

Petit patchwork de combinatoire énumérative

Mireille Bousquet-Mélou, CNRS, LaBRI, Bordeaux

<http://www.labri.fr/~bousquet>

Autour de la CE

A. Énumération asymptotique

B. Un peu de divination ; séries algébriques, séries holonomes

C. Preuves automatiques d'identités combinatoires (hypergéométriques)

A. Un peu d'asymptotique

L'art de compter

COMPTER [κ ò t e]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de \Rightarrow chiffrer, dénombrer, nombrer. *Compter les moutons.*

Problème générique

\mathcal{A} ensemble des moutons

\mathcal{A}_n ensemble des moutons à n pattes

Question

estimer, évaluer, caractériser le nombre

$$a_n = |\mathcal{A}_n|.$$

L'art de compter... approximativement

COMPTER [$\kappa \tilde{o} t e$]. I. V. tr. 1. Déterminer (une quantité) par le calcul ; spécialt. Établir le nombre de \Rightarrow chiffrer, dénombrer, nombrer. *Compter les moutons.*

Problème générique

\mathcal{A} ensemble des moutons

\mathcal{A}_n ensemble des moutons à n pattes

Question

estimer

$$a_n = |\mathcal{A}_n|.$$

$$a_n \sim f_n, \quad a_n = O(f_n), \quad a_n \leq f_n$$

où f_n est une fonction "simple" de n .

Pourquoi faire de l'énumération approchée ?

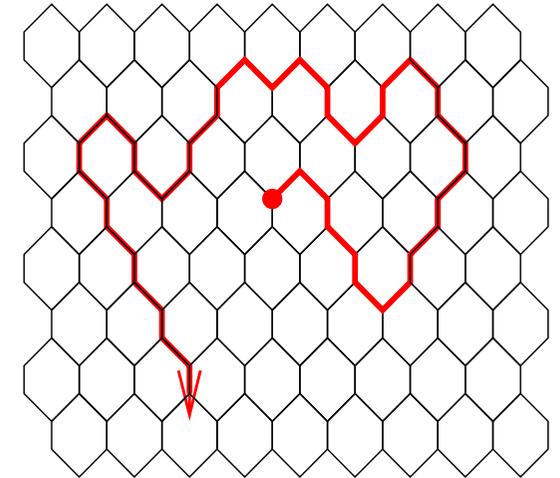
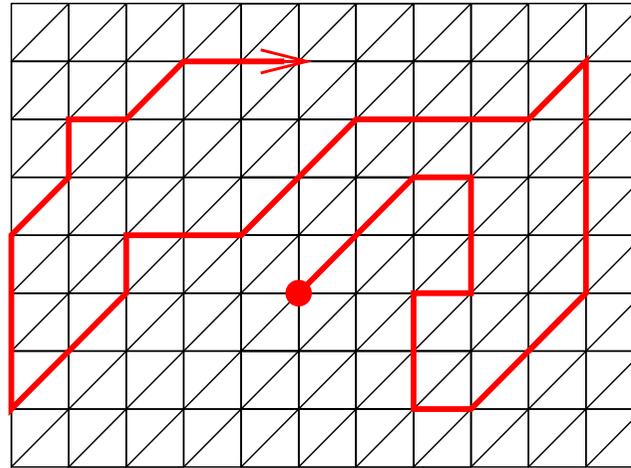
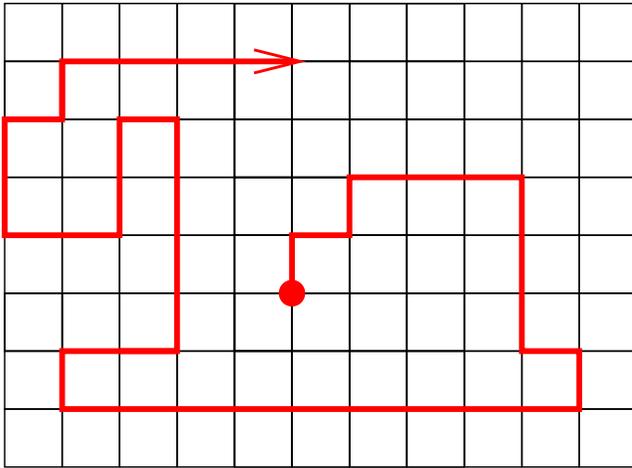
- C'est moins dur que l'énumération exacte

Pourquoi faire de l'énumération approchée ?

(même quand on sait faire de l'énumération exacte...)

- C'est moins dur
- C'est (parfois) plus informatif

Chemins auto-évitants : universalité



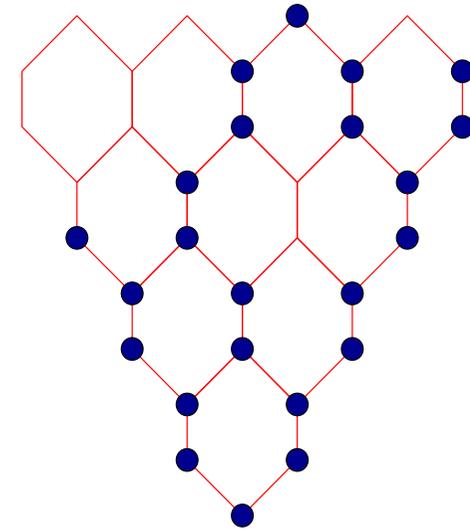
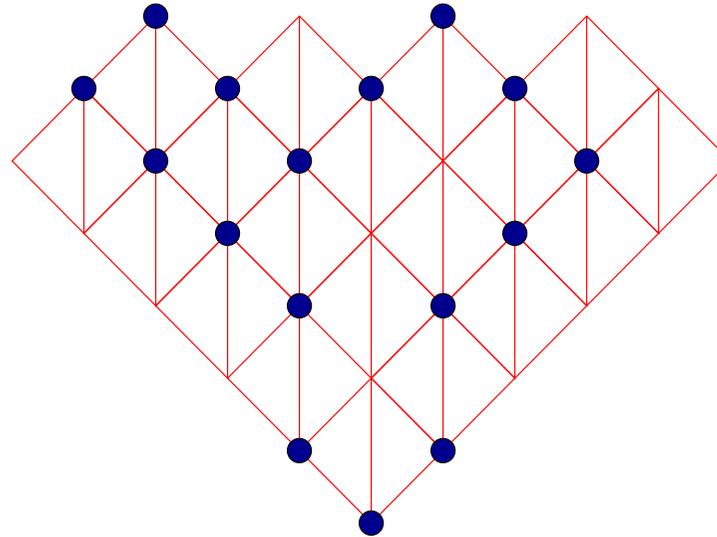
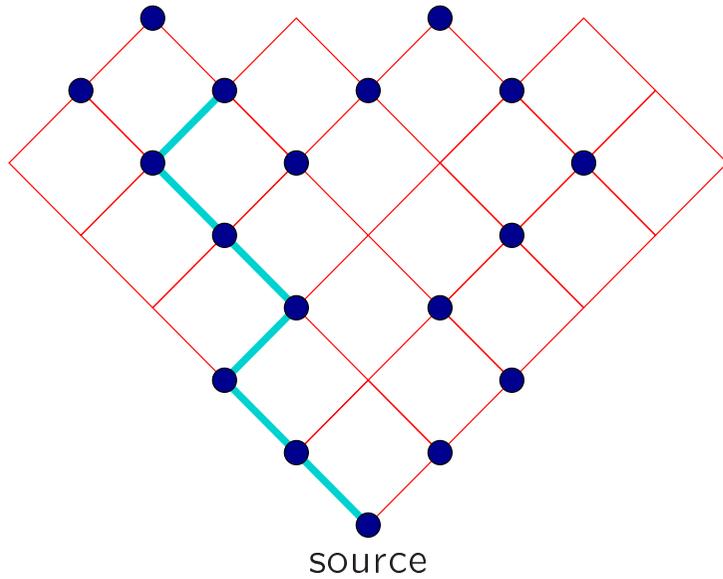
Conjecture :

$$a_n^{(c)} \sim \kappa_c \mu_c^n n^{11/32}$$

$$a_n^{(t)} \sim \kappa_t \mu_t^n n^{11/32}$$

$$a_n^{(h)} \sim \kappa_h \mu_h^n n^{11/32} \quad \text{avec} \quad \mu_h = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Animaux dirigés : universalité



