

CHEMINS À GRANDS PAS DANS LE QUART DE PLAN

MIREILLE BOUSQUET-MÉLOU

Ce projet se situe en *combinatoire énumérative*, c'est-à-dire qu'il traite de problèmes de dénombrement.

Contexte. Ces 20 dernières années, beaucoup de travaux en combinatoire énumérative ont porté sur une question d'énoncé simple : étant donné un ensemble fini de pas, noté \mathcal{S} , dans \mathbb{Z}^d , un cône C de \mathbb{Z}^d et un point de départ p_0 dans ce cône, quel est le nombre $c(n)$ de chemins partant de p_0 , et formés de n pas pris dans l'ensemble \mathcal{S} , qui ne sortent jamais de ce cône (Figure 1) ? Quelle est la *nature* de la série génératrice de ces chemins, définie par

$$C(t) = \sum_{n \geq 0} c(n)t^n ?$$

Ce terme de *nature* renvoie à une classification classique des séries formelles dans une hiérarchie de quatre (ou cinq) étages : à la base se trouvent les séries rationnelles, c'est-à-dire quotients de deux polynômes ; puis viennent les séries algébriques, c'est-à-dire solutions d'une équation polynomiale de la forme $P(t, C(t)) = 0$. Un cran au dessus, on trouve les séries D-finies, solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, $\sum_{i=0}^d P_i(t)C^{(i)}(t) = 0$. Enfin, vient la vaste classe des séries D-algébriques, solutions d'une équation différentielle polynomiale, de la forme $P(C(t), C'(t), \dots, C^{(d)}(t), t) = 0$. Des analogues de ces classes existent pour les séries à plusieurs variables. Bien entendu, il existe des séries qui ne rentrent pas dans cette hiérarchie.

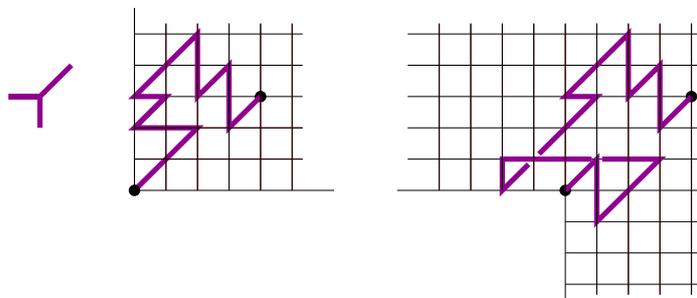


FIGURE 1. Deux chemins constitués de pas “de Kreweras”, $\nearrow, \leftarrow, \downarrow$, le premier dans le quadrant positif, le second dans trois quarts de plan. Les séries génératrices associées sont algébriques dans les deux cas.

Le quart de plan. Il est très facile de se convaincre que si le cône C est \mathbb{Z}^d tout entier, la série génératrice des chemins est rationnelle. Il est également connu depuis les années 1980 que si C est un demi-espace (délimité par un hyperplan d'équation rationnelle), la série est algébrique [12]. Depuis une quinzaine d'années, beaucoup d'efforts ont porté sur le cas naturel “suivant” : celui d'un cône convexe du plan, typiquement le quart de plan positif, dont on veut aborder l'étude de façon systématique [8]. Alors qu'on avait pu se demander, à la lumière d'un certain nombre d'exemples déjà résolus, si la série serait toujours D-finie, il s'avère que la situation est en fait beaucoup plus riche, y compris si on se limite à des pas *petits*, c'est-à-dire pris dans $\{-1, 0, 1\}^2$. Il existe en effet des ensembles de pas pour lesquels la série n'est pas D-finie, mais tout de même D-algébrique, et d'autres pour lesquels elle n'est même pas D-algébrique. Il existe aussi des ensembles de pas pour lesquels elle est “simple”, en l'occurrence algébrique, mais où ce résultat

est bien difficile à prouver (Figure 2). L'exemple le plus célèbre est celui des chemins de Gessel, à pas dans $\{\rightarrow, \nearrow, \leftarrow, \swarrow\}$, pour lesquels une dizaine d'années séparent la première conjecture de forme simple de la première preuve de cette conjecture, à base de calcul formel [14, 5].

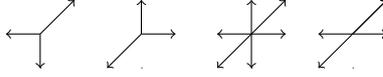
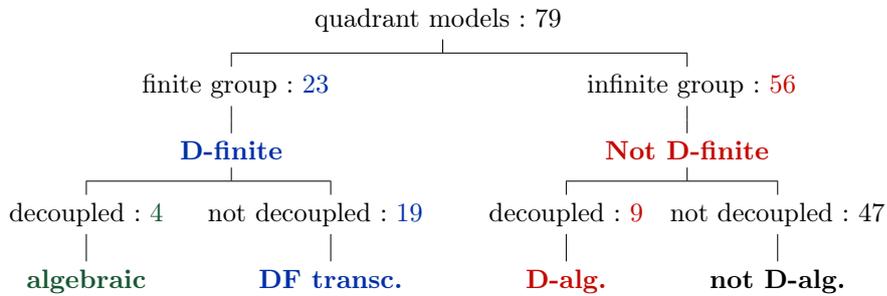


FIGURE 2. Les quatre cas algébriques à petits pas.

La classification des problèmes de quart de plan à petits pas est maintenant essentiellement achevée. Elle a nécessité une étonnante variété d'approches, allant de l'algèbre élémentaire sur les séries formelles [8, 16] à la théorie de Galois des équations aux différences [10], en passant par l'analyse complexe [17, 2], le calcul formel [5, 14], les probabilités [6, 9]... Le résultat peut être schématisé par l'arbre suivant (en anglais dans le texte), où 79 est le nombre d'ensembles \mathcal{S} de (petits) pas essentiellement distincts et intéressants à étudier.



