ solution ?

Exemple : la factorielle

- $a_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$
- $a_n \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ quand $n \rightarrow \infty$
- Série génératrice exponentielle

$$\sum_n a_n \frac{t^n}{n!} = \sum_n t^n = \frac{1}{1-t}.$$

- Série génératrice ordinaire

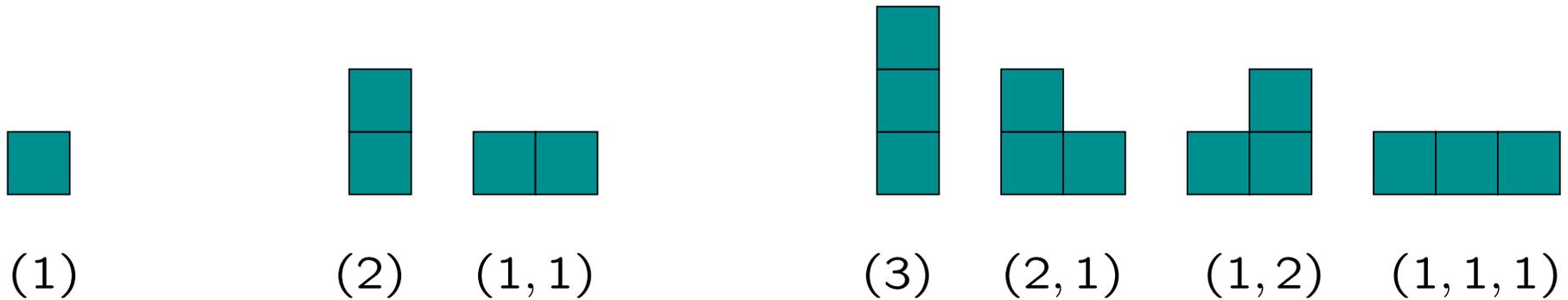
$$\sum_n a_n t^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{2t}{1 - \frac{2t}{1 - \frac{3t}{1 - \dots}}}}}}}$$

Comment compter?

A. Approches récursives

Compositions d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une **composition** de n à k parts est un k -uplet $c = (n_1, \dots, n_k)$ où $n_i \in \{1, 2, \dots\}$ pour tout i et $n_1 + \dots + n_k = n$. Le **poids** de c est $w(c) := n$. Soit $a(n)$ le nombre de compositions de n .

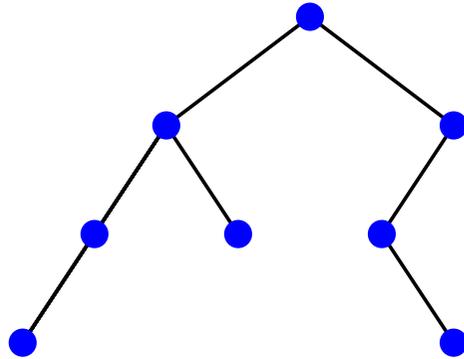


Décomposition récursive :

$$(n_1, \dots, n_k) \mapsto \begin{cases} (n_1, \dots, n_{k-1}, n_k - 1) & \text{si } n_k > 1 \\ (n_1, \dots, n_{k-1}) & \text{si } n_k = 1 \end{cases}$$

$$a(n) = a(n-1) + a(n-1)$$

Arbres binaires



8 noeuds

Nbre de sommets n

Arbres

a_n

1



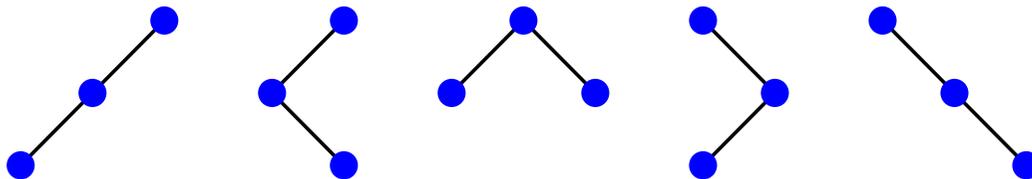
1

2



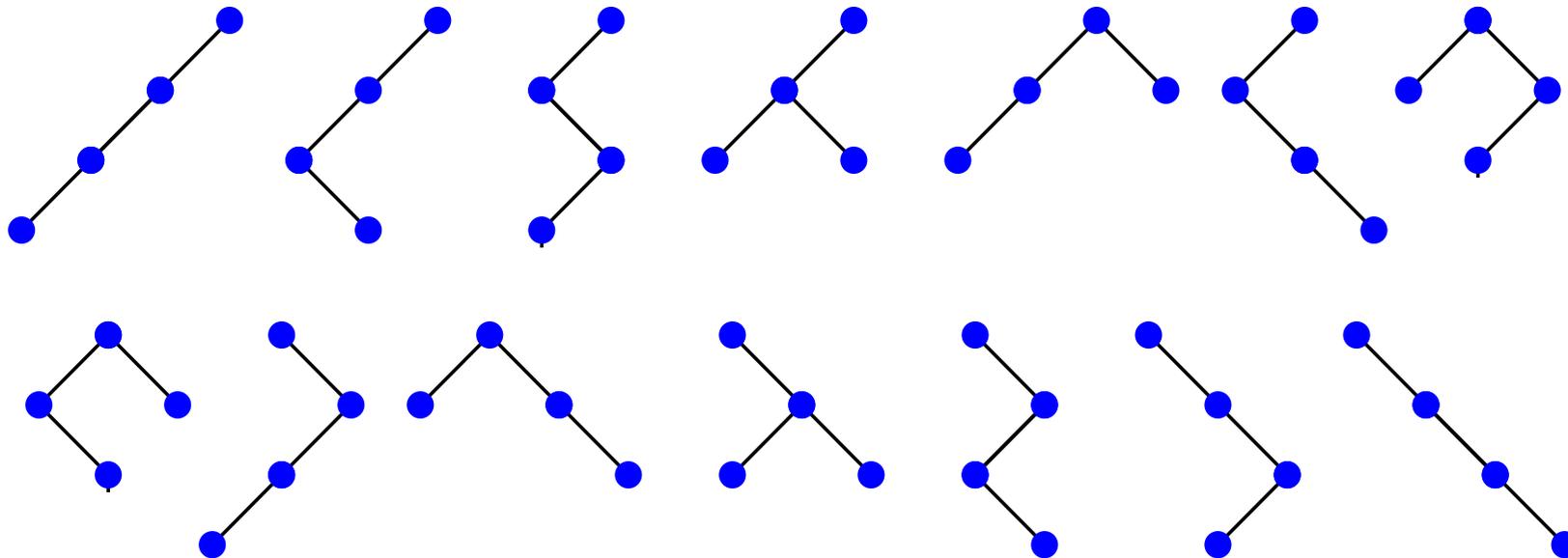
2

3



5

4



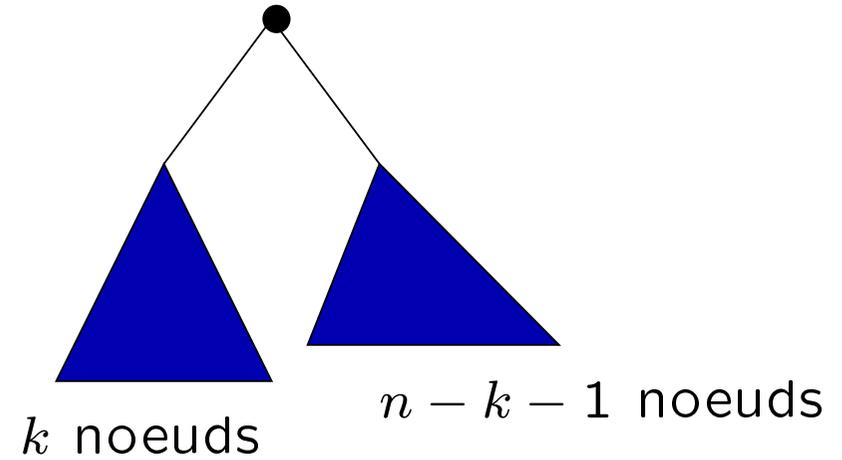
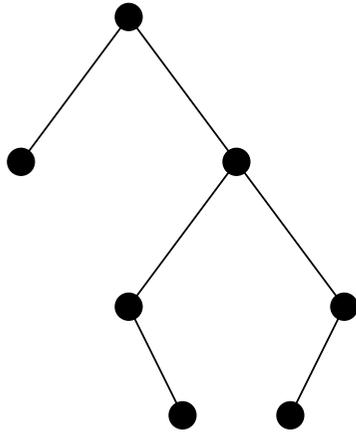
14

42

Arbres binaires : approche récursive

1. Factorisation

n noeuds
 $a(n)$

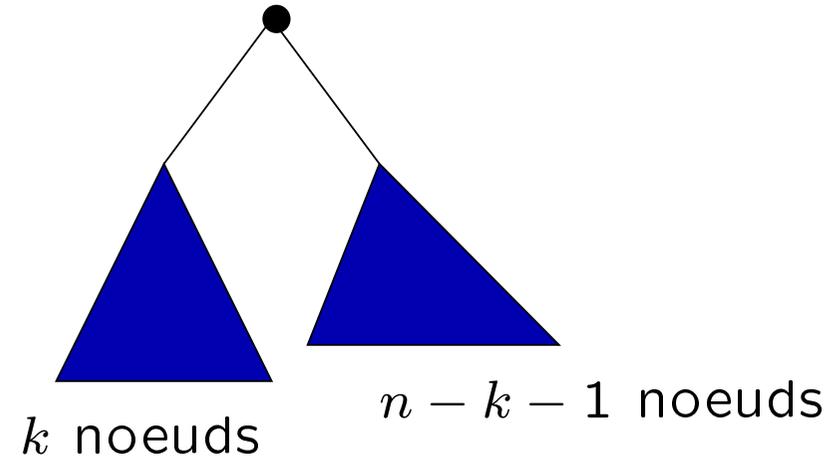
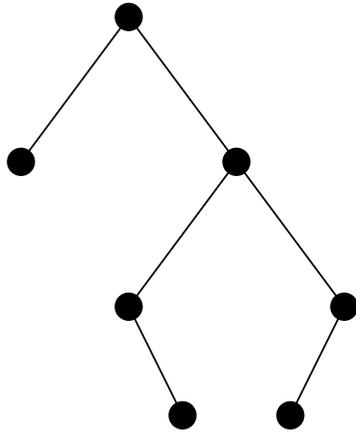


$$a(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a(k)a(n-k-1) \quad a(0) = 1$$

Arbres binaires : approche récursive

1. Factorisation

n noeuds
 $a(n)$



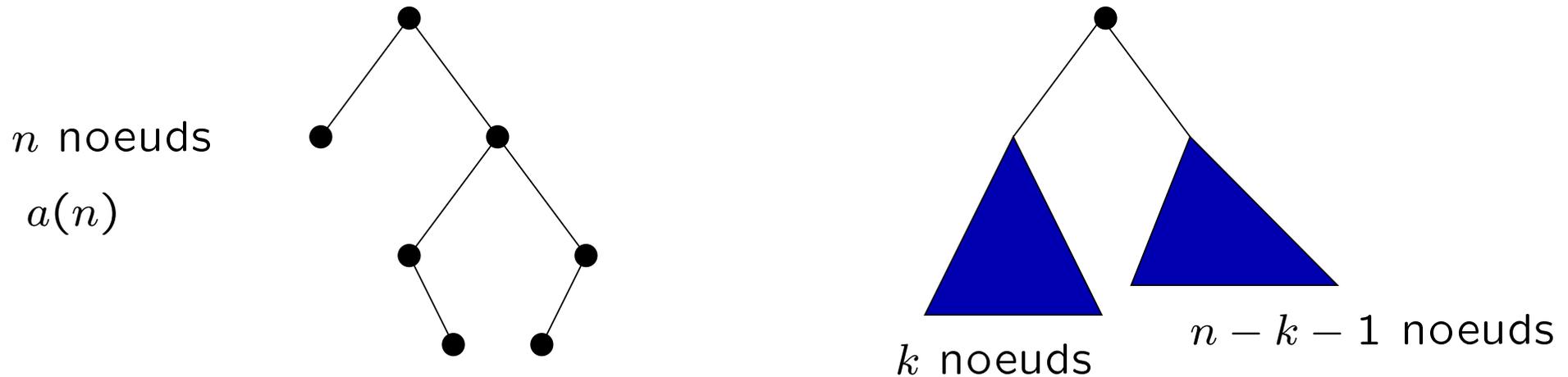
$$a(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a(k)a(n-k-1) \quad a(0) = 1$$

Série génératrice ordinaire : $A(t) = \sum_{n \geq 0} a(n)t^n$

$$A(t) = 1 + tA(t)^2$$

Arbres binaires : approche récursive

1. Factorisation



$$a(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a(k)a(n-k-1) \quad a(0) = 1$$

Série génératrice ordinaire : $A(t) = \sum_{n \geq 0} a(n)t^n$

$$A(t) = 1 + tA(t)^2$$

2. Résolution

$$A(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n \quad \text{Nombres de Catalan.}$$