Théorème : Énumération exacte

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n^{(c)} \sim \kappa_c 3^n n^{-1/2} \\ a_n^{(t)} \sim \kappa_t 4^n n^{-1/2} \end{cases}$$

Conjecture :

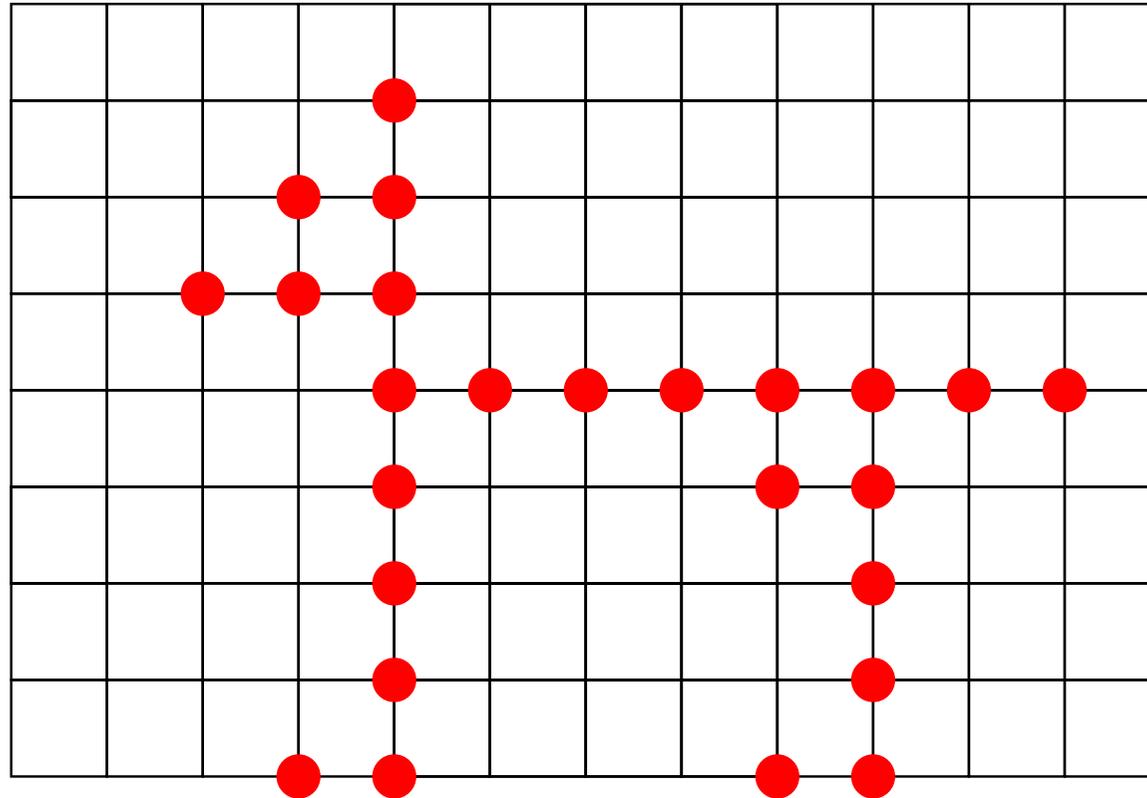
$$a_n^{(h)} \sim \kappa_h \mu^n n^{-1/2}$$

Pourquoi faire de l'énumération approchée ?

(même quand on sait faire de l'énumération exacte...)

- C'est moins dur
- C'est (parfois) plus informatif
- Pour comparer des classes d'objets

Animaux sur réseau



Un animal sur le réseau carré

Encore des animaux...

- Pour une famille plus générale que les animaux dirigés (sur réseau carré)

$$A(t) = \frac{Q}{(1-Q) \left[1 - \sum_{k \geq 1} \frac{Q^{k+1}}{1 - Q^k(1+Q)} \right]},$$

où

$$Q(t) = \frac{1 - t - \sqrt{(1+t)(1-3t)}}{2t}$$

est la SG de *certain*s animaux dirigés.

Encore des animaux...

- Pour une famille plus générale que les animaux dirigés (sur réseau carré)

$$A(t) = \frac{Q}{(1-Q) \left[1 - \sum_{k \geq 1} \frac{Q^{k+1}}{1 - Q^k(1+Q)} \right]},$$

où

$$Q(t) = \frac{1 - t - \sqrt{(1+t)(1-3t)}}{2t}$$

est la SG des animaux dirigés.

- Asymptotique ?

$$a_n \sim \kappa \mu^n \quad \text{avec } \mu = 3.58789436\dots$$

Encore des animaux...

- Pour une famille plus générale que les animaux dirigés (sur réseau carré)

$$A(t) = \frac{Q}{(1-Q) \left[1 - \sum_{k \geq 1} \frac{Q^{k+1}}{1 - Q^k(1+Q)} \right]},$$

où

$$Q(t) = \frac{1-t - \sqrt{(1+t)(1-3t)}}{2t}$$

est la SG des animaux dirigés.

- Asymptotique ?

$$a_n \sim \kappa \mu^n \quad \text{avec } \mu = 3.58789436\dots$$

- À comparer avec

– les animaux dirigés $\kappa 3^n / \sqrt{n}$



Encore des animaux...

- Pour une famille plus générale que les animaux dirigés (sur réseau carré)

$$A(t) = \frac{Q}{(1-Q) \left[1 - \sum_{k \geq 1} \frac{Q^{k+1}}{1 - Q^k(1+Q)} \right]},$$

où

$$Q(t) = \frac{1-t - \sqrt{(1+t)(1-3t)}}{2t}$$

est la SG des animaux dirigés.

- Asymptotique ?

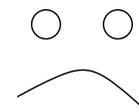
$$a_n \sim \kappa \mu^n \quad \text{avec } \mu = 3.58789436\dots$$

- À comparer avec

– les animaux dirigés $\kappa 3^n / \sqrt{n}$



– les animaux généraux $\kappa \mu^n / n$ où $\mu \simeq 4.06\dots$



Pourquoi faire de l'énumération approchée ?

(même quand on sait faire de l'énumération exacte...)

- C'est moins dur
- C'est (parfois) plus informatif
- Pour comparer des classes d'objets
- Pour comprendre à quel point une condition est contraignante

Permutations à motifs exclus

- Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ une (longue) permutation et $\tau = \tau_1\cdots\tau_k$ une (petite) permutation. On dit que τ est un **motif** de σ s'il existe dans σ une sous-suite $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ de même forme que τ .

Exemple : la permutation $\sigma = 8 \ 6 \ 3 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 2 \ 9$ contient le motif $\tau = 3 \ 4 \ 2 \ 1$.

Permutations à motifs exclus

- Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ une (longue) permutation et $\tau = \tau_1\cdots\tau_k$ une (petite) permutation. On dit que τ est un **motif** de σ s'il existe dans σ une sous-suite $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ de même forme que τ .

