

Exercice 1 =

La première série est inversible car son terme constant est non nul.

La ~~première~~ deuxième série n'est pas inversible car son terme constant est nul.

Exercice 2 =

$$f = \frac{x^5}{(x-1)^2(x-2)^2} = Q(x) + \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x-2)^2 &= (x^2-2x+1)(x^2-4x+4) = x^4 + (-4-2)x^3 + (4+8+1)x^2 \\ &\quad + (-8-4)x + 4 \\ &= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \\ \hline x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x & \\ \hline 6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 4x & \\ 6x^4 - 36x^3 + 72x^2 - 72x + 24 & \\ \hline 23x^3 - 60x^2 + 68x - 24 & \end{array}$$

D'où $Q(x) = x+6$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \left((x-1)^2 f \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^5}{(x-2)^2} \right) = \frac{1}{(1-2)^2} = 1 \quad \boxed{A=1}$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\left((x-1)^2 f \right)' \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\left(\frac{x^5}{(x-2)^2} \right)' \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x^4(x-2)^2 - x^5 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \right) \\ &= \frac{5 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot 2 \cdot (-1)}{1} = 5 + 2 = 7 \quad \boxed{B=7} \quad (1) \end{aligned}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 2} \left((x-2)^2 f \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^5}{(x-1)^2} \right) = \frac{2^5}{1} = 32$$

$$\boxed{C = 32}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\left((x-2)^2 f \right)' \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\left(\frac{x^5}{(x-1)^2} \right)' \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5x^4(x-1)^2 - x^5 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \right)$$

$$= \frac{5 \cdot 2^4 \cdot 1 - 2^5 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \frac{80 - 64}{1} = 16$$

$$\boxed{D = 16}$$

$$\frac{x^5}{(x-1)^2(x-2)^2} = x + 6 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{32}{(x-2)^2} + \frac{16}{x-2}$$

Exercice 3

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{k \geq 0} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)x^k = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (k^2 + 2k)x^k &= \sum_{k \geq 0} \left((k+1)(k+2) - (k+1) - 1 \right) x^k = \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)x^k - \sum_{k \geq 0} (k+1)x^k - \sum_{k \geq 0} x^k \\ &= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

$$\sum_{k \geq 0} (k^2 + 2k) x^k = \frac{2 - (1-x) - (1-x)^2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{k \geq 0} (k^2 + 2k) x^k = \frac{-x^2 + 3x}{(1-x)^3}$$

Exercise 4

$$\sum_{k \geq 0} (3k-1) x^k = \sum_{k \geq 0} (3(k+1) - 4) x^k = 3 \sum_{k \geq 0} (k+1) x^k - 4 \sum_{k \geq 0} x^k$$

$$= 3 \frac{1}{(1-x)^2} - 4 \frac{1}{1-x} = \frac{3 - 4(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{4x-1}{(1-x)^2}$$

$$\text{Sint } S(x) = \sum_{k \geq 0} U_k x^k$$

$$S(x) = 1 + 1 \cdot x + (-4) x^2 + \dots \times 1$$

$$x S(x) = 1 \cdot x + 1 x^2 + \dots \times (-3)$$

$$x^2 S(x) = 1 x^2 + \dots \times (+2)$$

$$\sum_{k \geq 0} (3k-1) x^k = -1 + 2 \cdot x + 5 x^2 + \dots \times (+1)$$

$$= 0 + 0 \cdot x + 0 x^2 + 0$$

(3)

$$S(x) = \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1-2x}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{2}{(1-x)^3} + 2 \frac{1}{(1-x)^2} + 4 \frac{1}{1-x} - 8 \frac{1}{1-2x}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)x^k + 2 \sum_{k \geq 0} (k+1)x^k + 4 \sum_{k \geq 0} x^k - 8 \sum_{k \geq 0} (2x)^k$$

$$= \sum_{k \geq 0} \left(\frac{3}{2} (k+1)(k+2) + 2(k+1) + 4 - 8 \cdot 2^k \right) x^k$$