Dictionnaire des séries génératrices ordinaires

Union disjointe $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

$$A(t) + B(t) = \sum_n (a_n + b_n)t^n$$

Produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

$$A(t).B(t) = \sum_n t^n \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

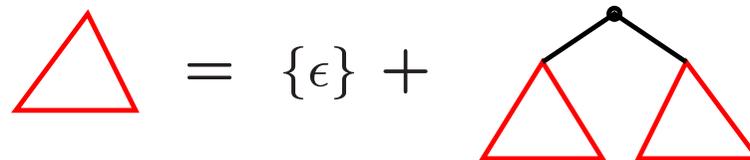
$$|(a, b)| = |a| + |b|$$

Suites d'éléments de \mathcal{A}

$$\frac{1}{1 - A(t)} = \sum_{k \geq 0} A(t)^k \quad (a_0 = 0)$$

$$|(a, b, \dots, z)| = |a| + \dots + |z|$$

Exemple :

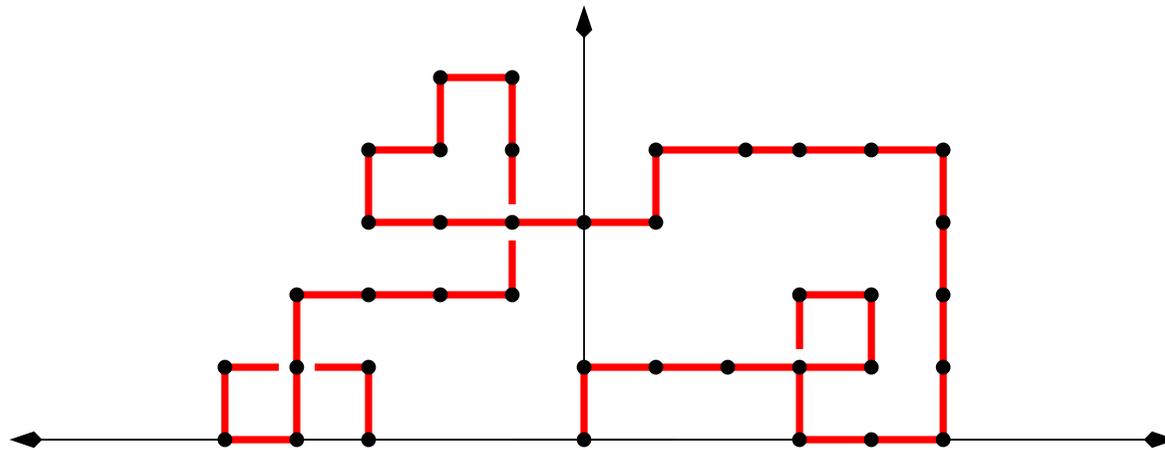


The diagram illustrates the recursive definition of a triangle. On the left is a single red triangle. This is set equal to the empty set (represented by $\{\epsilon\}$) plus a tree structure. The tree structure consists of a black line connecting the top vertices of two red triangles, which are positioned side-by-side.

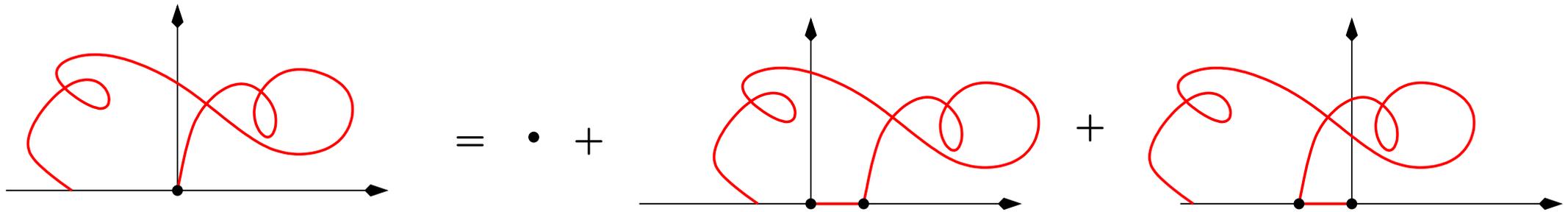
$$A(t) = 1 + tA(t)A(t).$$

Compositions, partitions

Chemins dans un demi-plan



Chemins dans un demi-plan : approche récursive



$C(t)$

$= 1 +$

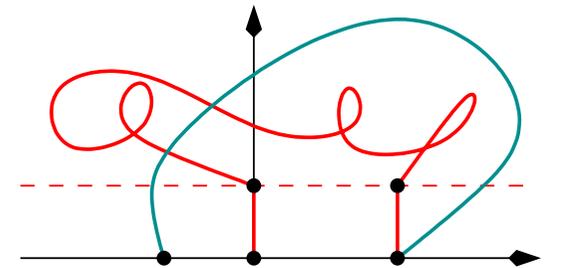
$tC(t)$

$+$

$tC(t)$

$$c_n = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$$

$+$

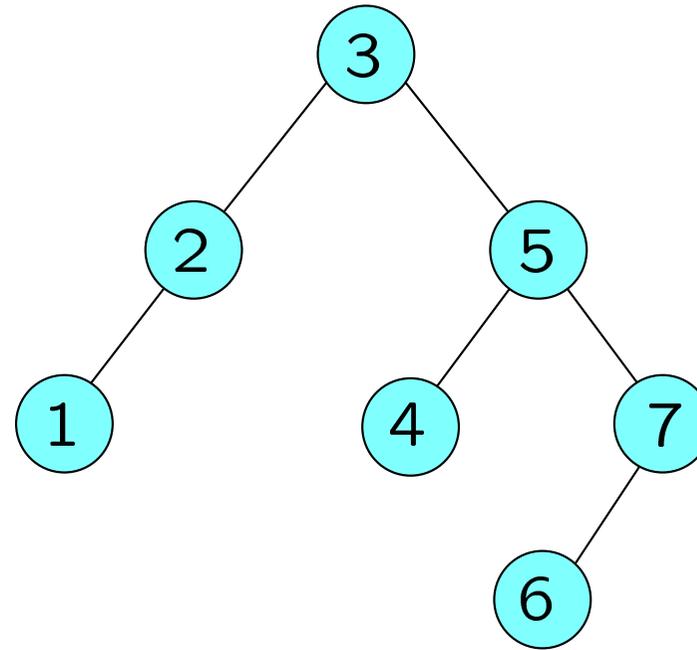


$+$

$t^2C(t)^2$

Arbres binaires de recherche

6 4 7 1 5 2 3



Soit $a(n, k)$ le nombre de permutations de longueur n menant à k comparaisons, et $A(t, q) = \sum_{n,k} a(n, k) \frac{t^n}{n!} q^k$.

Alors, par décomposition en deux sous-arbres,

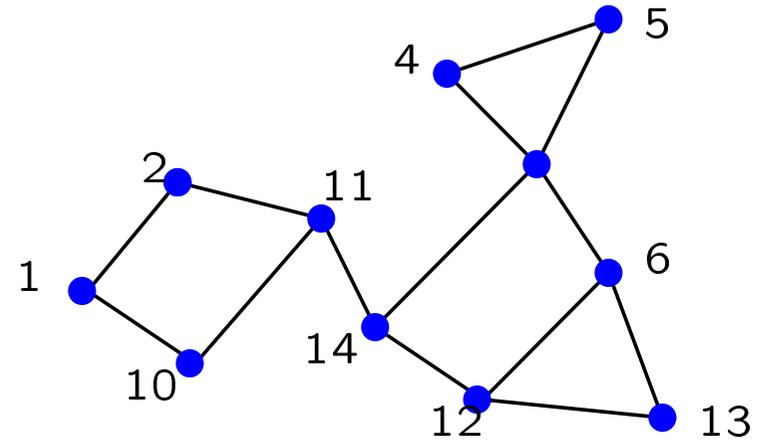
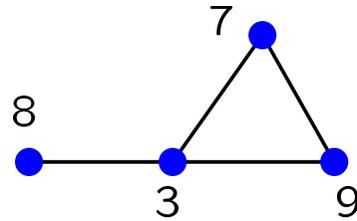
$$\frac{\partial A}{\partial t}(t, q) = A(tq, q)^2 \quad \text{et} \quad A(t, 1) = \frac{1}{1-t}.$$

Graphes planaires étiquetés

n sommets

m arêtes

$a_{n,m}$



Série génératrice mixte :

$$\begin{aligned} G_0(x, y) &= \sum_{n, m \geq 0} a_{n, m} \frac{x^n}{n!} y^m \\ &= 1 + 1 \cdot \frac{x}{1!} + (1 + y) \frac{x^2}{2!} + (1 + 3y + 3y^2 + y^3) \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Équations pour les graphes planaires

Soient $A \equiv A(x, y)$ et $B \equiv B(x, y)$ les séries formelles en x et y données par :

$$A = xy(1 + B)^2 \quad \text{et} \quad B = y(1 + A)^2.$$

La SG des graphes planaires 3-connexes est :

$$M(x, y) = x^2 y^2 \left(\frac{1}{1 + xy} + \frac{y}{1 + y} - \frac{(1 + A)^2 (1 + B)^2}{(1 + A + B)^3} \right).$$

Soit $Y \equiv Y(x, y)$ la série formelle solution de

$$\frac{M(x, Y)}{2x^2 Y} - \log \left(\frac{1 + Y}{1 + y} \right) + \frac{xY^2}{1 + xY} = 0.$$

La SG des graphes planaires 2-connexes est :

$$G_2(x, y) = \frac{x^2}{2} \int_0^y \left(\frac{1 + Y(x, z)}{1 + z} - 1 \right) dz.$$

Soit $F \equiv F(x, y)$ la solution de l'équation

$$F = x \exp \left(yF + \frac{\partial G_2}{\partial x}(F, y) \right).$$

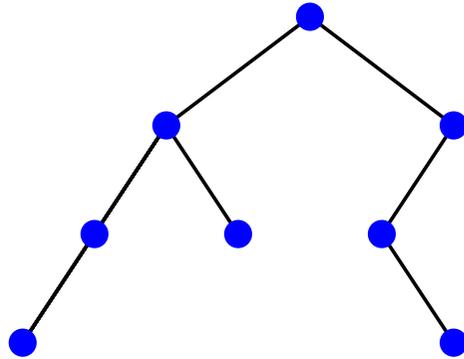
La SG des graphes planaires connexes (resp. généraux) est alors :

$$G_1(x, y) = \int_0^x \frac{F(u, y)}{u} du \quad G_0(x, y) = \exp(G_1(x, y)).$$

Comment compter ?

B. Approches bijectives

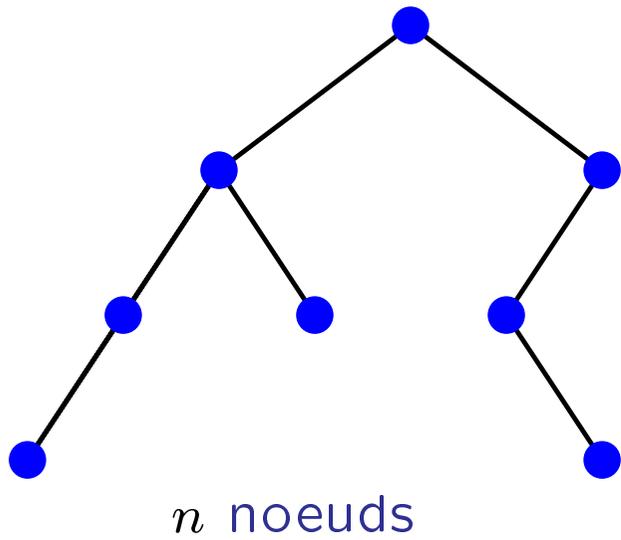
Arbres binaires



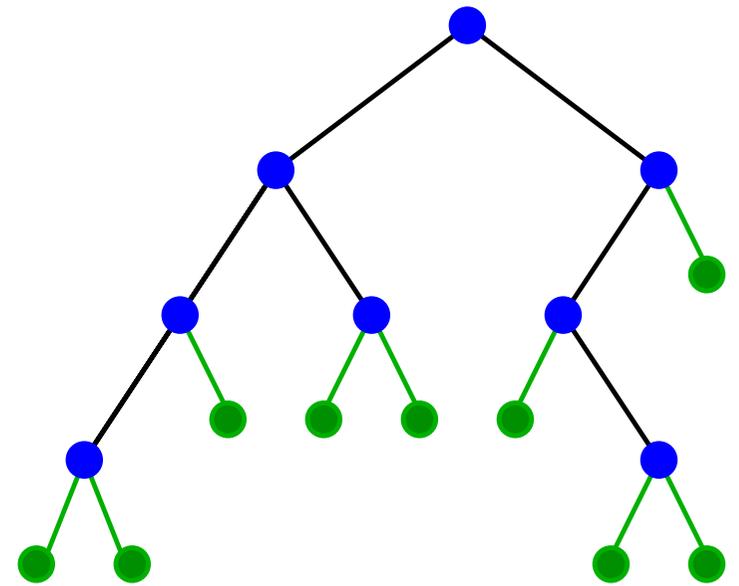
8 noeuds

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Arbres binaires et chemins (mots) de Dyck