Exemple : la permutation $\sigma = 8 \ 6 \ 3 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 2 \ 9$ contient le motif $\tau = 3 \ 4 \ 2 \ 1$.

- **Question** : étant donné τ , combien de permutations de longueur n évitent le motif τ ?
- **Résultats exacts** : pour τ de longueur ≤ 4 (sauf 1324...), et $\tau = 12\cdots k$.

Permutations à motifs exclus

- Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ une (longue) permutation et $\tau = \tau_1\cdots\tau_k$ une (petite) permutation. On dit que τ est un **motif** de σ s'il existe dans σ une sous-suite $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ de même forme que τ .

Exemple : la permutation $\sigma = 8 \ 6 \ 3 \ 5 \ 7 \ 1 \ 4 \ 2 \ 9$ contient le motif $\tau = 3 \ 4 \ 2 \ 1$.

- **Question** : étant donné τ , combien de permutations de longueur n évitent le motif τ ?
- **Résultats exacts** : pour τ de longueur ≤ 4 (sauf 1324...), et $\tau = 12\cdots k$.
- **Théorème [Marcus-Tardos 04]** : pour tout motif τ , il existe une constante μ telle que le nombre de permutations de longueur n évitant le motif τ soit borné par μ^n .

(Conjecturé vers 1992 par Stanley et Wilf.)

Rappel : il y a $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ permutations de longueur n

Pourquoi faire de l'énumération approchée ?

(même quand on sait faire de l'énumération exacte...)

- C'est moins dur
- C'est (parfois) plus informatif
- Pour comparer des classes d'objets
- Pour comprendre à quel point une condition est contraignante
- Pour prouver qu'une série est transcendante (ou non-holonome, ou...)

Coefficients d'une série algébrique

- **Théorème** : Si la série $\sum_n a(n)t^n$ est **algébrique**, alors, “typiquement” :

$$a(n) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(\gamma + 1)} \mu^n n^\gamma$$

où α et μ sont des nombres algébriques (sur \mathbb{Q}), et $\gamma \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.

- **Application** : chemins dans le quart de plan

Exo : Le nombre de chemins dans le quart de plan partant et finissant en $(0, 0)$, faisant des pas N, S, E et O, est

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \sum_k \binom{2n}{2k} C_k C_{n-k} = C_n C_{n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+4)} \binom{2n+2}{n+1}^2 \sim \frac{4^{2n+1}}{\pi n^3} \end{aligned}$$

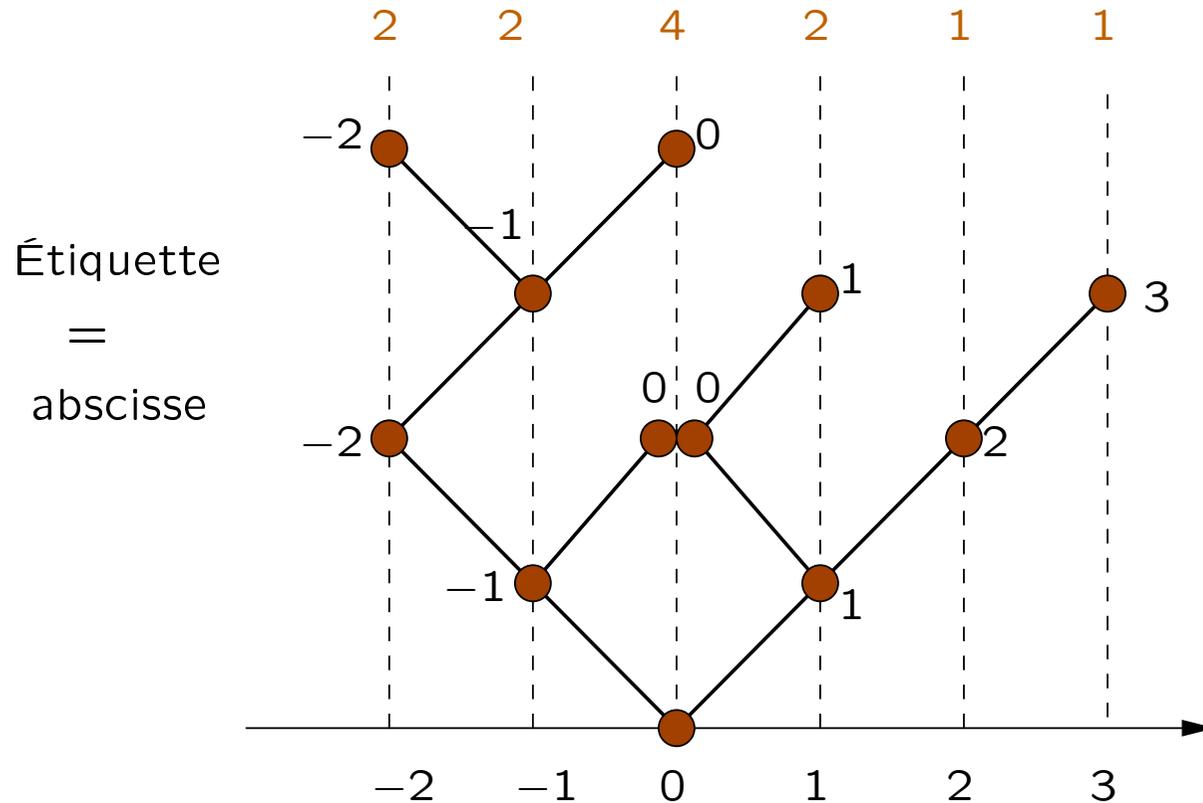
⇒ La série génératrice associée est donc **transcendante**.

Pourquoi faire de l'énumération approchée ?

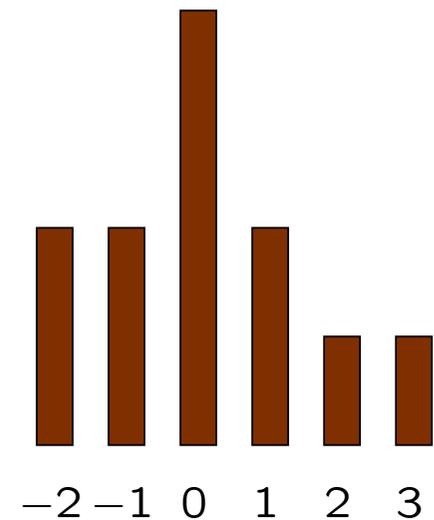
(même quand on sait faire de l'énumération exacte...)

