

Mathématiques-Bonus

IR1 année 2008-2009

Suites récurrentes affines On s'intéresse à des suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \end{cases}$$

où a, b et c sont des constantes. On utilise la méthode par les séries génératrices pour trouver une expression de u_n en fonction de n uniquement. On pose donc $S(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n$. Comme dans le cas des suites récurrentes linéaires, on cherche une relation entre $S(t)$, $tS(t)$ et $t^2S(t)$ mais pas sous forme de combinaison linéaire. On peut réécrire la relation de récurrence sous la forme suivante :

$$u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n - c = 0,$$

et c'est cette expression que l'on cherche à faire apparaître.

$\times(1)$	$S(t)$	$=$	u_0	$+$	$u_1 t$	$+$	$u_2 t^2$	$+$	\dots	$+$	$u_n t^n$	$+$	\dots
$\times(-a)$	$tS(t)$	$=$		$u_0 t$	$+$	$u_1 t^2$	$+$	\dots	$+$	$u_{n-1} t^n$	$+$	\dots	
$\times(-b)$	$t^2 S(t)$	$=$			$u_0 t^2$	$+$	\dots	$+$	$u_{n-2} t^n$	$+$	\dots		
$\times(-c)$	$f(t)$	$=$			$1 t^2$	$+$	\dots	$+$	$1 t^n$	$+$	\dots		

$$S(t) - atS(t) - bt^2S(t) - c.f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t + 0 + \dots + 0 + \dots$$

On voit que pour annuler les termes en t^n à partir de $n = 2$, on a besoin d'utiliser une autre série $f(t)$. Ici la série qui convient est $f(t) = c \sum_{n \geq 2} t^n$. On obtient ainsi :

$$S(t)(1 - at - bt^2) - f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t$$

Il reste à exprimer $f(t)$ pour obtenir une nouvelle expression de $S(t)$; on reconnaît $\sum_{n \geq 0} t^n$ à laquelle on a retiré les deux premiers termes 1 et t :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \geq 0} t^n - 1 - t \\ &= \frac{1}{1-t} - 1 - t \\ &= \frac{t^2}{1-t} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} S(t)(1 - at - bt^2) - \frac{c.t^2}{1-t} &= u_0 + (-a.u_0 + u_1)t \\ S(t)(1 - at - bt^2) &= \frac{c.t^2}{1-t} + u_0 + (-a.u_0 + u_1)t \\ S(t)(1 - at - bt^2) &= \frac{(c + a.u_0 - u_1)t^2 + (-(a+1)u_0 + u_1)t + u_0}{1-t} \\ S(t) &= \frac{(c + a.u_0 - u_1)t^2 + (-(a+1) + u_1)t + u_0}{(1-t)(1 - at - bt^2)} \end{aligned}$$

Il reste à décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples ... etc ...

Autres types de suites On s'intéresse à des suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + n \end{cases}$$

où a et b sont des constantes. C'est le même principe que ce qui précède. On utilise la relation de récurrence :

$$u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n - n = 0,$$

et c'est cette expression que l'on cherche à faire apparaître.

$\times(1)$	$S(t)$	$=$	u_0	$+$	$u_1 t$	$+$	$u_2 t^2$	$+$	\dots	$+$	$u_n t^n$	$+$	\dots
$\times(-a)$	$tS(t)$	$=$			$u_0 t$	$+$	$u_1 t^2$	$+$	\dots	$+$	$u_{n-1} t^n$	$+$	\dots
$\times(-b)$	$t^2 S(t)$	$=$				$+$	$u_0 t^2$	$+$	\dots	$+$	$u_{n-2} t^n$	$+$	\dots
$\times(-1)$	$f(t)$	$=$				$+$	$2t^2$	$+$	\dots	$+$	nt^n	$+$	\dots

$$S(t) - atS(t) - bt^2S(t) - f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t + 0 + \dots + 0 + \dots$$

Cette fois-ci la fonction f qui convient est :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \geq 0} nt^n - t \\ &= \frac{t}{(1-t)^2} - t \end{aligned}$$

et comme précédemment en remplaçant $f(t)$ dans la formule $S(t)(1 - at - bt^2) - f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t$, on aboutit à une écriture de $S(t)$ sous forme de fraction rationnelle.