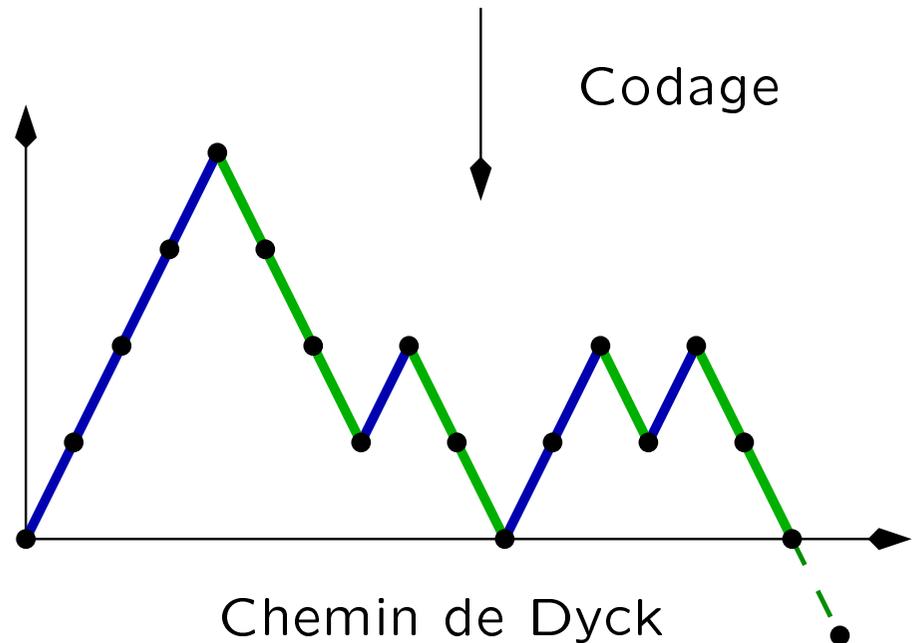
Complétion
→
($n + 1$ feuilles)



$aaaabbbabbaababb(b)$

Mot de Dyck

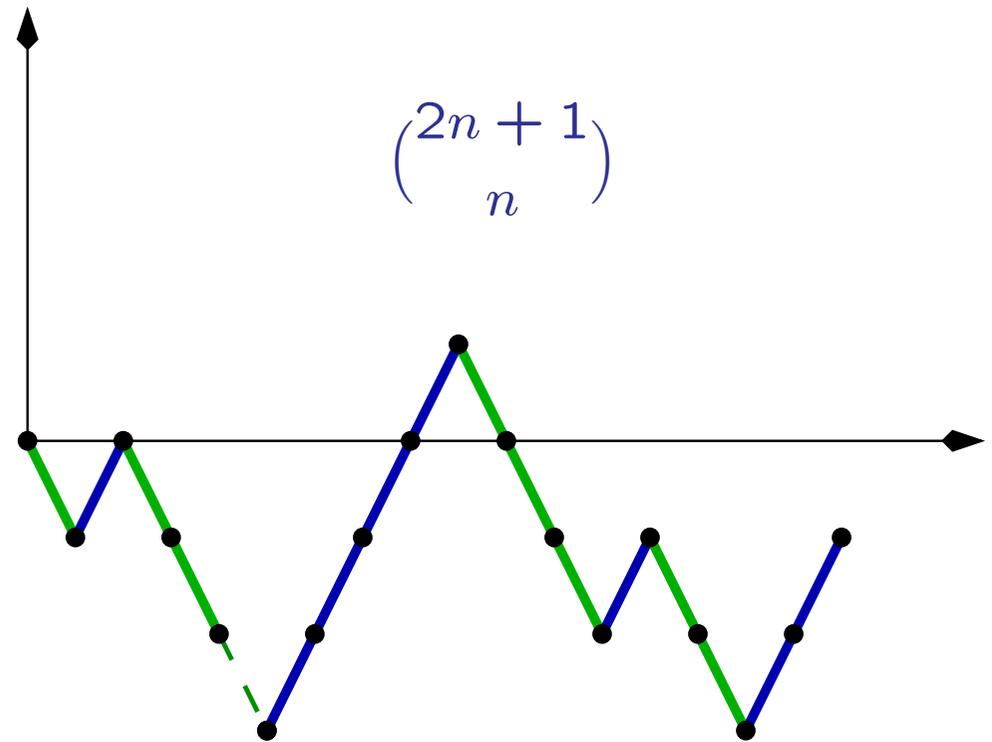
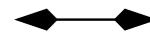
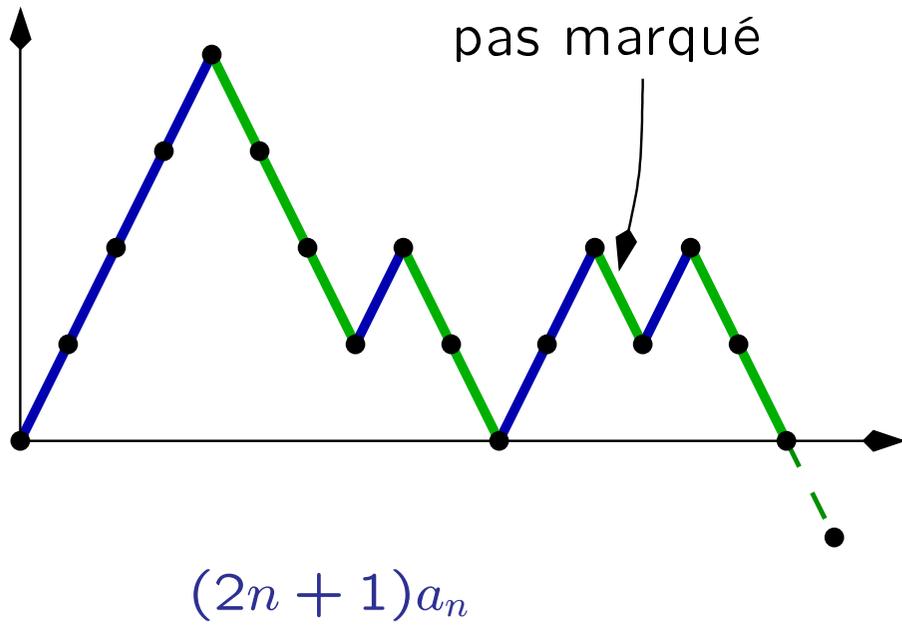
Codage



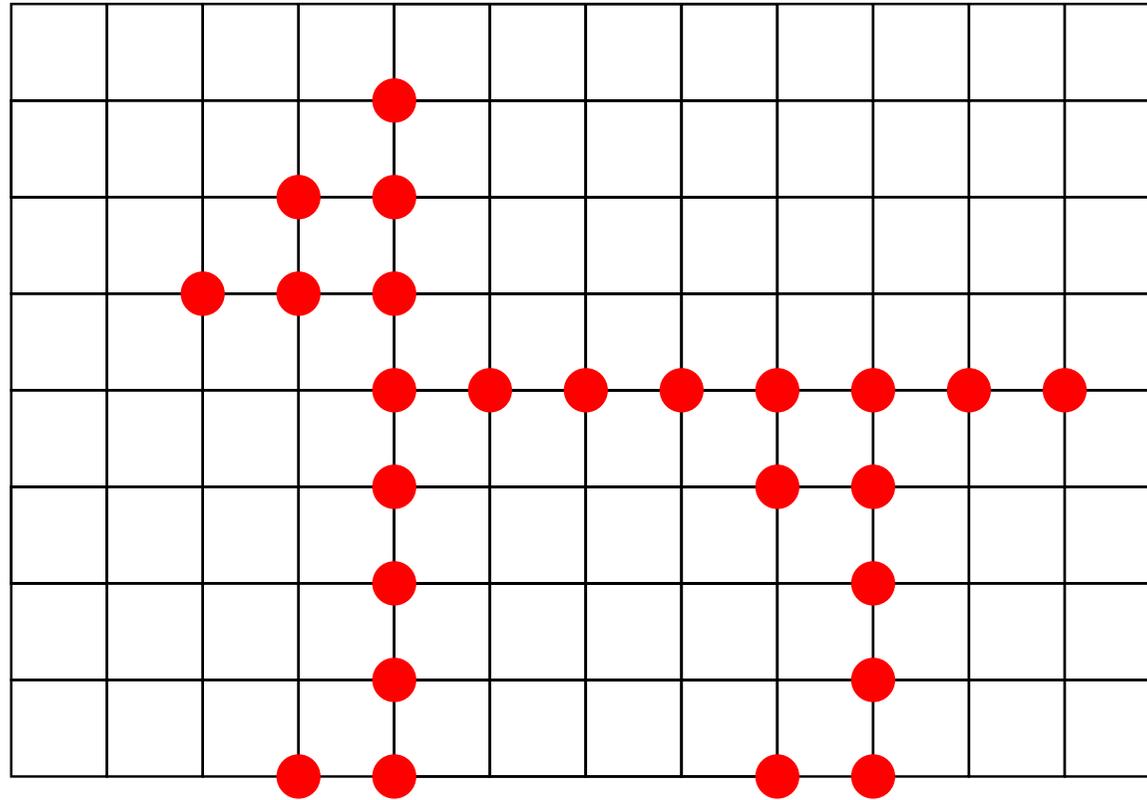
Chemin de Dyck

$2n + 1$ pas

Arbres binaires et chemins de Dyck



Animaux sur réseau



Un animal sur le réseau carré

Animaux sur réseau

One calls these configurations “animals” since they have a certain similarity with multicellular living beings which might enter your nightmares if you counted them too long.

D. STAUFFER

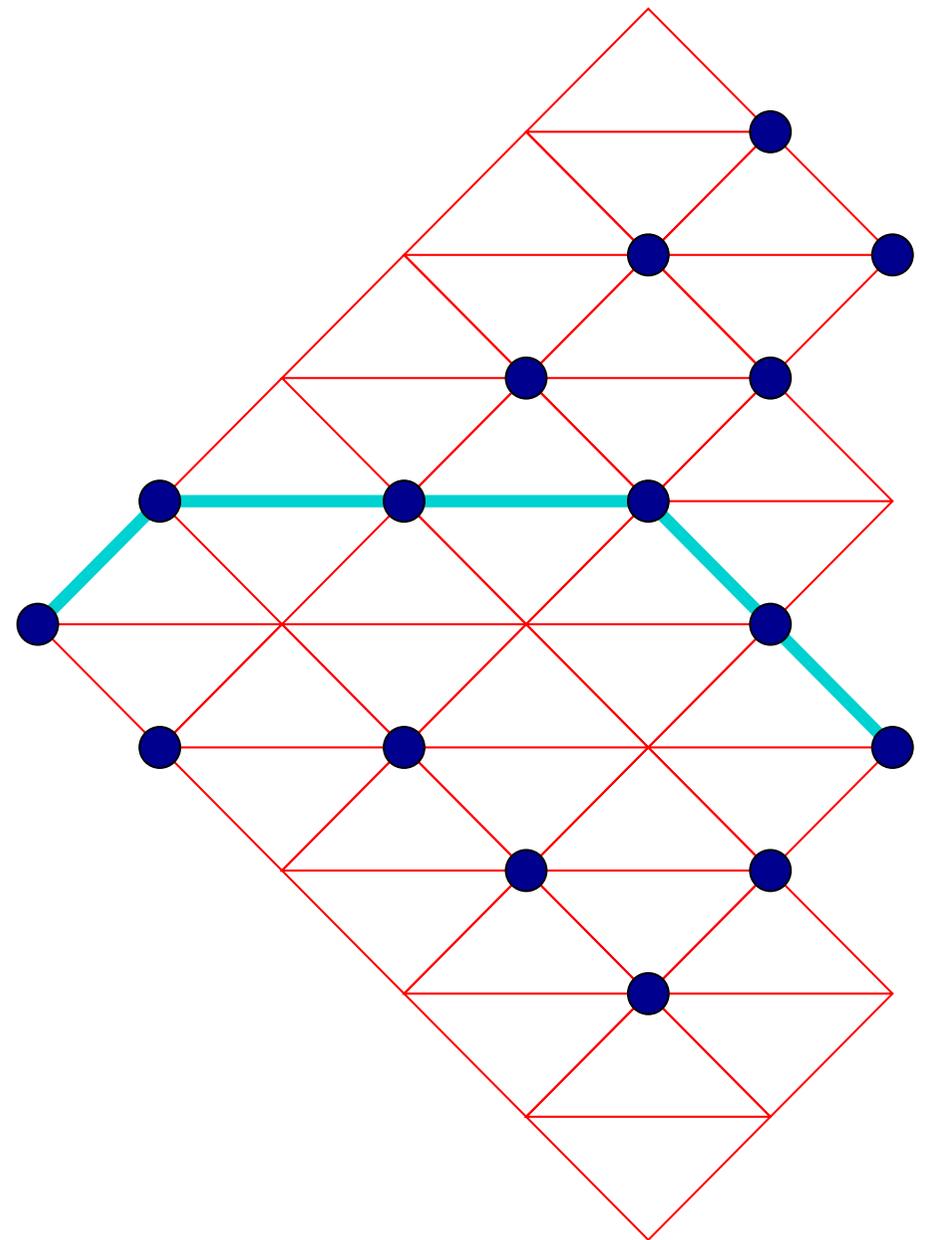
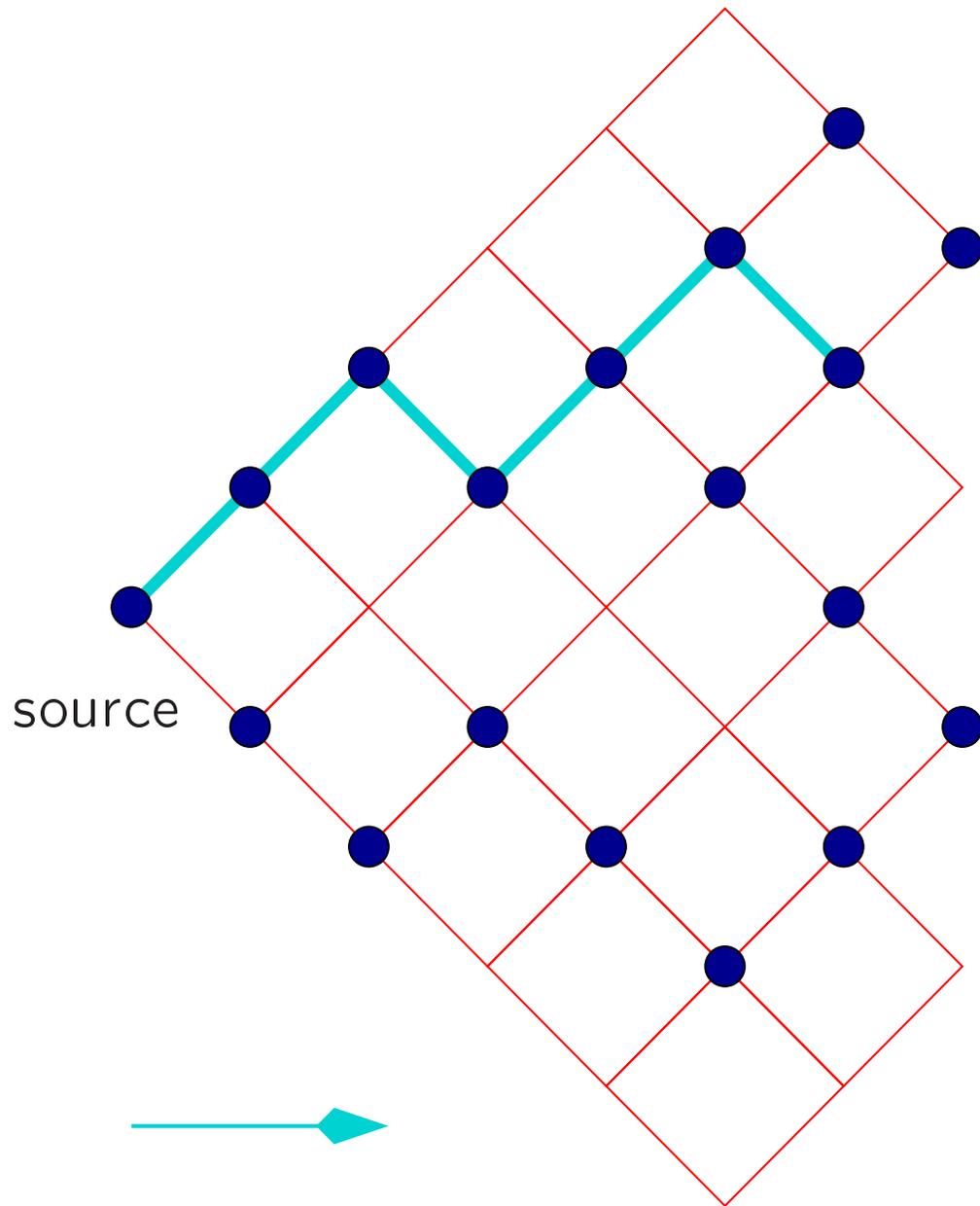
Introduction to percolation theory