- C'est moins dur
- C'est (parfois) plus informatif
- Pour comparer des classes d'objets
- Pour comprendre à quel point une condition est contraignante
- Pour prouver qu'une série est transcendante (ou non-holonome, ou...)
- Pour établir des résultats sur des modèles limites continus

Arbres binaires plongés dans \mathbb{Z}



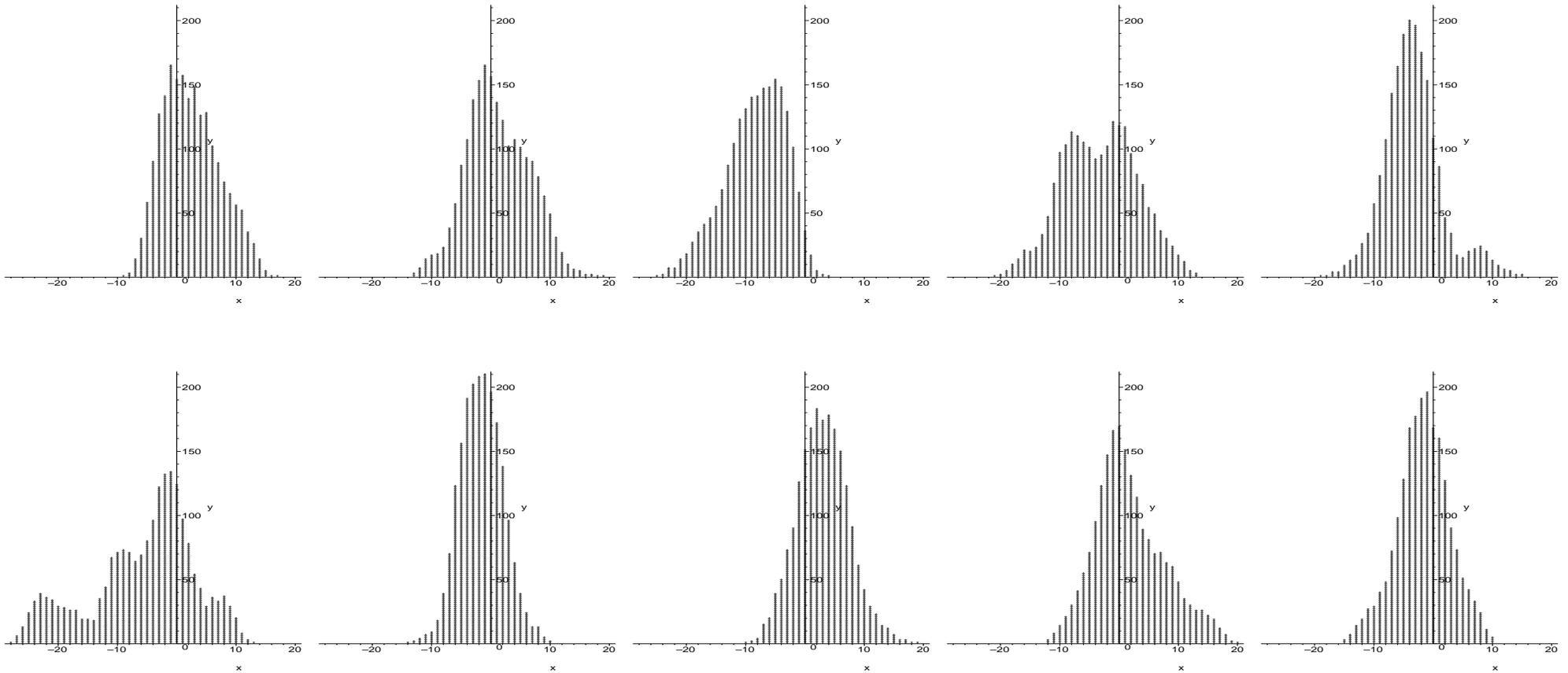
Histogramme
ou profil vertical



Distribution de probabilités associée à l'arbre :

$$(\mathbb{P}(X = i))_{-2 \leq i \leq 2} = \left(\frac{2}{12}, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \right)$$

Galerie de profils verticaux

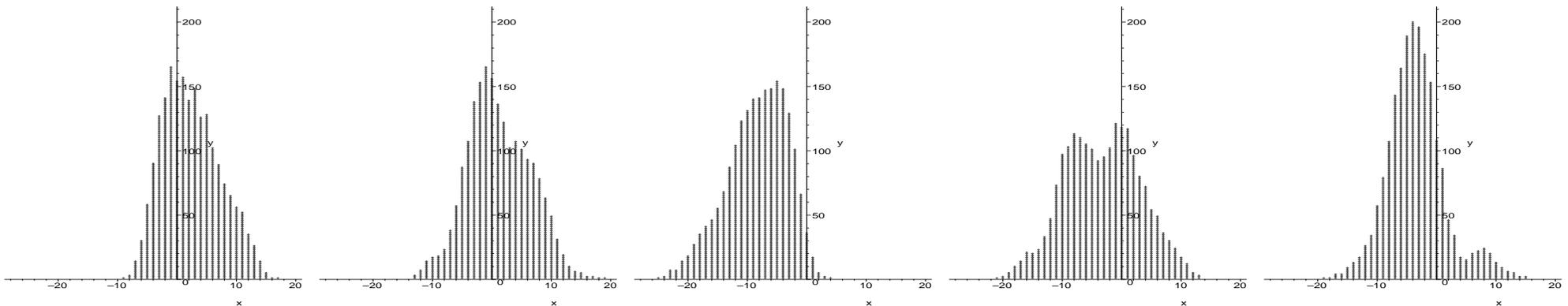


Profils verticaux d'arbres binaires aléatoires à 1000 nœuds.

Limite continue

Lorsque l'arbre est choisi aléatoirement et uniformément parmi tous les arbres à n sommets, la distribution de probabilités associée devient elle-même aléatoire (puisque'elle dépend de l'arbre).

Convenablement normalisée, elle converge vers une distribution aléatoire continue appelée **ISE** (Integrated SuperBrownian Excursion) [JF Le Gall].



⇒ Étudier les arbres binaires pour étudier ISE

Le nombre de nœuds à l'abscisse j

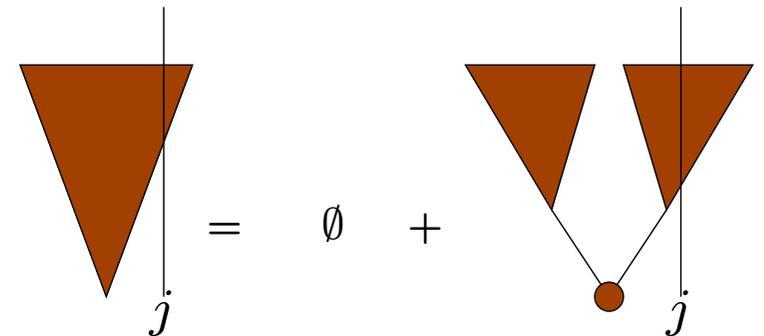
Soit $V_j \equiv V_j(t, u)$ la série génératrice des arbres binaires, comptés selon leur taille (variable t) et le nombre de nœuds à l'abscisse j (variable u) :

$$V_j(t, u) = \sum_{n, k} v(n, k) t^n u^k$$

où $v(n, k)$ est le nombre d'arbres binaires à n nœuds dont k sont à l'abscisse j .
Alors

$$V_0 = 1 + utV_1^2$$

Pour $j \geq 0$,
$$V_j = 1 + tV_{j+1}V_{j-1}$$



Il n'y a pas de raison particulière pour que V_j soit algébrique. Mais...

Le nombre de nœuds à l'abscisse j

Soit $V_j \equiv V_j(t, u)$ la série génératrice des arbres binaires, comptés selon le nombre de nœuds (variable t) et le nombre de nœuds à l'abscisse j (variable u).

