

DM de Mathématiques, Suites récurrentes linéaires

IR1 année 2008-2009

A rendre pour le 8 décembre 2008

Remarque : Une partie importante de la notation est consacrée à la rédaction. Pensez à bien expliquer ce que vous faites, et éventuellement commentez vos résultats. Ne faites les questions précédées d'un ♠ (difficiles) qu'après avoir fini le reste du devoir.

Exercice 1 : Echauffement

On s'intéresse à la suite récurrente linéaire définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Pour trouver le terme général u_n on applique la méthode classique.

- 1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un entier.
- 2- Calculer les racines du polynôme $P(t)$ associé à cette suite. On les notera x_1 et x_2 . Que remarquez-vous ?
- 3- Exprimer u_n en fonction de x_1 et x_2 . Est-ce cohérent avec le résultat de la question 1 ?
- 4- ♠ Peut-on trouver une expression de u_n qui ne fasse pas apparaître de nombre complexe ? Si oui explicitiez-la.
- 5- ♠ u_n est un entier, comment peut-on le voir d'après l'expression trouvée à la question 4 ?

Exercice 2 : Calcul de déterminant

On souhaite calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le déterminant de taille $n * n$ suivant, où α et β sont des réels quelconques :

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & \vdots \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

On peut rencontrer de tels déterminants en électronique, ils apparaissent lors de calcul d'impédance par exemple.

- 1- Calculer D_1 et D_2 .
- 2- Trouver une relation de récurrence entre D_{n+2} , D_{n+1} et D_n (on pensera à développer le déterminant D_{n+2} par rapport à la première ligne par exemple).
- 3- On se place dans le cas particulier où $\alpha = 4$ et $\beta = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Calculer D_n par les deux méthodes vues en TD, et comparer les deux résultats obtenus.
- 4- ♠ Calculer D_n dans le cas général (α et β quelconques); on fera attention à bien distinguer tous les cas.