The number g_{st} is also called the number of (lattice) animals since it refers to the question: “How many different species of multicellular organisms can Nature form out of s different cells?”. The word is due to HARARY.

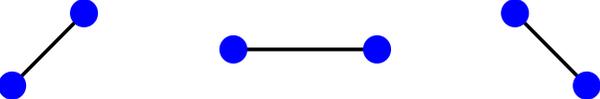
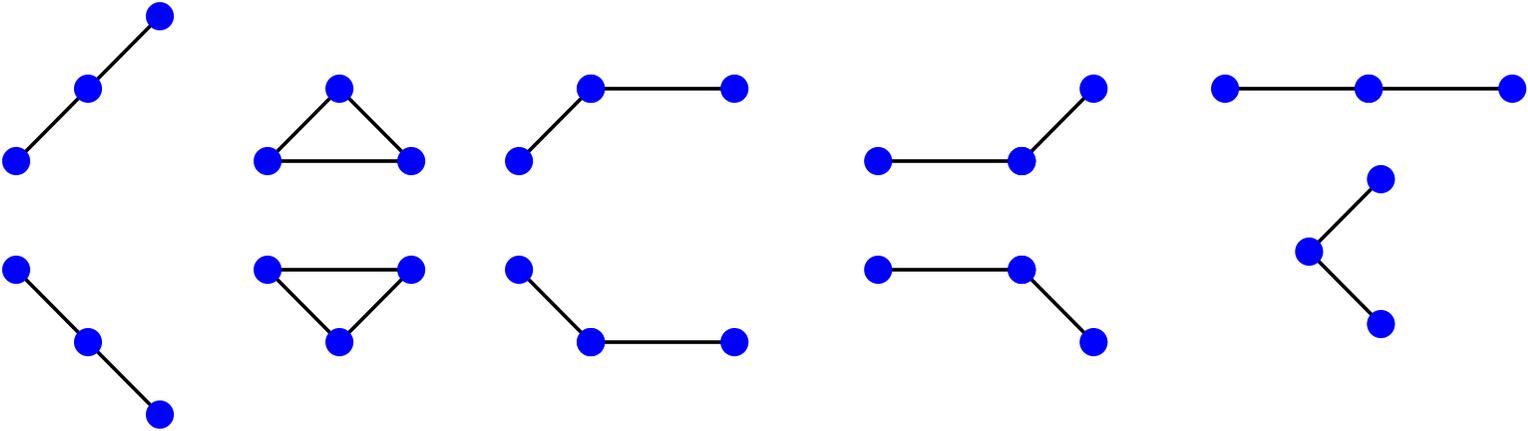
D. STAUFFER

Scaling theory of percolation clusters

Animaux *dirigés* sur réseaux carré et triangulaire



Animaux dirigés sur réseau triangulaire

Nbre de sommets n	Animaux dirigés 	a_n
1		1
2		2
3		10
4		35

Animaux dirigés sur réseau triangulaire

Nbre de sommets n	Animaux dirigés	a_n
1		$1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1}$
2		$2 = \frac{1}{2} \binom{4}{2}$
3		$10 = \frac{1}{2} \binom{6}{3}$
4		$35 = \frac{1}{2} \binom{8}{4}$

Le nombre d'AD à n cellules est $a_n = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$

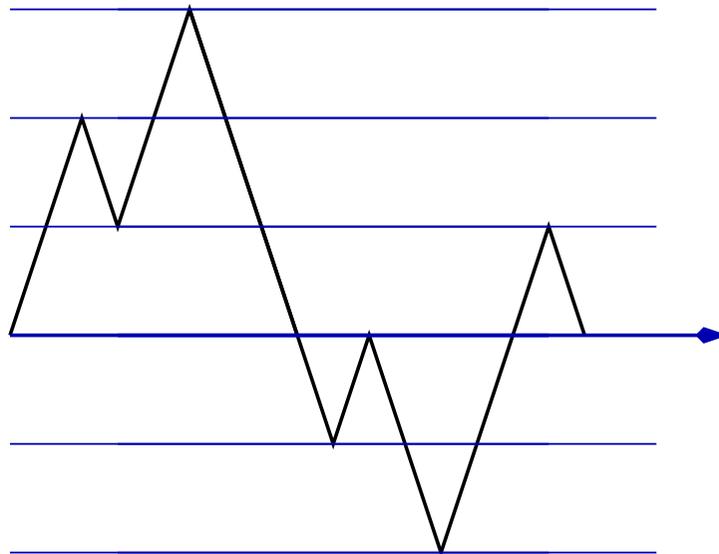
Animaux dirigés sur réseau triangulaire

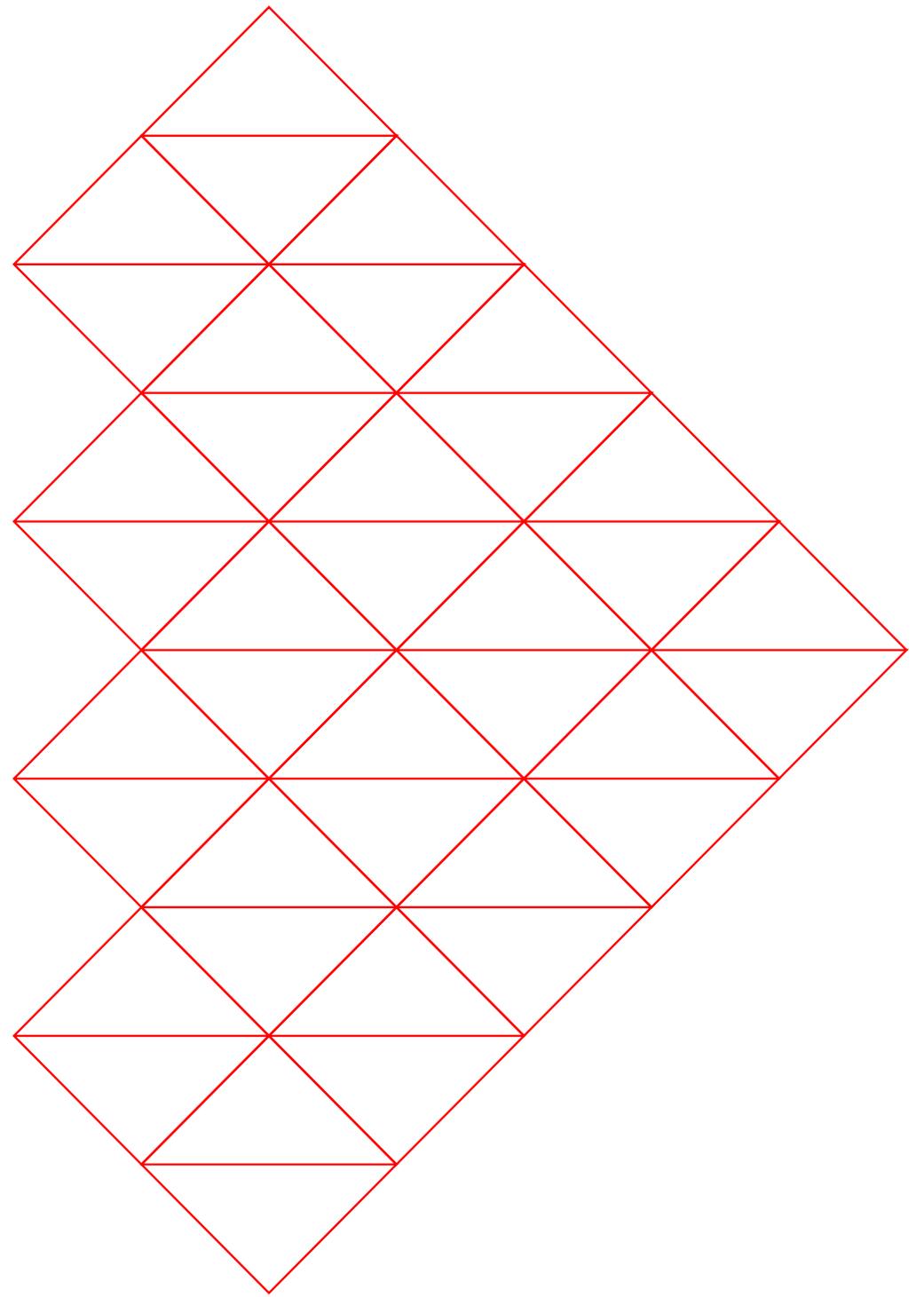
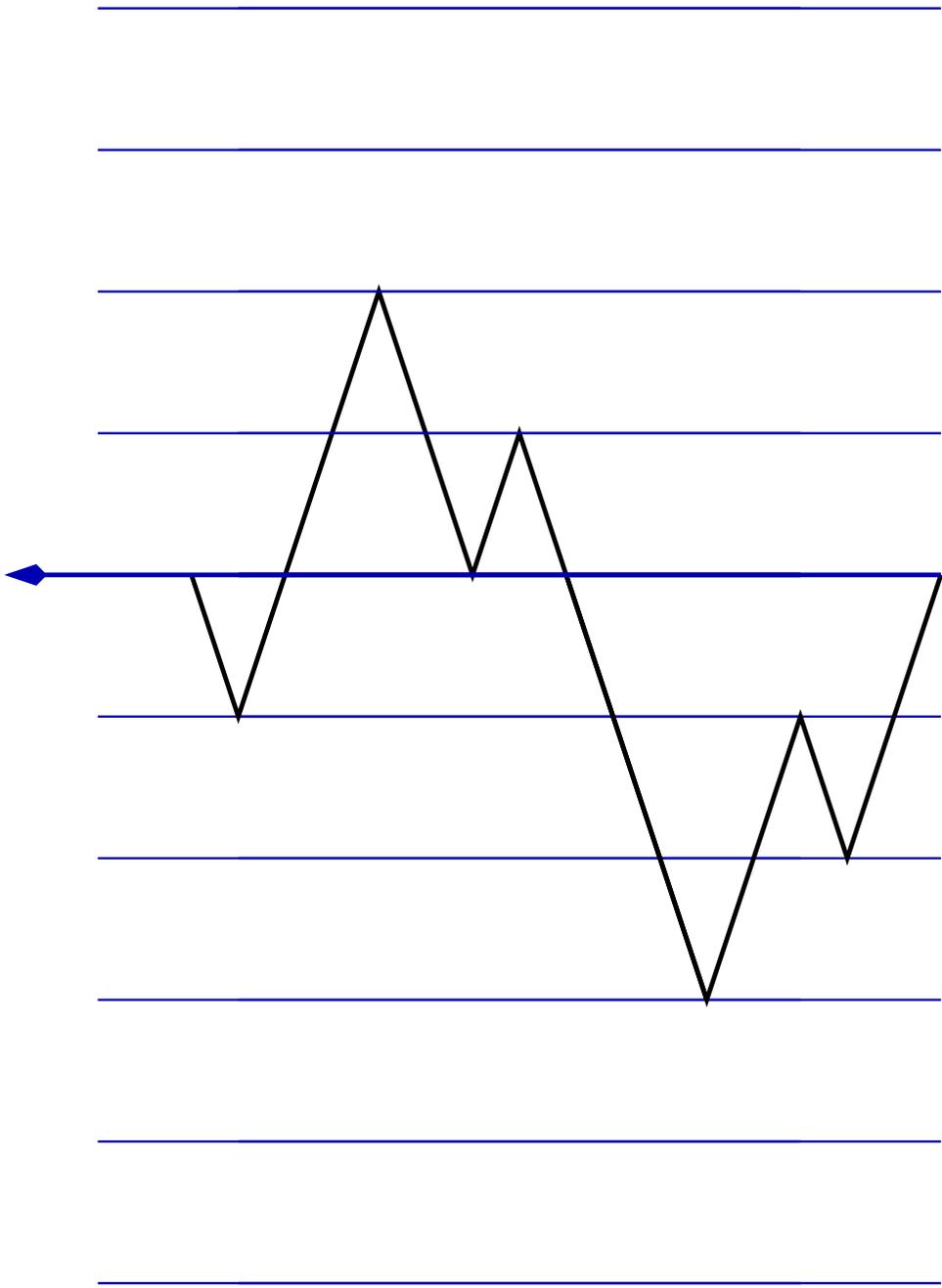
Le nombre d'AD à n cellules est $a_n = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$

