

# Mathématiques-Bonus

IR1 année 2008-2009

**Suites récurrentes affines** On s'intéresse à des suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \end{cases}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes. On utilise la méthode par les séries génératrices pour trouver une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  uniquement. On pose donc  $S(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n$ . Comme dans le cas des suites récurrentes linéaires, on cherche une relation entre  $S(t)$ ,  $tS(t)$  et  $t^2S(t)$  mais pas sous forme de combinaison linéaire. On peut réécrire la relation de récurrence sous la forme suivante :

$$u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n - c = 0,$$

et c'est cette expression que l'on cherche à faire apparaître.

$\times(1)$	$S(t)$	$=$	$u_0$	$+$	$u_1 t$	$+$	$u_2 t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$u_n t^n$	$+$	$\dots$
$\times(-a)$	$tS(t)$	$=$		$u_0 t$	$+$	$u_1 t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$u_{n-1} t^n$	$+$	$\dots$	$\dots$
$\times(-b)$	$t^2 S(t)$	$=$			$u_0 t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$u_{n-2} t^n$	$+$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\times(-c)$	$f(t)$	$=$			$1 t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$1 t^n$	$+$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$$S(t) - atS(t) - bt^2S(t) - c.f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t + 0 + \dots + 0 + \dots$$

On voit que pour annuler les termes en  $t^n$  à partir de  $n = 2$ , on a besoin d'utiliser une autre série  $f(t)$ . Ici la série qui convient est  $f(t) = c \sum_{n \geq 2} t^n$ . On obtient ainsi :

$$S(t)(1 - at - bt^2) - f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t$$

Il reste à exprimer  $f(t)$  pour obtenir une nouvelle expression de  $S(t)$ ; on reconnaît  $\sum_{n \geq 0} t^n$  à laquelle on a retiré les deux premiers termes 1 et  $t$  :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \geq 0} t^n - 1 - t \\ &= \frac{1}{1-t} - 1 - t \\ &= \frac{t^2}{1-t} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} S(t)(1 - at - bt^2) - \frac{c.t^2}{1-t} &= u_0 + (-a.u_0 + u_1)t \\ S(t)(1 - at - bt^2) &= \frac{c.t^2}{1-t} + u_0 + (-a.u_0 + u_1)t \\ S(t)(1 - at - bt^2) &= \frac{(c + a.u_0 - u_1)t^2 + (-(a+1)u_0 + u_1)t + u_0}{1-t} \\ S(t) &= \frac{(c + a.u_0 - u_1)t^2 + (-(a+1) + u_1)t + u_0}{(1-t)(1 - at - bt^2)} \end{aligned}$$

Il reste à décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples ... etc ...

**Autres types de suites** On s'intéresse à des suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + n \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. C'est le même principe que ce qui précède. On utilise la relation de récurrence :

$$u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n - n = 0,$$

et c'est cette expression que l'on cherche à faire apparaître.

$\times(1)$	$S(t)$	$=$	$u_0$	$+$	$u_1 t$	$+$	$u_2 t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$u_n t^n$	$+$	$\dots$
$\times(-a)$	$tS(t)$	$=$			$u_0 t$	$+$	$u_1 t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$u_{n-1} t^n$	$+$	$\dots$
$\times(-b)$	$t^2 S(t)$	$=$				$+$	$u_0 t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$u_{n-2} t^n$	$+$	$\dots$
$\times(-1)$	$f(t)$	$=$				$+$	$2t^2$	$+$	$\dots$	$+$	$nt^n$	$+$	$\dots$

$$S(t) - atS(t) - bt^2S(t) - f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t + 0 + \dots + 0 + \dots$$

Cette fois-ci la fonction  $f$  qui convient est :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \geq 0} nt^n - t \\ &= \frac{t}{(1-t)^2} - t \end{aligned}$$

et comme précédemment en remplaçant  $f(t)$  dans la formule  $S(t)(1 - at - bt^2) - f(t) = u_0 + (-a.u_0 + u_1)t$ , on aboutit à une écriture de  $S(t)$  sous forme de fraction rationnelle.