

DM de Mathématiques, Suites récurrentes linéaires - Correction

IR1 année 2008-2009

A rendre pour le 8 décembre 2008

Exercice 1 : Echauffement

On s'intéresse à la suite récurrente linéaire définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

- 1- On montre par récurrence que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un entier. Notre hypothèse de récurrence est :

\mathcal{H}_n : le $n^{\text{ième}}$ terme u_n de la suite est un entier relatif.

On vérifie que \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 sont vraies : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ sont bien des entiers relatifs. Supposons à présent que \mathcal{H}_n et \mathcal{H}_{n+1} sont vraies. Alors par définition $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et par hypothèse de récurrence, u_n et u_{n+1} sont des entiers relatifs. Comme on peut multiplier, ajouter et soustraire des entiers relatifs et obtenir un résultat qui soit encore un entier relatif ($(\mathbb{Z}, +, *)$ est un anneau) u_{n+2} est bien un entier relatif. Ceci achève la récurrence.

- 2- La formule de récurrence peut se réécrire $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$. On appelle donc $P(t) = t^2 - 2t + 2$ le polynôme associé à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les racines de ce polynôme sont :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2+i\sqrt{4}}{2} = 1+i \\ x_2 = \frac{2-i\sqrt{4}}{2} = 1-i \end{cases}$$

On remarque que ces racines sont des racines complexes conjuguées : $\overline{x_1} = x_2$.

- 3- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des suites $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe donc deux nombres λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda(1+i)^n + \mu(1-i)^n.$$

Pour trouver λ et μ on utilise les premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = 1 = \lambda + \mu \\ n=1 \Rightarrow u_1 = 1 = \lambda(1+i) + \mu(1-i) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda + \mu + i(\lambda - \mu) \end{cases}$$

D'où en combinant les deux équations :

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 0 = \lambda - \mu \end{cases}$$

Finalement $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$; l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc :

$$u_n = \frac{1}{2}(1+i)^n + \frac{1}{2}(1-i)^n.$$

Dans la première question on a montré que chaque terme de la suite est un entier relatif, pourtant on donne ici une expression du terme général de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui utilise des nombres complexes. On doit donc pouvoir simplifier cette écriture et éliminer les complexes.

4- ♠ Pour simplifier l'écriture précédente, deux méthodes (au moins) sont possibles :

- développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$,
- écrire $(1+i)$ et $(1-i)$ sous forme polaire (à l'aide de l'exponentielle)

Méthode 1 On utilise la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}.$$

Appliquée à l'expression de u_n on obtient :

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k 1^{n-k} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^k 1^{n-k} \right)$$

en regroupant les deux sommes on a :

$$u_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (1 + (-1)^k)$$

on remarque que si k est impair, $(1 + (-1)^k) = 0$ donc il ne reste dans cette somme que les termes pour k pair :

$$u_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2i^{2k}$$

d'où finalement comme $i^2 = -1$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k.$$

On a fait disparaître les nombres complexes de l'expression de u_n . De plus comme les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ sont des entiers et qu'on en fait la somme alternée, on voit directement que le résultat est un entier : $u_n \in \mathbb{Z}$.

Méthode 2 On écrit $(1+i)$ et $(1-i)$ sous forme polaire : $1+i = \rho e^{i\theta}$ et $1-i = \rho' e^{i\theta'}$. Ce sont des nombres complexes de module $\sqrt{2}$, on commence donc par écrire :

$$\begin{cases} 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\ 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

puis dans l'expression factorisée on multiplie numérateurs et dénominateurs par $\sqrt{2}$ pour éliminer la racine aux dénominateurs :

$$\begin{cases} 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

enfin on remarque que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où :

$$\begin{cases} 1+i = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}) \right) \\ 1-i = \sqrt{2} \left(\cos(-\frac{\pi}{4}) - i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} 1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

On injecte ces deux relations dans l'expression de u_n :

$$u_n = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^n + \frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}})^n,$$

en mettant les puissances de 2 en facteur on voit apparaître $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ avec $\theta = \frac{n\pi}{4}$:

$$u_n = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^n \left(e^{\frac{in\pi}{4}} + e^{-\frac{in\pi}{4}} \right),$$

que l'on simplifie grace à la formule : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$

$$u_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Avec cette expression sans nombre complexe on voit que chaque terme de la suite est un réel.

- 5- ♠ Avec la première méthode on voit directement sur l'expression de u_n que c'est un entier. Il reste à vérifier que ça marche aussi avec la seconde méthode, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Quelles valeurs l'expression $(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ peut-elle prendre ?

- si $n = 2k$ est pair, alors $\frac{n\pi}{4}$ est congru à $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ou $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π , donc $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \in \{0, -1, 1\}$. Dans ce cas, $u_n \in \{0, -2^k, 2^k\}$ donc u_n est bien un entier.
- si $n = 2k + 1$ est impair, alors $\frac{n\pi}{4}$ est congru à $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$ modulo 2π . Donc $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Dans ce cas, comme $n = 2k + 1$, $(\sqrt{2})^n = 2^k \sqrt{2}$ et donc $u_n \in \{2^k \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}, -2^k \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ c'est-à-dire que $u_n \in \{2^k, -2^k\}$ donc u_n est bien un entier.