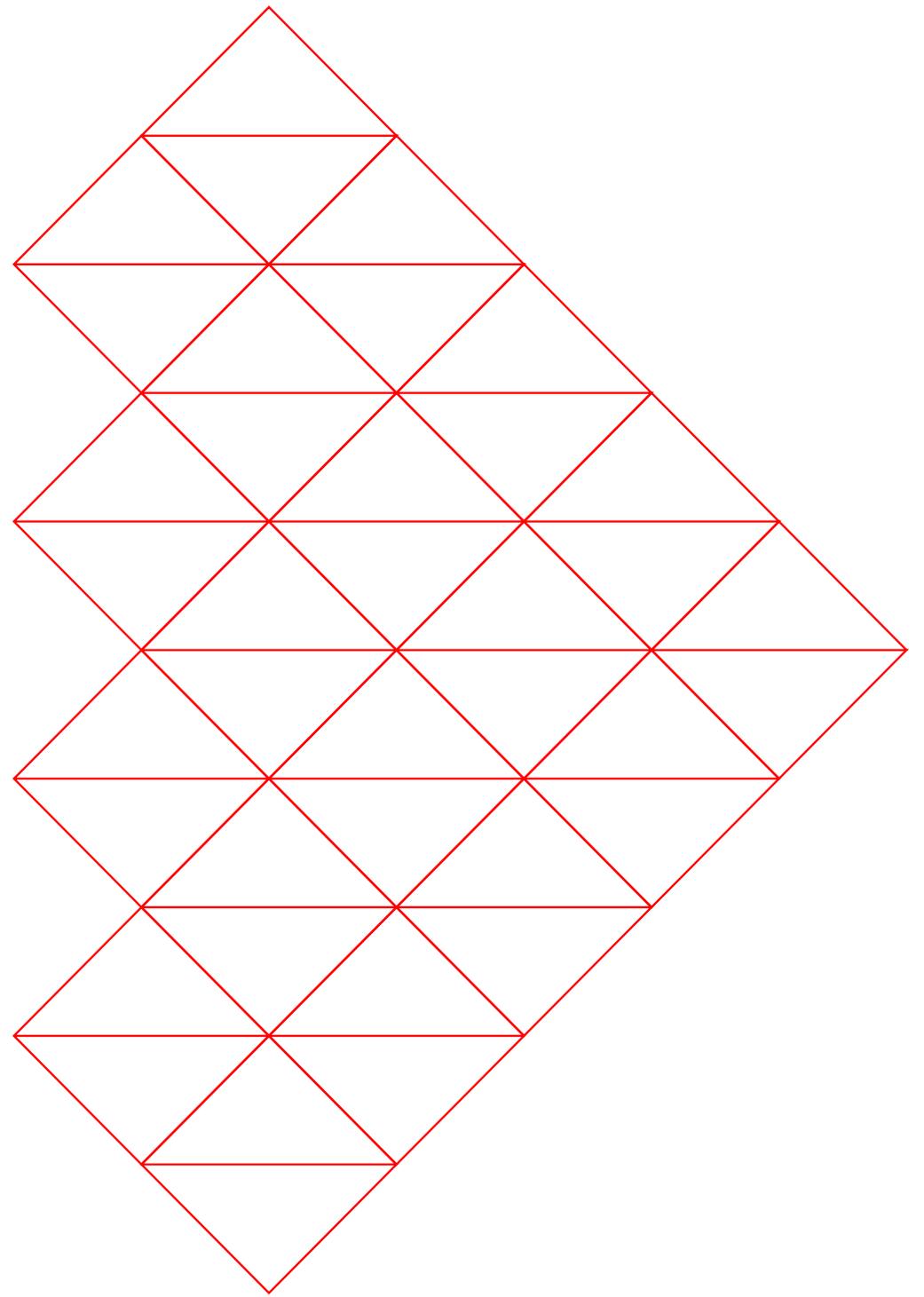
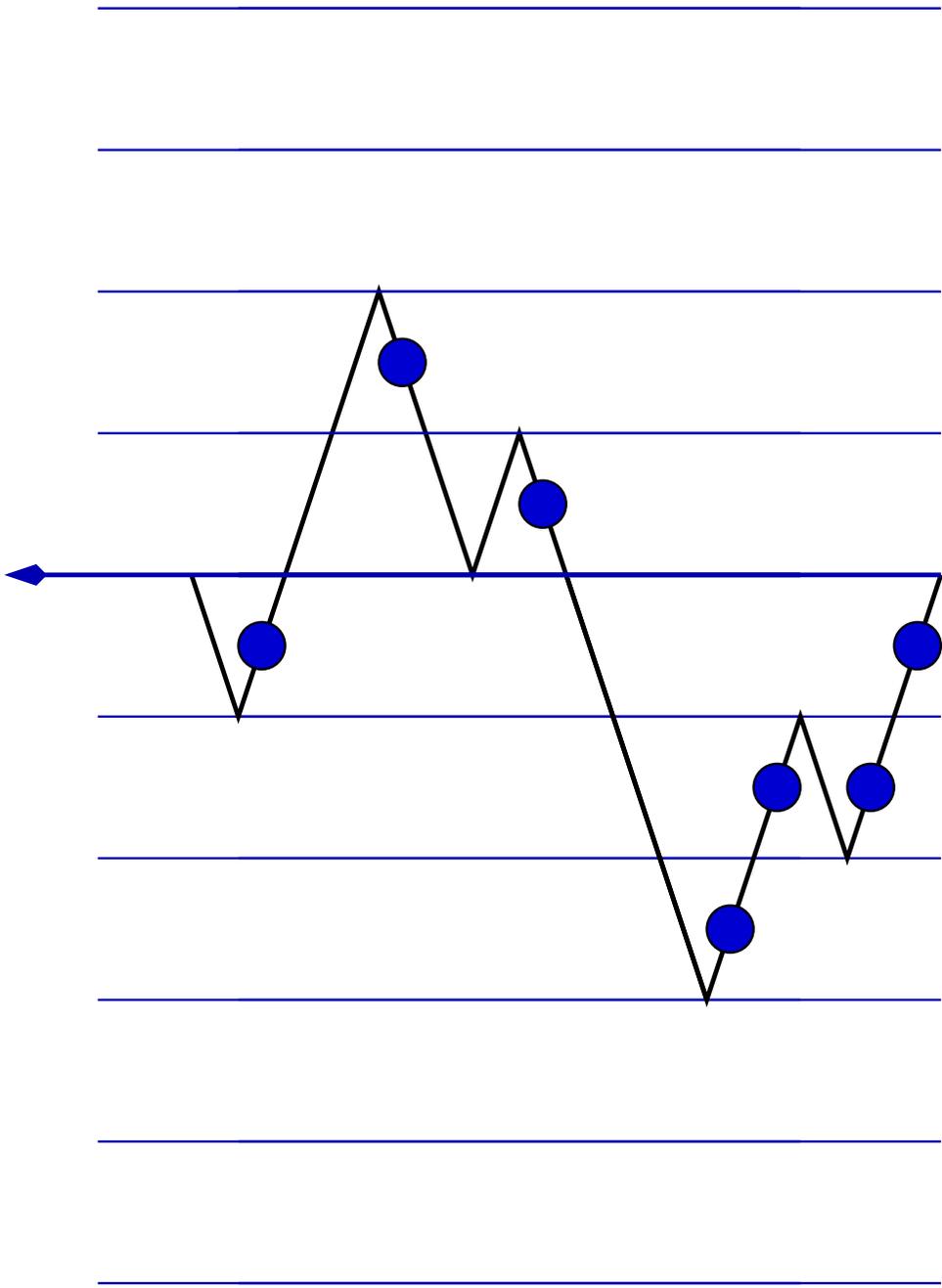
[Dhar 83]