Et après ? En parallèle de ces travaux, d'autres avenues de recherche ont été empruntées, de façon pour le moment moins systématique. Citons-en quelques unes : quid des chemins où les pas peuvent apparaître avec des multiplicités, ou plus généralement des poids positifs [15, 13] ? Quid des chemins dans \mathbb{N}^d , pour $d \geq 3$ [3, 1] ? Et si le cône n'est plus convexe [7, 18, 11] ? Et si les pas ne sont plus forcément petits [4] ?

Sujet. Le sujet proposé consiste à explorer cette dernière question plus avant. Dans l'article [4], un certain nombre d'outils qui ont fait leurs preuves dans le cas des petits pas sont adaptés à celui des pas quelconques, notamment ceux qui mènent, dans l'arbre ci-dessus, à des séries D-finies (mais non algébriques) et à des preuves de non-D-finitude. Une autre partie de cet article est consacrée à une étude expérimentale systématique des cas où \mathcal{S} est inclus dans $\{-2, -1, 0, 1\}^2$. Les méthodes développées dans l'article résolvent une partie d'entre eux, mais des conjectures de D-finitude, voire d'algébricité, restent non prouvées à ce jour (Figure 3).

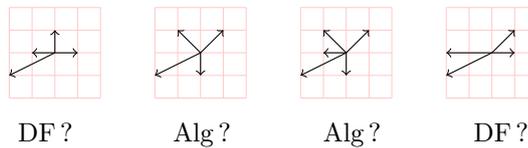


FIGURE 3. Quelques conjectures sur des chemins à grands pas dans le quart de plan.

Le travail demandé porte principalement sur les cas qui semblent algébriques : dans le cas de petits pas, une approche récente basée sur la notion d'*invariants* permet de les résoudre tous de façon uniforme [2]. Serait-il possible d'adapter cet outil à des pas plus grands ? Un volet complémentaire serait l'exploration systématique des cas où \mathcal{S} est un sous-ensemble de $\{-1, 0, 1, 2\}^2$.

Le travail commencerait par la lecture de l'article [8] qui a "lancé" l'étude systématique des chemins du quadrant, avant de poursuivre avec (des morceaux de) [2] et [4], qui traitent respectivement d'invariants et de chemins à pas plus grands.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Bacher, M. Kauers, and R. Yatchak. Continued classification of 3D lattice walks in the positive octant. In *Proceedings of FPSAC'16*, DMTCS Proceedings, pages 95–106, 2016. arXiv:1511.05763.
- [2] O. Bernardi, M. Bousquet-Mélou, and K. Raschel. Counting quadrant walks via Tutte's invariant method. *Combin. Theory*, to appear in 2021. arXiv:1708.08215.
- [3] A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, M. Kauers, and S. Melczer. On 3-dimensional lattice walks confined to the positive octant. *Ann. Comb.*, 20(4) :661–704, 2016. arXiv:1409.3669.
- [4] A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, and S. Melczer. Walks with large steps in an orthant. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 23(7) :2221–2297, 2021. arXiv:1806.00968.
- [5] A. Bostan and M. Kauers. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9) :3063–3078, 2010. arXiv:0909.1965.
- [6] A. Bostan, K. Raschel, and B. Salvy. Non-D-finite excursions in the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 121 :45–63, 2014. arXiv:1205.3300.
- [7] M. Bousquet-Mélou. Square lattice walks avoiding a quadrant. *J. Combin. Theory Ser. A*, 144 :37–79, 2016. arXiv:1511.02111.
- [8] M. Bousquet-Mélou and M. Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic probability and combinatorics*, volume 520 of *Contemp. Math.*, pages 1–39. Amer. Math. Soc., 2010. arXiv:0810.4387.
- [9] D. Denisov and V. Wachtel. Random walks in cones. *Ann. Probab.*, 43(3) :992–1044, 2015. arXiv:1110.1254.
- [10] T. Dreyfus, C. Hardouin, J. Roques, and M. F. Singer. On the nature of the generating series of walks in the quarter plane. *Invent. Math.*, 213(1) :139–203, 2018. arXiv:1702.04696.
- [11] T. Dreyfus and A. Trotignon. On the nature of four models of symmetric walks avoiding a quadrant. *Ann. Comb.*, 25(3) :617–644, 2021. arXiv:2006.02299.
- [12] I. Gessel. A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration. *J. Combin. Theory Ser. A*, 28(3) :321–337, 1980. [doi].
- [13] C. Hardouin and M. Singer. On differentially algebraic generating series for walks in the quarter plane. arXiv:2010.00963, 2020.
- [14] M. Kauers, C. Koutschan, and D. Zeilberger. Proof of Ira Gessel's lattice path conjecture. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 106(28) :11502–11505, 2009. arXiv:0806.4300.
- [15] M. Kauers and R. Yatchak. Walks in the quarter plane with multiple steps. In *Proceedings of FPSAC 2015*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., pages 25–36. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2015. arXiv:1411.3537.
- [16] M. Mishna. Classifying lattice walks restricted to the quarter plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 116(2) :460–477, 2009. arXiv:0611651.
- [17] K. Raschel. Counting walks in a quadrant : a unified approach via boundary value problems. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(3) :749–777, 2012. arXiv:1003.1362.
- [18] K. Raschel and A. Trotignon. On walks avoiding a quadrant. *Electron. J. Combin.*, 26(3) :Paper 3.31, 34 p., 2019.

MBM : CNRS, LABRI, UNIVERSITÉ DE BORDEAUX, 351 COURS DE LA LIBÉRATION, F-33405 TALENCE CEDEX, FRANCE

Email address: bousquet@labri.fr