Proposition [mbm 04]: les séries V_j sont algébriques. De plus,

$$V_j = A \frac{(1 + MZ^j)(1 + MZ^{j+5})}{(1 + MZ^{j+2})(1 + MZ^{j+3})}$$

où A est la série génératrice des arbres binaires,

$$Z = t \frac{(1 + Z^2)^2}{(1 - Z + Z^2)},$$

et $M \equiv M(t, u)$ est l'unique série en t telle que

$$M = (u - 1) \frac{Z(1 + MZ)^2(1 + MZ^2)(1 + MZ^6)}{(1 + Z)^2(1 + Z + Z^2)(1 - Z)^3(1 - M^2Z^5)}.$$

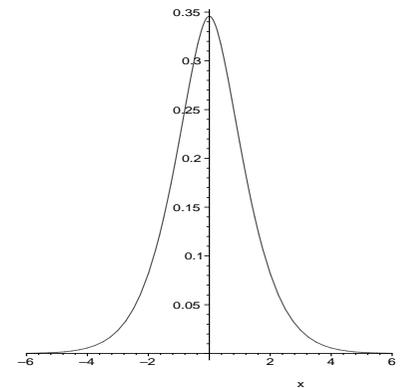
Le profil vertical moyen d'un arbre binaire

Proposition : Le nombre moyen de nœuds à l'abscisse $\lfloor \lambda n^{1/4} \rfloor$ dans un arbre binaire à n nœuds est équivalent à

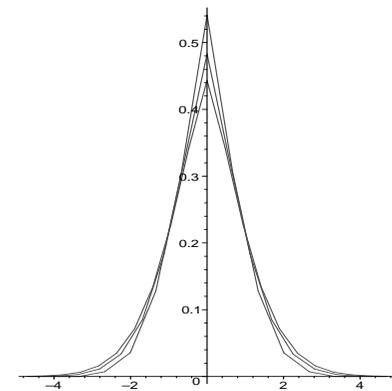
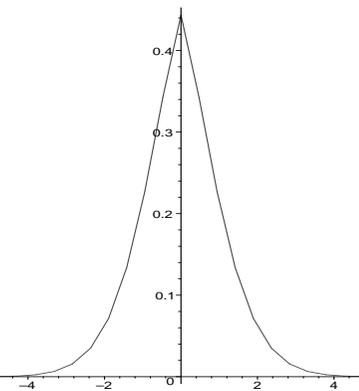
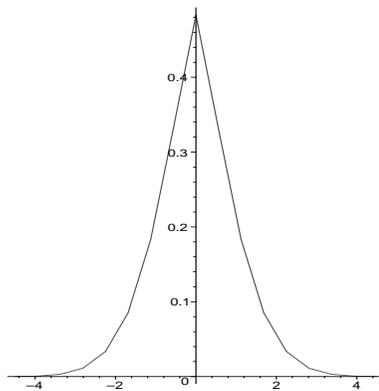
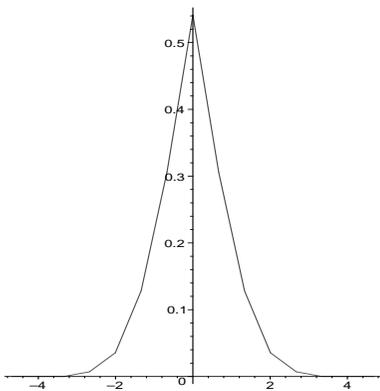
$$n^{3/4} \Phi(\lambda)$$

avec

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \geq 0} \frac{(-\sqrt{2}|\lambda|)^m}{m!} \cos \frac{(m+1)\pi}{4} \Gamma\left(\frac{m+3}{4}\right).$$



Profil vertical moyen d'arbres binaires de taille 5, 10, 20 :



Le nombre de nœuds d'abscisse 0

Théorème [mbm 04] : Soit $Y_n(0)$ le nombre de nœuds d'abscisse 0 dans un arbre binaire aléatoire à n nœuds. La variable aléatoire

$$\frac{Y_n(0)}{n^{3/4}},$$

donnant le nombre (normalisé) de nœuds d'abscisse 0, converge en loi vers une variable $Y(0)$, dont les moments sont :

$$E(Y(0)^k) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^k \frac{\Gamma(1 + 3k/4)}{\Gamma(1 + k/2)}.$$

“Donc”

$$Y(0) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{T_{2/3}}},$$

où $T_{2/3}$ suit une loi stable unilatérale de paramètre $2/3$.

$$E(e^{-aT_{2/3}}) = e^{-a^{2/3}} \text{ pour } a \geq 0.$$

- Résultats analogues pour $Y_n(\lfloor \lambda n^{1/4} \rfloor) \Rightarrow$ loi de la densité d'ISE en un point.

Comment faire de l'énumération approchée ? (quand on sait faire de l'énumération exacte...)

- À partir d'une expression de a_n

Exemple :

$$a_n = \sum_j \binom{n}{j} \binom{n}{j+k} \binom{2j+k}{j-\ell} = \frac{3^{3/2} 9^n}{4\pi n} (1 + O(1/n)).$$

- À partir d'une expression de la série génératrice $A(t) = \sum_n a_n t^n$, ou d'une équation fonctionnelle qu'elle satisfait

⇒ Outils d'analyse complexe

- Références

Odlyzko, A. M., Asymptotic enumeration methods, Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2, 1995, <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/enumeration.html>

Ph. Flajolet, R. Sedgewick, Analytic Combinatorics.

<http://pauillac.inria.fr/algo/flajolet/Publications/books.html>

Principe de base

Considérer la SG $A(z) = \sum_n a_n z^n$ comme une fonction de la variable complexe z et se pencher sur ses **singularités** (les points où elle cesse d'être holomorphe).

Exemple : le rayon de convergence de $A(z)$ est R ssi $\limsup a_n^{1/n} = 1/R$. Donc pour tout $\epsilon > 0$

$$a_n \leq (1/R + \epsilon)^n$$

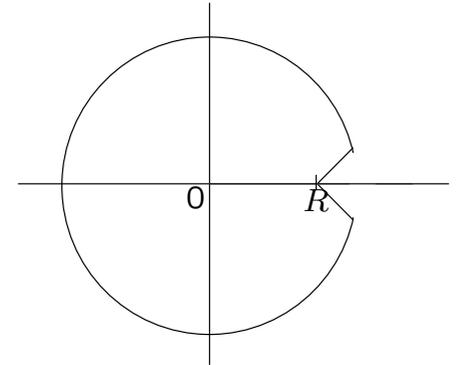
pour n assez grand.

Théorèmes de transfert : un exemple

- Si, dans un domaine “camembert”, la seule singularité de $A(z)$ est R , et que, pour $z \rightarrow R$,

$$A(z) \sim F(z).$$

Alors $a_n \sim f_n$ pour $n \rightarrow \infty$ [Flajolet-Odlyzko 90].



- Application :

$$A(z) = (1 - z) \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + \sqrt{(1+z)/(1-z)(1-z + \sqrt{1-6z+z^2})}} \right)$$

$$= c_0 + c_1 \sqrt{1 - z/R} (1 + o(1))$$

avec $R = 3 - 2\sqrt{2}$, c_0 et c_1 dans \mathbb{R} . “Donc”

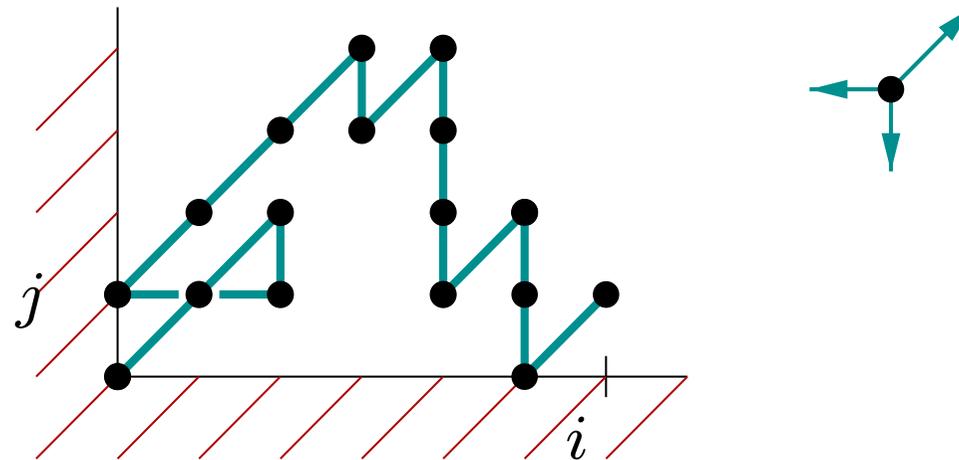
$$a_n \sim c_1 [z^n] \sqrt{1 - z/R} \sim \frac{c_1}{\Gamma(-1/2)} R^{-n} n^{-3/2}$$

- Implémentation en Maple

B. Séries algébriques, séries holonomes, et divination



Chemins “de Kreweras” dans un quart de plan



- Chemins finissant en $(0, 0)$: premières valeurs

$$q(0, 0; n) = 1, 2, 16, 192, 2816, 46592, 835584, 15876096, \dots$$

- Est-ce que cette suite est connue ?