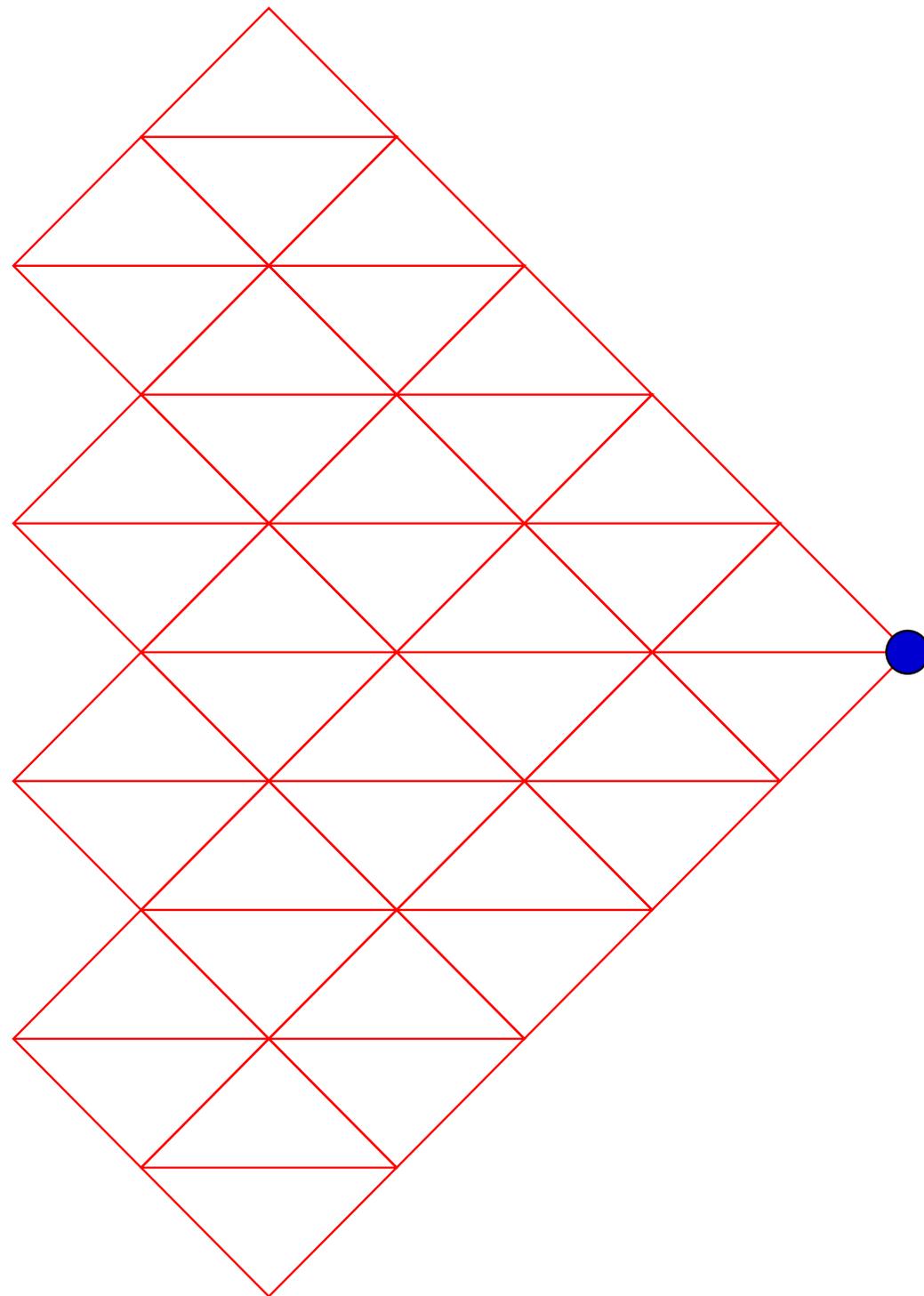
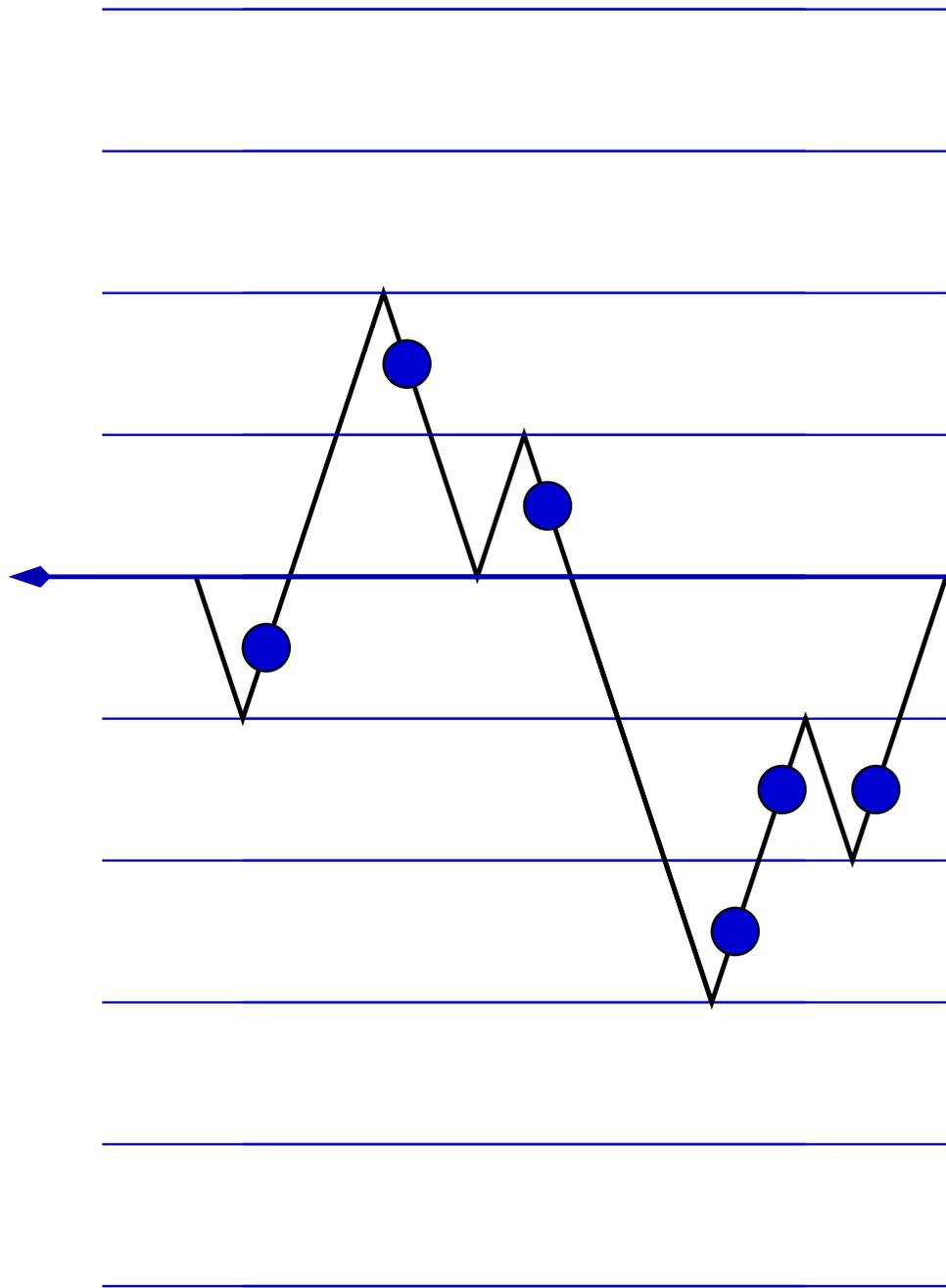
Preuve bijective ?

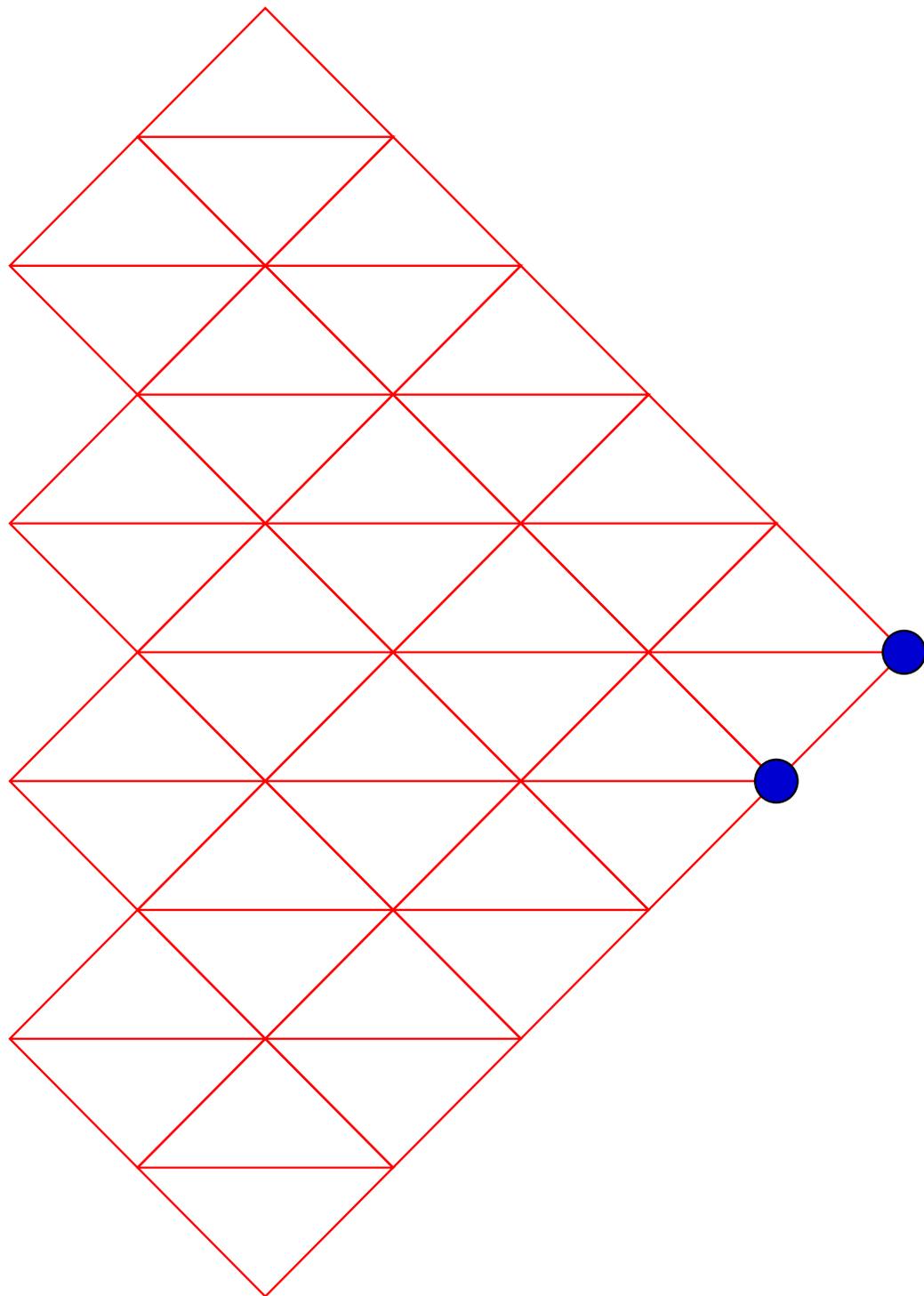
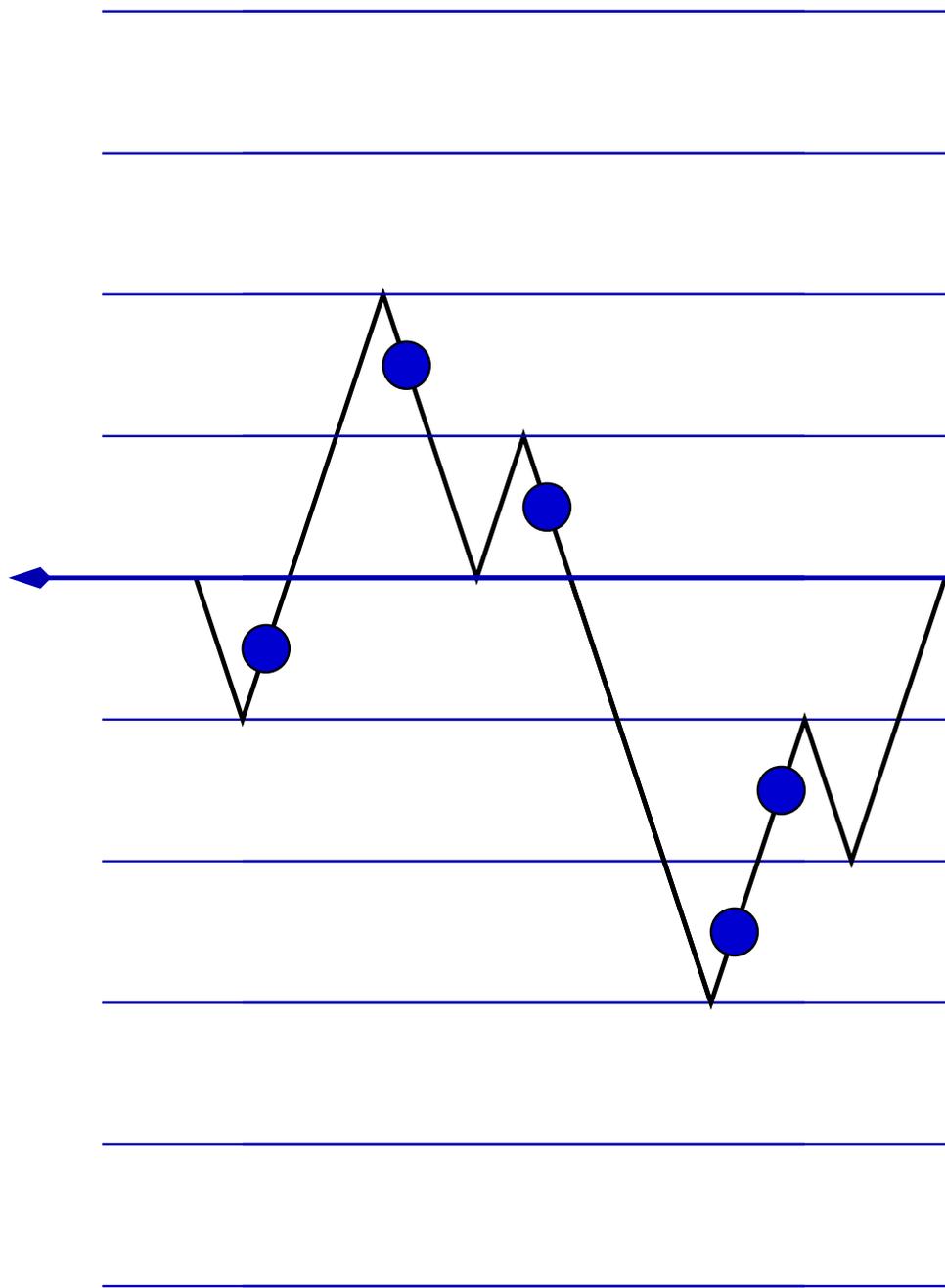
$a_n = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} =$ Nombre de chemins formés de n pas Nord et n pas Sud, commençant par un pas Nord.