Finalement quelle que soit la parité de n , u_n est un entier relatif.

Exercice 2 : Calcul de déterminant

1- $D_1 = \begin{vmatrix} \alpha \end{vmatrix} = \alpha$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2$$

- 2- Si l'on développe le déterminant D_n suivant la première colonne, on obtient:

$$D_n = \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & \\ & \beta & \alpha & \beta & \\ & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_n = \alpha \times \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & \\ & \beta & \alpha & \beta & \\ & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{n-1} - \beta \times \underbrace{\begin{vmatrix} \beta & 0 & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & \\ & \beta & \alpha & \beta & \\ & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{n-1}.$$

Enfin, il est possible de développer la première ligne du second terme de l'équation précédente pour obtenir,

$$D_n = \alpha \times \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & \\ & \beta & \alpha & \beta & \\ & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{n-1} - \beta^2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & \\ & \beta & \alpha & \beta & \\ & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{n-2}.$$

Ce qui nous permet d'affirmer la formule de récurrence suivante:

$$\forall n \geq 3 \quad D_n = \alpha \times D_{n-1} - \beta^2 \times D_{n-2}$$

3- Il suffit d'appliquer les formules du 4) pour obtenir :

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\left(\frac{4 + \sqrt{6}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{4 - \sqrt{6}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

4- ♠ Nous souhaitons trouver, dans le cas général, une formule pour D_n . Pour cela, il suffit de déterminer tous les termes de la suite suivante:

$$\begin{cases} D_1 = \alpha, \\ D_2 = \alpha^2 - \beta^2, \\ D_n = \alpha \cdot D_{n-1} - \beta^2 \cdot D_{n-2}. \end{cases}$$

Cette suite peut se prolonger artificiellement en D_0 en utilisant la formule de récurrence précédente appliquée en $n = 2$. Ainsi, $D_2 = \alpha \cdot D_1 - \beta^2 \cdot D_0$ donne $D_0 = 1$. Notre problème est donc équivalent à trouver une formule pour D_n vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} D_0 = 1, \\ D_1 = \alpha, \\ D_n = \alpha \cdot D_{n-1} - \beta^2 \cdot D_{n-2}. \end{cases}$$

Méthode classique

Le polynôme caractéristique de cette suite est $P(t) = t^2 - \alpha t + \beta^2$ et a pour discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4\beta^4$. Deux cas doivent être étudiés.

Cas 1 : si $\Delta \neq 0$, alors P possède deux racines distinctes r_{\pm} . D_n est alors une combinaison linéaire des suites $(r_+^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_-^n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$D_n = \theta \cdot r_+^n + \gamma \cdot r_-^n.$$

Pour déterminer θ et γ , il suffit de spécialiser la formule pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} D_0 = 1 = \theta + \gamma \\ D_1 = \alpha = r_+ + r_- = \theta \cdot r_+ + \gamma \cdot r_- \end{cases}$$

On en déduit donc que $\theta = \frac{r_+}{r_+ - r_-}$ et $\gamma = \frac{r_-}{r_- - r_+}$. D'où,

$$D_n = \frac{1}{r_+ - r_-} (r_+^{n+1} - r_-^{n+1}) \quad \text{avec} \quad r_{\pm} = \frac{\alpha \pm c(\Delta)\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad c(\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \geq 0 \\ i & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}.$$

Cas 2 : si $\Delta = 0$, alors P possède une seule racine r . D_n est alors une combinaison linéaire des suites $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n \times r^n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$D_n = \theta \cdot r^n + \gamma \cdot n \cdot r^n.$$

Pour déterminer θ et γ , il suffit de spécialiser la formule pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} D_0 = 1 = \theta \\ D_1 = \alpha = 2 \cdot r = \theta \cdot r + \gamma \cdot r \end{cases}$$

On en déduit donc que $\theta = 1$ et $\gamma = 1$. D'où,

$$D_n = (1 + n) \cdot r^n \quad \text{avec} \quad r = \frac{\alpha}{2}.$$

Méthode utilisant les séries génératrices

Soit $S(t) = \sum_{k \geq 0} D_k t^k$. Etant donné que $D_n = \alpha D_{n-1} - \beta^2 D_{n-2}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} 1 \times & S(t) & = 1 + \alpha t + D_2 t + \dots \\ - \alpha \times & t.S(t) & = 1.t + D_1 t^2 + \dots \\ + \beta^2 \times & t^2.S(t) & = D_0 t^2 + \dots \\ \hline & s(t) - \alpha.t.S(t) + \beta^2.t^2.S(t) & = 1 + 0 + 0 + \dots \end{array}$$

D'où,

$$S(t) = \frac{1}{1 - \alpha t + \beta^2 t^2}.$$

Si $\beta = 0$, alors $S(t) = \sum_k \alpha^k t^k$ et $D_n = \alpha^n$.

Dans la suite du document on supposera donc que $\beta \neq 0$.