→ The on-line Encyclopedia of Integer Sequences

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>

Greetings from the [On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!](#)

[Lookup](#) | [Index](#) | [Browse](#) | [Format](#) | [Contribute](#) | [EIS](#) | [NJAS](#)

Matches (up to a limit of 30) found for 1 2 16 192 2816 46592 :

[It may take a few minutes to search the whole database, depending on how many matches are found (the second and later lookups are faster)]

ID Number: [A006335](#) (Formerly M2094)

URL: <http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A006335>

Sequence: 1, 2, 16, 192, 2816, 46592, 835584, 15876096, 315031552, 6466437120,

136383037440, 2941129850880, 64614360416256, 1442028424527872,

32619677465182208, 746569714888605696, 17262927525017812992

Name: $4^n * (3n) / ((n+1) * (2n+1) * i)$.

Comments: Number of planar lattice walks of length $3n$ starting and ending at

$(0, 0)$, remaining in the first quadrant, and using only NE, W, S steps.

References: G. Kreweras, Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au

treillis des partitions des entiers, Cahiers du Bureau Universitaire

de Recherche Op\{e}rationnelle, Institut de Statistique,

Université\{e} de Paris, 6 (1965), circa p. 82.

Links: M. Bousquet-M\{e}lou, [Walks in the quarter plane: Kreweras' algebraic model](#)

Program: (PARI) $a(n)=if(n<0,0,4^n*(3*n)!/(n+1)!/(2*n+1)!)$

See also: Equals $2^{n(n-1)} *$ [A000309](#)($n-1$) for $n>1$.

CF. [A098272](#). First row of array [A098273](#).

Sequence in context: [A108999](#) [A052606](#) [A011553](#) this-sequence [A051711](#)

[A012683](#) [A012677](#)

Adjacent sequences: [A006332](#) [A006333](#) [A006334](#) this-sequence [A006336](#)

[A006337](#) [A006338](#)

Keywords: nonn, easy

Greetings from the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!

[Lookup](#) | [Index](#) | [Browse](#) | [Format](#) | [Contribute](#) | [EIS](#) | [MJAS](#)

Matches (up to a limit of 30) found for 1 1 3 7 17 47 125 333 939 2597 7183 :

[It may take a few minutes to search the whole database, depending on how many matches are found (the second and later lookups are faster)]

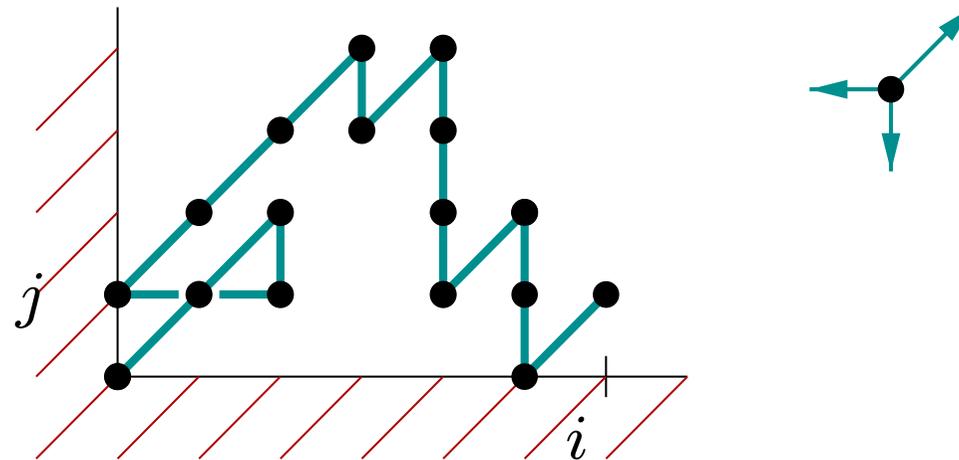
I am sorry, but the terms

1, 1, 3, 7, 17, 47, 125, 333, 939, 2597, 7183

do not match anything in the table.

If your sequence is of general interest, please send it to me using the [form](#) provided and I will (probably) add it to the data base! Include a brief description and if possible enough terms to fill 3 lines on the screen. I need a minimum of 4 terms.

Chemins “de Kreweras” dans un quart de plan



- Chemins finissant en un point quelconque : premières valeurs

$$q(n) = 1, 1, 3, 7, 17, 47, 125, 333, 939, 2597, 7183, \dots$$

- Est-ce que cette suite est connue ? **NON**
- Est-ce que cette suite est **simple** ?
- Est-ce que la série associée appartient à une **famille simple de séries** ?

Séries algébriques, séries holonomes

- La série formelle $A(t)$ est **algébrique** (sur $\mathbb{Q}(t)$) si elle satisfait une équation polynomiale (non-triviale) :

$$\sum_{i=0}^d P_i(t) A(t)^i = 0$$

- Elle est **holonome** (ou différentiellement finie, ou D-finie) si elle satisfait une **équation différentielle linéaire** (à coefficients polynomiaux) :

$$\sum_{i=0}^d P_i(t) A^{(i)}(t) = 0$$

Note : $A^{(i)}(t) = \sum_n n(n-1)\cdots(n-i+1)a_n t^{n-i}$

⇒ De façon équivalente, les coefficients a_n satisfont une **relation de récurrence linéaire** à coefficients polynomiaux :

$$\sum_{i=0}^e q_i(n) a_{n-i} = 0$$

Séries holonomes : exemples

- Chemins du quart de plan à pas N, S, E, O, finissant en $(0,0)$:

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+4)} \binom{2n+2}{n+1}^2$$

Donc

$$4(3+2n)(2n+1)a_n = (n+3)(n+2)a_{n+1}$$

C'est une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux. Ou encore :

$$2 + 2(-1 + 6t)A(t) + 4t(-1 + 12t)A'(t) + t^2(16t - 1)A''(t) = 0.$$

- Toute série algébrique est holonome.

Quelques propriétés de clôture

- La somme, le produit, la dérivée d'une série algébrique [holonome] est encore algébrique [holonome].
- La primitive d'une série holonome l'est aussi.
- L'inverse d'une série algébrique est algébrique.
- Les n premiers coefficients d'une série holonome se calculent en un nombre linéaire d'opérations (via la récurrence).

$$\sum_{i=0}^e q_i(n) a_{n-i} = 0$$

Ces résultats sont **effectifs**, et implémentés dans le paquetage Maple "GFUN".