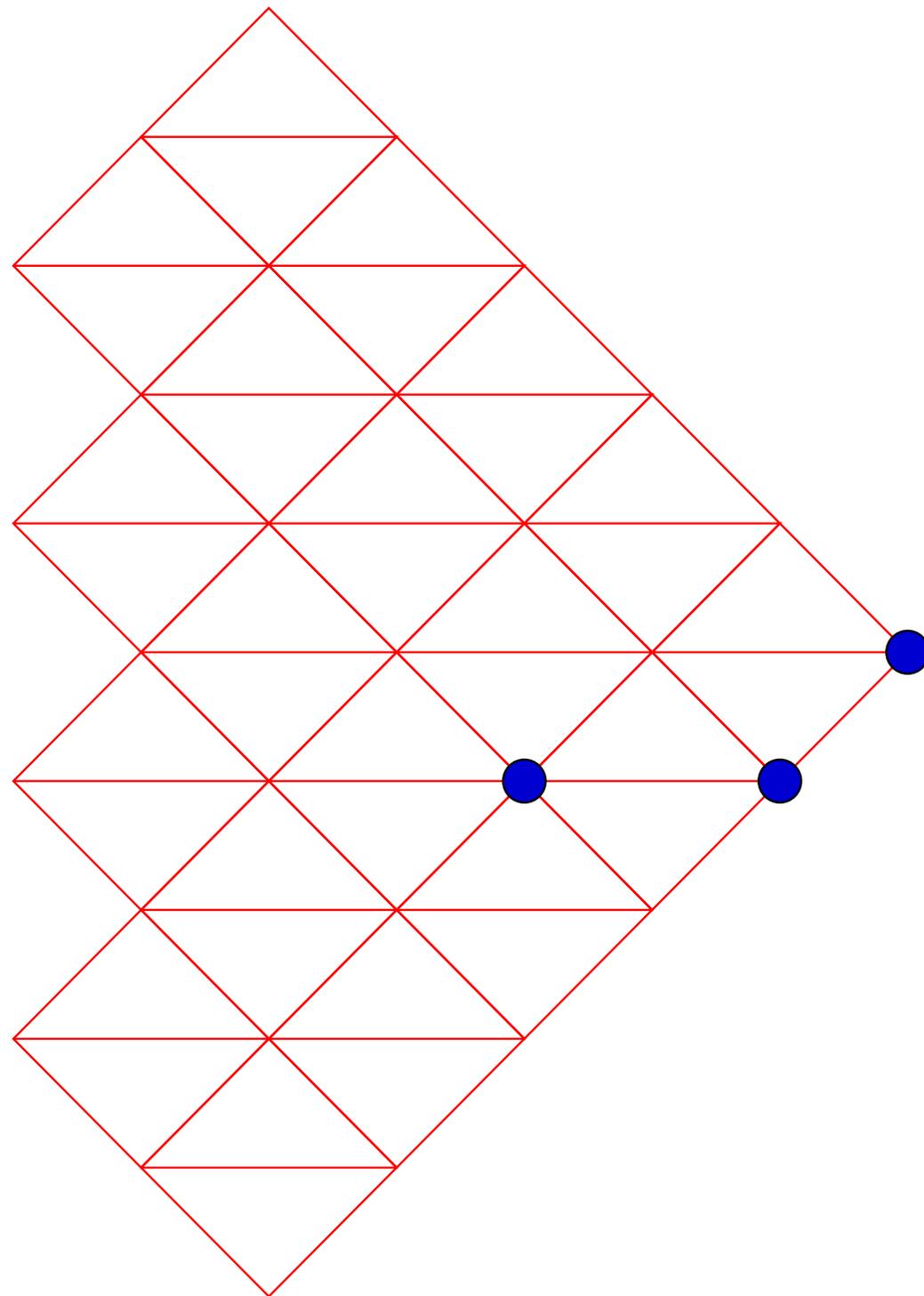
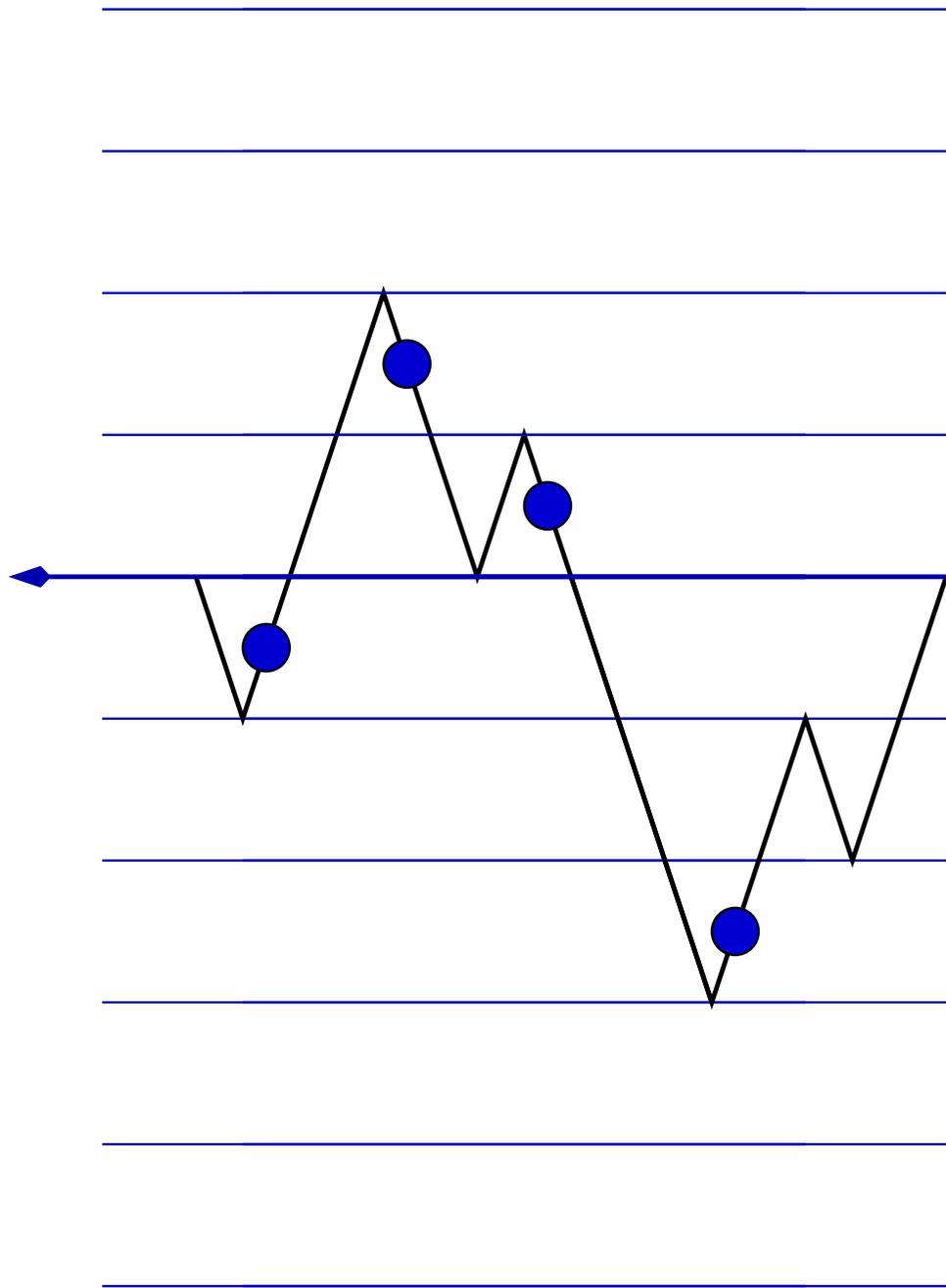


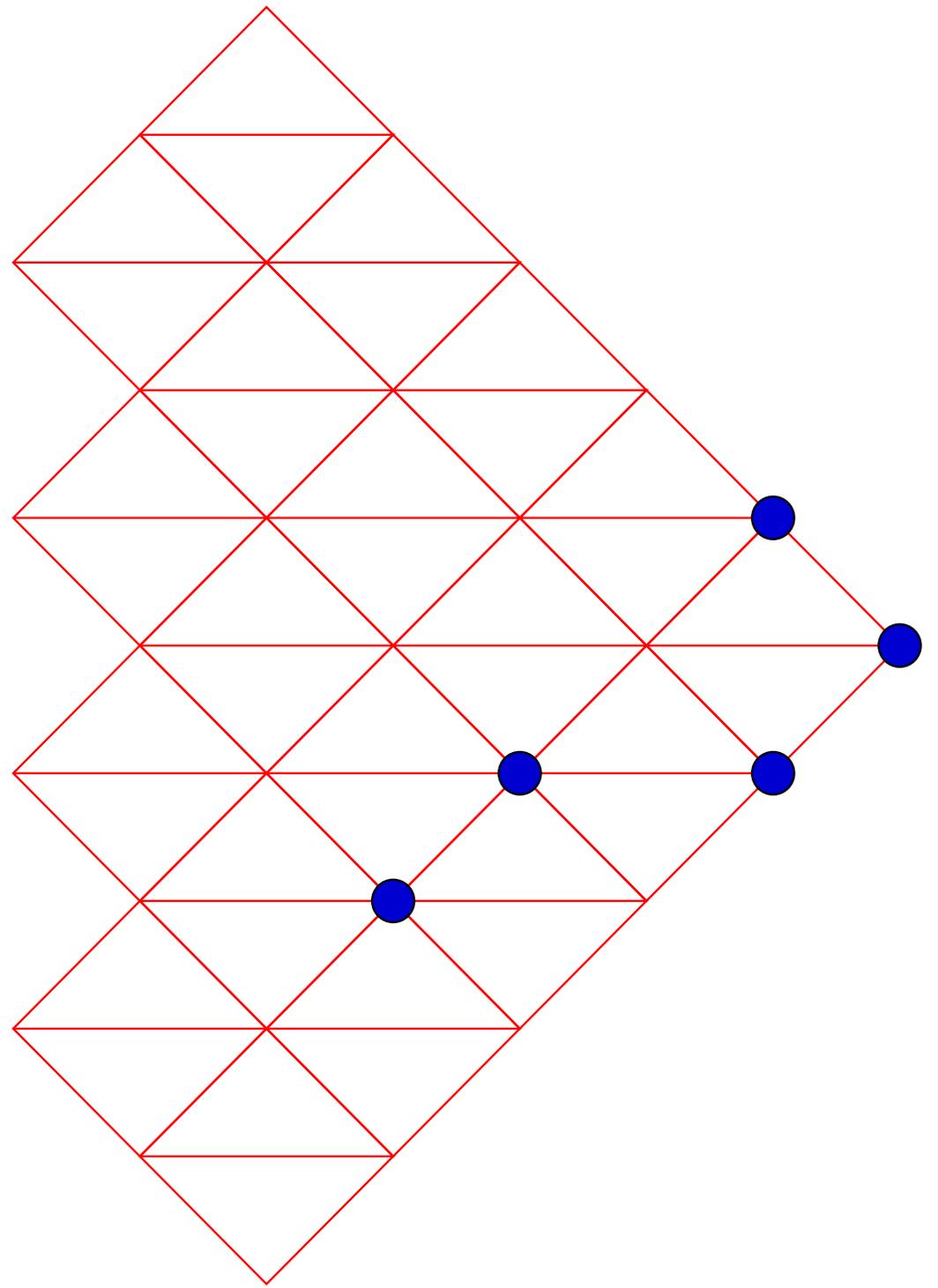
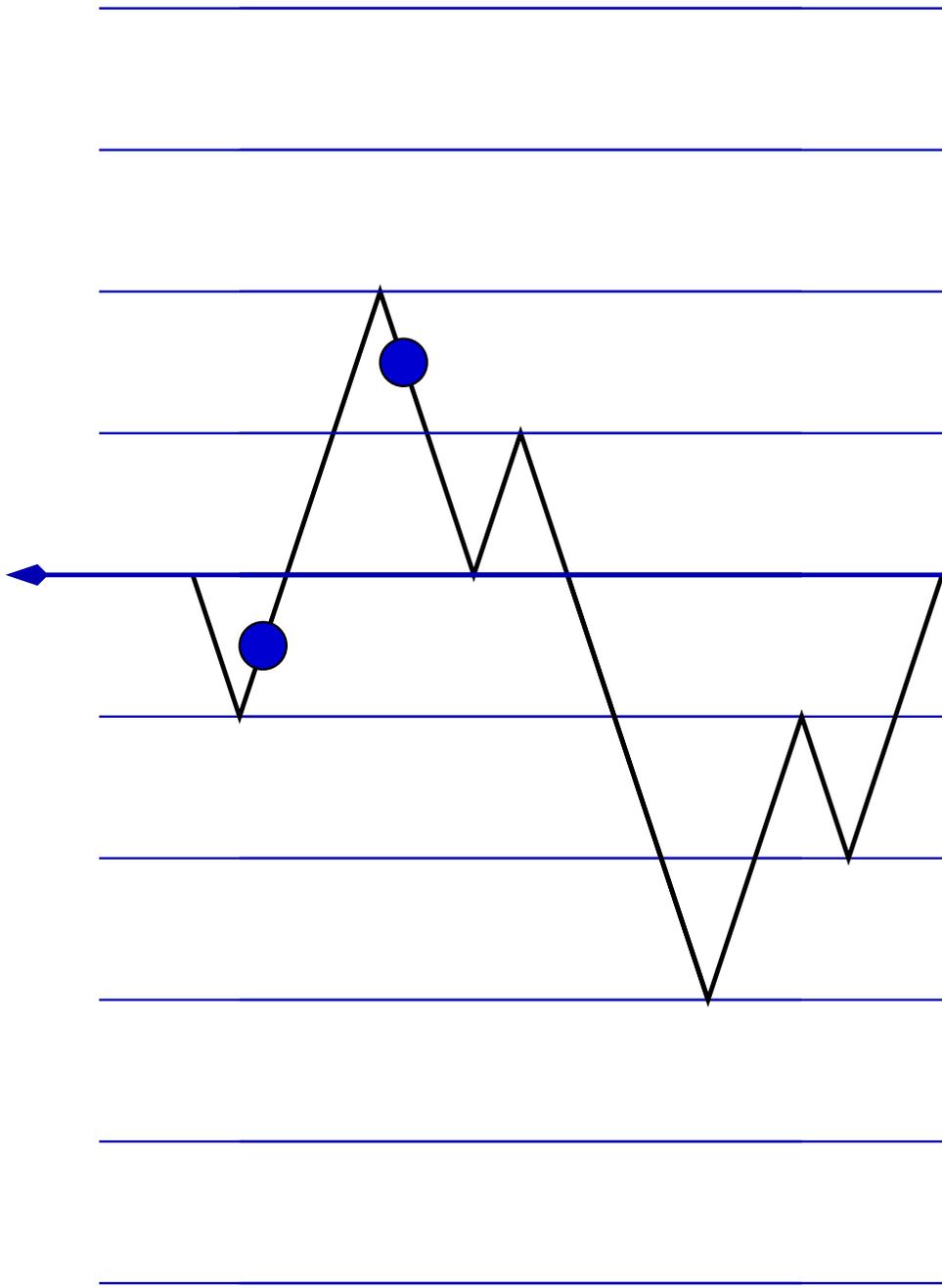