Soit $Q(t) = 1 - \alpha t + \beta^2 t^2$. Le discriminant de Q est égal à $\Delta = \alpha^2 - 4\beta^4$. Deux cas se présentent alors :

Cas 1 : si $\Delta \neq 0$, alors Q possède deux racines distinctes s_+ et s_- . $S(t)$ s'écrit alors comme :

$$S(t) = \frac{1}{\beta^2(t - s_+)(t - s_-)}$$

Comme $(t - s_+)(t - s_-) = t^2 - (s_+ + s_-)t + s_+s_- = t^2 - \frac{\alpha}{\beta^2}t + \frac{1}{\beta^2}$, on a :

$$s_+ \cdot s_- = \frac{1}{\beta^2}.$$

On en déduit donc que :

$$S(t) = \frac{s_+s_-}{(t - s_+)(t - s_-)}.$$

Etant donné que le degré du numérateur de $S(t)$ est inférieur strictement au degré de son dénominateur, on a :

$$S(t) = s_+ \cdot s_- \left(\frac{A}{t - s_+} + \frac{B}{t - s_-} \right) \quad \text{avec} \quad A = \lim_{t \rightarrow s_+} \frac{1}{t - s_-} \quad \text{et} \quad B = \lim_{t \rightarrow s_-} \frac{1}{t - s_+}.$$

On en déduit donc que

$$S(t) = \frac{s_+ \cdot s_-}{s_+ - s_-} + \frac{s_+ \cdot s_-}{s_- - s_+} = \frac{s_+ \cdot s_-}{s_+ - s_-} \cdot \left(\frac{1}{t - s_+} + \frac{-1}{t - s_-} \right).$$

Or,

$$\frac{1}{t - a} = -\frac{1}{a} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{t}{a} \right)^k.$$

On obtient alors

$$S(t) = -\frac{s_+ \cdot s_-}{s_+ - s_-} \sum_k \left(\left(\frac{t}{s_+} \right)^{k+1} - \left(\frac{t}{s_-} \right)^{k+1} \right).$$

Ce qui aboutit à

$$D_n = -\frac{s_+ \cdot s_-}{s_+ - s_-} \left(\frac{1}{s_+^{n+1}} - \frac{1}{s_-^{n+1}} \right).$$

Cas 2 : si $\Delta = 0$, alors Q possède une seule racine double s . $S(t)$ s'écrit alors comme:

$$S(t) = \frac{1}{\beta^2(t-s)^2}$$

Comme $(t-s)(t-s) = t^2 - 2s.t + s^2 = t^2 - \frac{\alpha}{\beta^2}.t + \frac{1}{\beta^2}$, on a :

$$s^2 = \frac{1}{\beta^2}.$$

On obtient alors,

$$S(t) = \frac{s^2}{(t-s)^2} = \frac{1}{(1-t/s)^2} = \sum_{k \geq 0} (k+1)(t/s)^k.$$

On en déduit donc que

$$D_n = (1+n) \left(\frac{1}{s}\right)^n.$$

Liens entre les deux méthodes

Dans un premier temps nous allons traiter le cas où $\beta \neq 0$.

Dans la méthode classique, le polynôme caractéristique est $p(t) = t^2 - \alpha.t + \beta^2$. Dans la méthode utilisant les séries génératrices, $S(t) = \frac{1}{Q(t)} = \frac{1}{\beta^2 t^2 - \alpha t + 1}$. Le lien entre le polynôme P et le polynôme Q est le suivant :

$$P(t) = t^2 Q\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi, si r est une racine de P , $\frac{1}{r}$ est une racine de Q et vice versa ($r \neq 0$ car $\beta \neq 0$). Si l'on calcule effectivement les racines de P (respectivement Q) notées r_{\pm} (respectivement s_{\pm}), on obtient :

$$r_{\pm} = \frac{\alpha \pm c(\Delta) \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2} \quad s_{\pm} = \frac{\alpha \pm c(\Delta) \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot \beta^2}$$

où $c(\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \geq 0 \\ i & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$. On en déduit les relations suivantes entre r_{\pm} et s_{\pm} :

$$\begin{array}{lcl} r_+ = \beta^2 s_+ & \text{et par conséquence} & s_+ = \frac{1}{r_-} \\ r_- = \beta^2 s_- & \text{(voir remarque précédente)} & s_- = \frac{1}{r_+} \end{array}.$$

Si $\beta = 0$, alors la suite

$$\begin{cases} D_0 = 1, \\ D_1 = \alpha, \\ D_n = \alpha \cdot D_{n-1} - \beta^2 \cdot D_{n-2}. \end{cases}$$

n'est pas une suite d'ordre 2. Elle dégénère en une suite d'ordre 1 et devient:

$$\begin{cases} D_0 = 1, \\ D_n = \alpha \cdot D_{n-1}. \end{cases}$$

Dans ce cas, si $\alpha \neq 0$, $P(t) = t - \alpha$ et $Q(t) = 1 - \alpha.t$. P et Q possède alors une seule racine notée respectivement r et s . On obtient alors:

$$r = \frac{1}{s}.$$

Si $\alpha = 0$ la suite se réduit à $D_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, D_n = 0$.