Séries algébriques et holonomes : divination

Hypothèse : on connaît a_0, a_1, \dots, a_n . On recherche

$$\sum_{i=0}^d P_i(t) A(t)^i = 0$$

ou

$$\sum_{i=0}^d P_i(t) A^{(i)}(t) = 0$$

avec des polynômes P_i de degré au plus e :

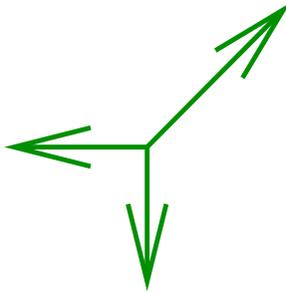
$$P_i(t) = \sum_{j=0}^e p_{i,j} t^j.$$

⇒ système de $n + 1$ équations linéaires en $(d + 1)(e + 1)$ inconnues.

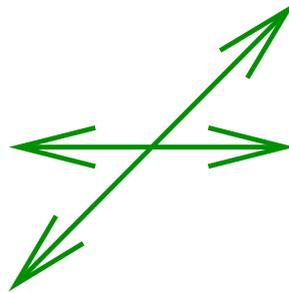
- Si n est assez grand, on peut
 - conjecturer la valeur des $P_i(t)$
 - ou prouver qu'ils n'existent pas.

Divination : exemples

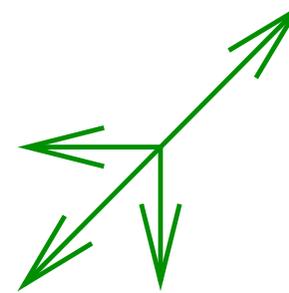
Chemins dans le quart de plan commençant en $(0,0)$: différentes variantes



Kreweras



Gessel



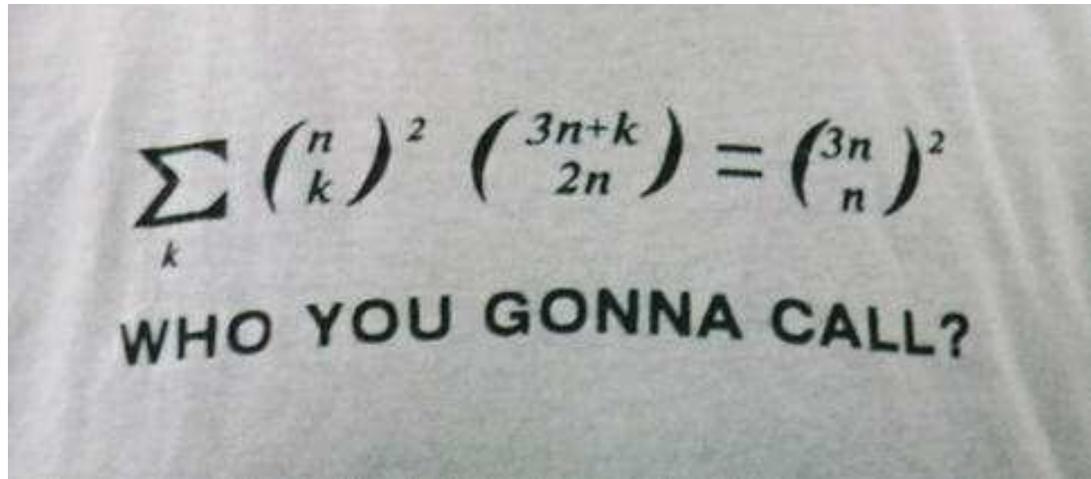
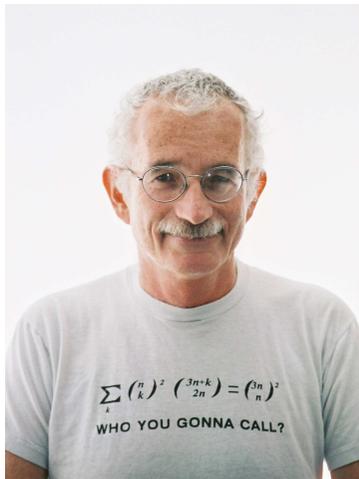
???

Calcul par récurrence de $q(i, j; n)$, le nombre de chemins de longueur n finissant au point (i, j)

C. Preuves automatiques d'identités hypergéométriques

$A = B$ [Petkovšek, Wilf, Zeilberger]

<http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html>



Identités hypergéométriques

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{k} = \binom{m+n}{m}$$

$$\sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{3n+k}{2n} = \binom{3n}{n}^2$$

$$\sum_k (-1)^k \binom{x-k+1}{k} \binom{x-2k}{n-k} = 1$$

$$\sum_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k} \binom{a+c}{c+k} \binom{b+c}{b+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$$

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k)$$

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k)$$

$$g(n) - 2g(n-1) = 0$$

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k) \qquad g(n) - 2g(n-1) = 0$$

Même question avec $G(n, k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}$.

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k) \qquad g(n) - 2g(n-1) = 0$$

Même question avec $G(n, k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}$.

$$3(n+1)g(n) + (2n+5)g(n+1) - (n+4)g(n+2) = 0$$

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k) \qquad g(n) - 2g(n-1) = 0$$

Même question avec $G(n, k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}$.

$$3(n+1)g(n) + (2n+5)g(n+1) - (n+4)g(n+2) = 0$$

2. Y a t-il des solutions “simples” à la récurrence

$$g(n) - ng(n-1) = 0 \quad ?$$

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k) \qquad g(n) - 2g(n-1) = 0$$

Même question avec $G(n, k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}$.

$$3(n+1)g(n) + (2n+5)g(n+1) - (n+4)g(n+2) = 0$$

2. Y a t-il des solutions “simples” à la récurrence

$$g(n) - ng(n-1) = 0 \quad ? \qquad g(n) = n!$$

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k) \qquad g(n) - 2g(n-1) = 0$$

Même question avec $G(n, k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}$.

$$3(n+1)g(n) + (2n+5)g(n+1) - (n+4)g(n+2) = 0$$

2. Y a t-il des solutions “simples” à la récurrence

$$g(n) - ng(n-1) = 0 \quad ? \qquad g(n) = n!$$

Même question avec

$$(3n+1)g(n) - n^2g(n-1) - 8g(n-2) = 0$$

Deux questions

1. Soit $G(n, k) = \binom{n}{k}$. Trouver une récurrence (linéaire, à coefficients polynomiaux) satisfaite par

$$g(n) = \sum_{k=0}^n G(n, k) \qquad g(n) - 2g(n-1) = 0$$

Même question avec $G(n, k) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}$.

$$3(n+1)g(n) + (2n+5)g(n+1) - (n+4)g(n+2) = 0$$

2. Y a t-il des solutions “simples” à la récurrence

$$g(n) - ng(n-1) = 0 \quad ? \qquad g(n) = n!$$

Même question avec

$$(3n+1)g(n) - n^2g(n-1) - 8g(n-2) = 0 \qquad \text{NON}$$

Termes hypergéométriques

- La suite $g(n)$ est **hypergéométrique** (en n) si $g(n+1)/g(n)$ est une fraction rationnelle en n .

Exemples : $\frac{n^2+2n+5}{2n+7}$, $2^n(n+1)!$, $\binom{2n}{n+1}(8n+3)!$

- La suite $G(n, k)$ est **doublement hypergéométrique** (en n et k) si $G(n+1, k)/G(n, k)$ et $G(n, k+1)/G(n, k)$ sont des fractions en n et k .

Exemples : $\frac{n^2+3kn+k^3+5}{k^3+n^2+kn+1}$, $\binom{n}{k}$, $\frac{(n+k^2)(3n+1)!}{(n+k)3^k}$

- La suite $G(n, k)$ est (doublement) **hypergéométrique propre** si

$$G(n, k) = P(n, k) x^k \frac{\prod_i (a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_i (\alpha_i n + \beta_i k + \gamma_i)!}$$

Termes hypergéométriques

- La suite $g(n)$ est **hypergéométrique** (en n) si $g(n+1)/g(n)$ est une fraction rationnelle en n .