Séries algébriques

- La série formelle $A(t)$ est **algébrique** (sur $\mathbb{Q}(t)$) si elle satisfait une équation polynomiale (non-triviale) :

$$P(t, A(t)) = 0.$$

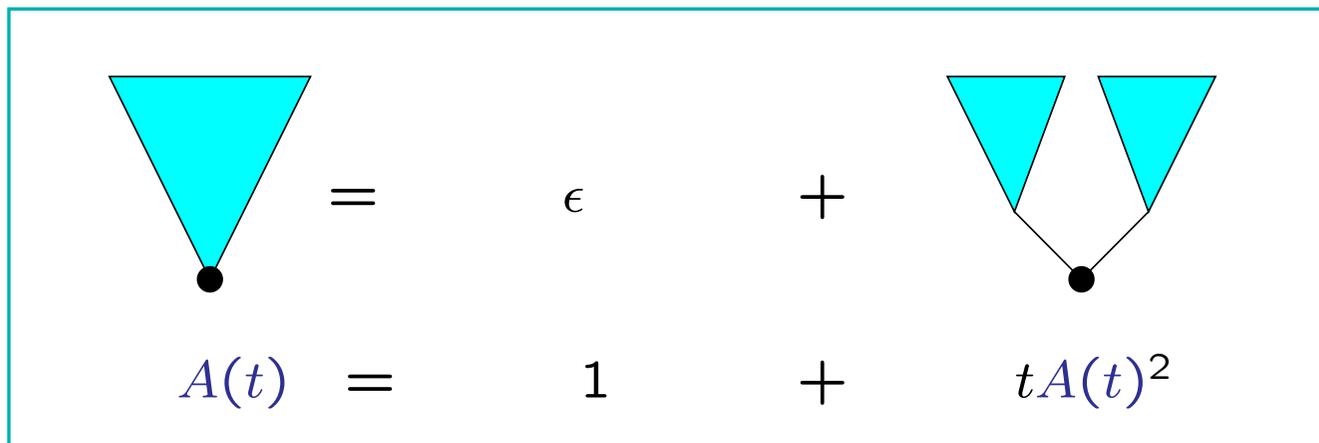
- Généralisation à plusieurs variables :

$$P(t, u, A(t, u)) = 0.$$

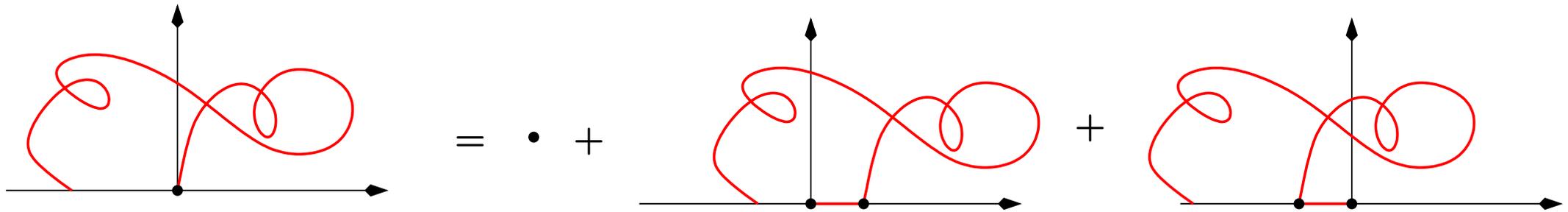
Séries génératrices algébriques : intuition combinatoire

En (très) gros :

“Une classe d’objets a une série génératrice algébrique si ces objets ont une **structure algébrique** : ils admettent une description récursive basée sur la **concatenation** d’objets de même type plus petits.


$$\begin{array}{c} \text{Diagram of a cyan inverted triangle with a black dot at its apex} \\ A(t) \end{array} = \epsilon + \begin{array}{c} \text{Diagram of two cyan inverted triangles joined at their apexes by two lines} \\ tA(t)^2 \end{array}$$

Chemins dans un demi-plan : approche récursive



$C(t)$

$= 1 +$

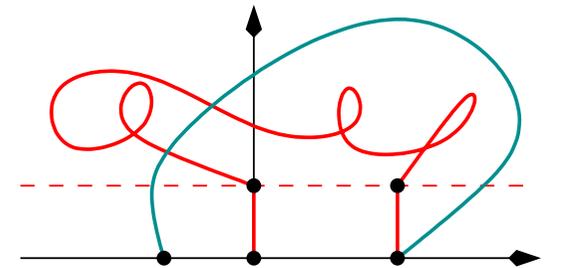
$tC(t)$

$+$

$tC(t)$

$$c_n = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$$

$+$



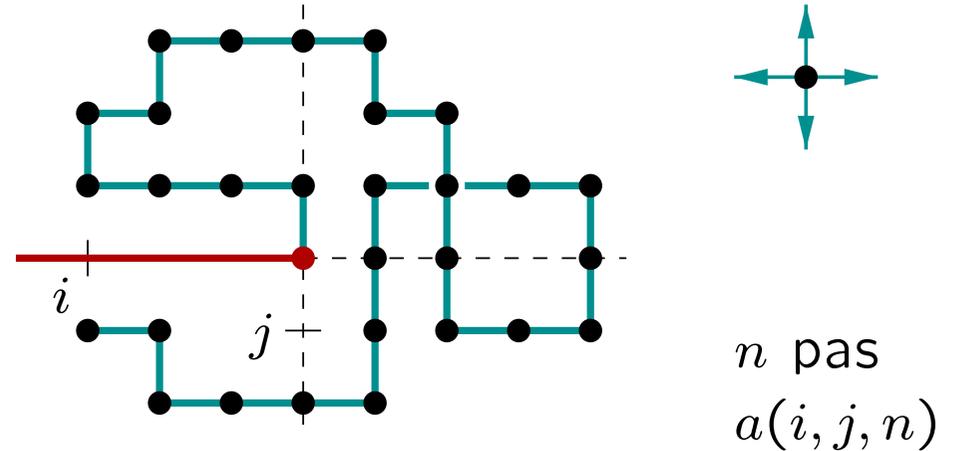
$+$

$t^2C(t)^2$

Quelques mystères algébriques

Chemins dans un plan incisé

$$S(u, v, t) := \sum_{i,j,n} a(i, j, n) u^i v^j t^n$$



- Pourquoi $S(u, v; t)$ est-elle algébrique ? Soit $\bar{u} = 1/u$ et $\bar{v} = 1/v$. Alors

$$S(u, v; t) = \frac{\left(1 - 2t(1 + \bar{u}) + \sqrt{1 - 4t}\right)^{1/2} \left(1 + 2t(1 - \bar{u}) + \sqrt{1 + 4t}\right)^{1/2}}{1 - t(u + \bar{u} + v + \bar{v})}$$

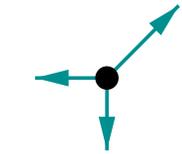
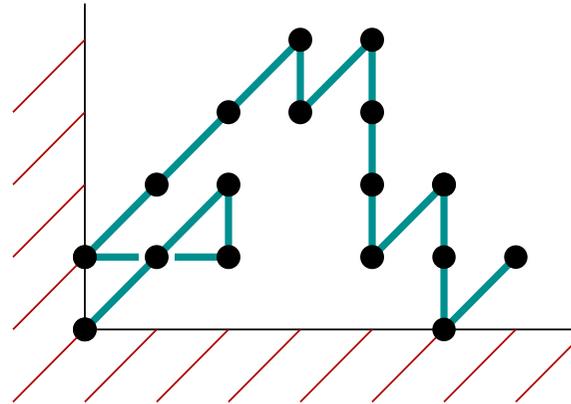
- Pourquoi $S_{i,j}(t) := \sum_n a(i, j; n) t^n$ est-elle algébrique pour tous i et j ?

$$a(1, 0; 2n + 1) = C_{2n+1}, \quad a(0, 1; 2n + 1) = 4^n C_n, \quad a(-1, 1; 2n) = C_{2n} \dots$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = n^{\text{ème}} \text{ nombre de Catalan}$$

Chemins “de Kreweras” dans un quart de plan

$$Q(t) := \sum_n a(n)t^n$$



n pas
 $a(n)$

- Pourquoi $Q(t)$ est-elle algébrique ? Soit $W = t(2 + W^3)$. Alors

$$Q(t) = 2 \frac{(1/W - 1)\sqrt{1 - W^2}}{1 - 3t} - \frac{1}{t}.$$

- Pourquoi $a(i, 0; n)$, le nombre de chemins finissant en $(i, 0)$, est-il si simple ?

$$a(i, 0; 3n + 2i) = \frac{4^n(2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n}$$

[Kreweras 65], [Niederhausen 83], [Gessel 86],
[MBM 04], [Bernardi 05, in preparation]

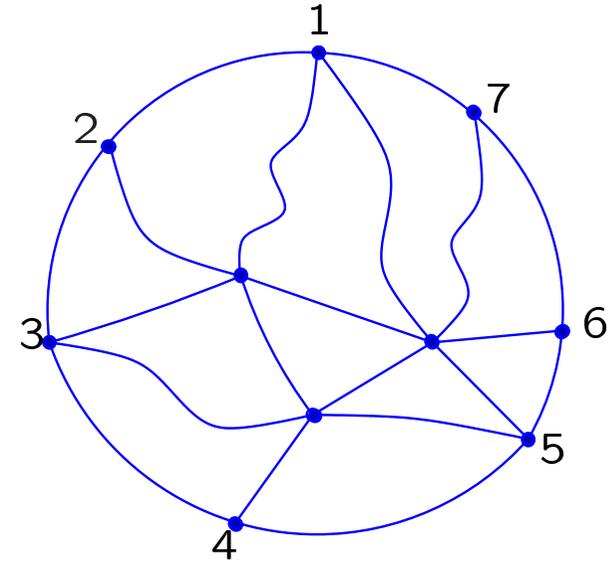
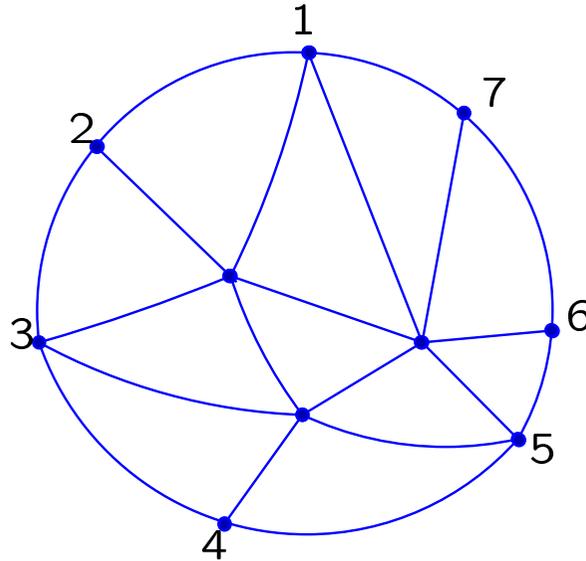
Triangulations d'un polygone

Polygone à i côtés

n triangles

$a(i, n)$

$$A(u; t) = \sum_{i,n} a(i, n) u^i t^n$$



- Pourquoi $A(u; t)$ est-elle algébrique ?

Soit $U \equiv U(t) = t + O(t^2)$ tq. $U = t + 2U^3$. Alors

$$A(u; t) = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{t} - 1 - \left(\frac{u}{U} - 1 \right) \sqrt{1 - 4uU^2/t} \right).$$

- Pourquoi $a(i, n)$ est-il si simple ?

$$a(i + 2, 2n + i) = \frac{2^n (2i + 1)}{(n + i + 1)(2n + 2i + 1)} \binom{2i}{i} \binom{3n + 2i}{n}$$