Exemples : $\frac{n^2+2n+5}{2n+7}$, $2^n(n+1)!$, $\binom{2n}{n+1}(8n+3)!$

- La suite $G(n, k)$ est **doublement hypergéométrique** (en n et k) si $G(n+1, k)/G(n, k)$ et $G(n, k+1)/G(n, k)$ sont des fractions en n et k .

Exemples : $\frac{n^2+3kn+k^3+5}{k^3+n^2+kn+1}$, $\binom{n}{k}$, $\frac{(n+k^2)(3n+1)!}{(n+k)3^k}$

- La suite $G(n, k)$ est (doublement) **hypergéométrique propre** si

$$G(n, k) = P(n, k) x^k \frac{\prod_i (a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_i (\alpha_i n + \beta_i k + \gamma_i)!}$$

1. Construction d'une récurrence linéaire

- **Donnée** : $G(n, k)$, doublement hypergéométrique propre
- **Résultat (souhaité)** : une récurrence linéaire (coeffs. polynomiaux) pour

$$g(n) = \sum_k G(n, k)$$

- **Théorème** : une telle récurrence existe, et peut-être obtenue automatiquement
- **Applications**
 - expliciter le caractère holonome d'une série génératrice
 - calculer rapidement ses termes
 - couplage avec la bibliothèque GFUN
 - preuve d'identités hypergéométriques
 - résolution sous forme close, simplification de somme (cf. [question 2](#))

Preuve automatique d'identités hypergéométriques

Conjecture :

$$\sum_k F(n, k) = f(n)$$

où $F(n, k)$ est $f(n)$ sont données, hypergéométriques.

Preuve : calculer la récurrence satisfaite par

$$g(n) := \sum_k \frac{F(n, k)}{f(n)}.$$

Vérifier que **1** est solution de la récurrence et que les premiers termes de la suite $g(n)$ sont égaux à 1.

2. Résolution d'une récurrence linéaire

- Forme “close” :

$$f(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_r(n) \quad (1)$$

avec r indépendant de n et $h_i(n)$ hypergéométrique.

Exemple

$$f(n) = \binom{2n+1}{n} + 3^n \frac{n+1}{n^2+3} \binom{4n+5}{n+2} \binom{9n+1}{4n}.$$

Théorème : Les solutions sous forme close de la récurrence

$$\sum_{i=0}^e q_i(n) f(n-i) = 0$$

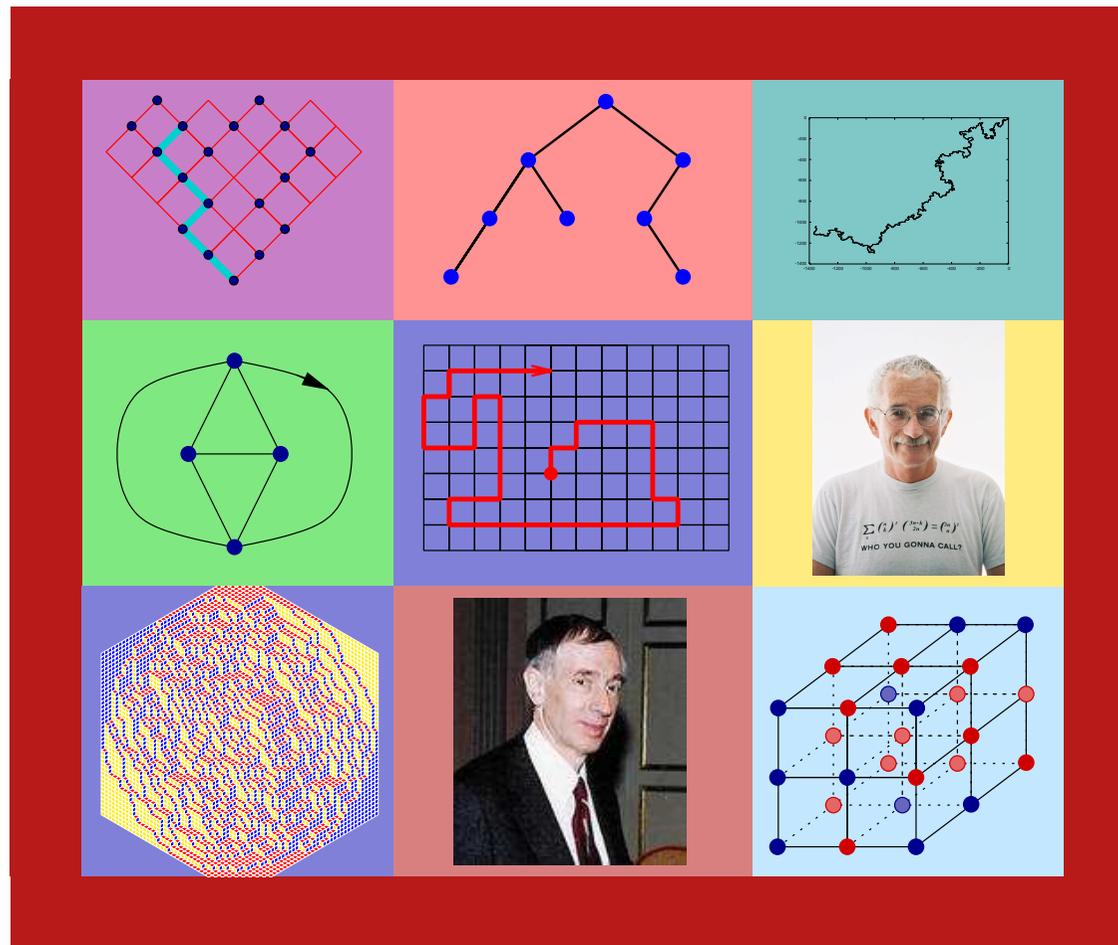
sont les suites de la forme (1) où *chaque* h_i est solution de la récurrence.

⇒ Recherche de toutes les solutions hypergéométriques

Théorème : Cette recherche peut être faite de manière automatique.

Le patchwork

est cousu



La combinatoire énumérative en France

En province

- LaBRI, Bordeaux
- Univ. Lyon 1 (J. Zeng)
- Univ. Rouen (F. Hivert ; combinatoire des groupes et algèbres)

Région parisienne

- INRIA Rocquencourt (Ph. Flajolet ; asymptotique, systématisation et implémentation de méthodes générales, calcul formel)
- LIX, Polytechnique (G. Schaeffer ; énumération, objets discrets aléatoires)
- IGM, Marne la Vallée (J.-Y. Thibon ; combinatoire des groupes et algèbres)
- LIAFA, Paris 7 (D. Rossin, J. Lovejoy...)
- LRI, Orsay (D. Gouyou-Beauchamps)

Master MPRI

Quelques lectures

- R. Stanley, **Enumerative Combinatorics**, vol. 1 et 2.

- H. Wilf, **Generatingfunctionology**

<http://www.math.upenn.edu/~wilf/index.html>

- Ph. Flajolet et R. Sedgewick, **Symbolic Combinatorics**

<http://pauillac.inria.fr/algo/flajolet/Publications/books.html>

- M. Petvokvsek, H. Wilf, D. Zeilberger, **$A = B$**

<http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html>

- N. Madras, G. Slade, **The self-avoiding walk.**

<http://www.labri.fr/~bousquet>

courriel : bousquet@labri.fr