~~U_k~~
k ≥ 0

$$U_k = \frac{3}{2} (k+1)(k+2) + 2(k+1) + 4 - 8 \cdot 2^k$$

Exercice 5

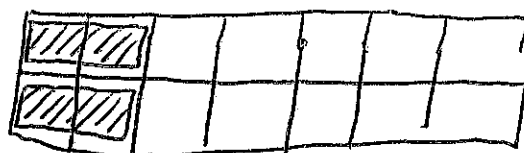
~~Exercice~~ 1) Les parages du denier



Dont les parages d'années suivants =



et



Nous avons donc la formule de récurrence suivante

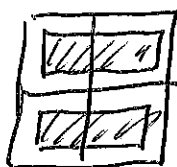
$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

calcul de $U_1 =$



$$U_1 = 1$$

calcul de U_2



$$U_2 = 2$$

D'on

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_2 = 2 \\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \end{cases}$$

Il s'agit de la suite de Fibonacci!

$$S(x) = \sum_{k \geq 0} U_k x^k$$

$$S(x) = 1 + 1x + 2x^2 \quad (x^1)$$

$$xS(x) = \quad 1x + 1x^2 \quad (x-1)$$

$$x^2S(x) = \quad \quad 1x^2 \quad (x-1)$$

$$(1-x-x^2)S(x) = 1$$

$$S(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{-(x-r_+)(x-r_-)}$$

$$r_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{-1}{r_+ - r_-} + \frac{1}{-r_- - r_+}$$

$$= \frac{-1}{x - r_+} + \frac{1}{x - r_-}$$

(6)

$$S(x) = \frac{1}{r_+(r_+-r_-)} + \frac{1}{r_-(r_+-r_-)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{r_-}}$$

$$S(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{r_+(r_+-r_-)} \left(\frac{1}{r_+}\right)^k x^k + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{r_-(r_+-r_-)} \left(\frac{1}{r_-}\right)^k x^k$$

$$= \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{r_+-r_-} \left(\left(\frac{1}{r_+}\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{r_-}\right)^{k+1} \right) \right) x^k$$

D'ici

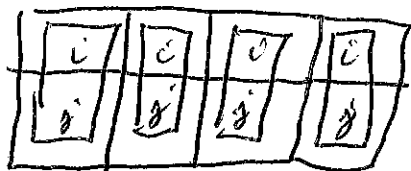
$$U_k = \frac{1}{r_+-r_-} \left(\left(\frac{1}{r_+}\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{r_-}\right)^{k+1} \right)$$

où $r_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

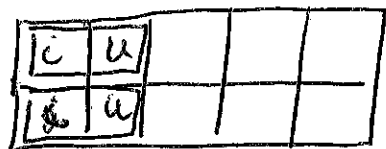
2) Nous allons d'abord commencer à résoudre un problème analogue :

Comment trouver le premier D sachant que les valeurs de deux premières cases sont obligatoirement i et j .

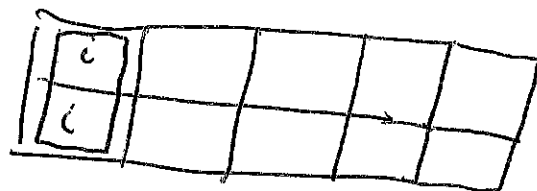
1) Si $i \neq j$ alors le pavage de D est unique



1) Si $i = j$, alors le pavage de D est celui de



et de



où $u \in \{1, \dots, p\}$

on est donc ramené au pavage de D d'un damier de longueur $n-1$ et $n-2$ tel que les deux premières cases sont contraintes à une même valeur.

Si on note W_n le nombre de pavage de D tel que les deux premières cases sont contraintes à une valeur i ~~valable~~ fixée à l'avance.

$$W_n = \sum_{k=1}^p W_{n-2} + W_{n-1} = W_{n-1} + pW_{n-2}$$

$$D'_{n'} \quad w_n = w_{n-1} + Pw_{n-2}$$

calcul pour $n=1$ et les premiers case fixe à i .

$$\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline i \\ \hline \end{array} \Rightarrow w_1 = 1$$

calcul pour $n=2$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline i & i \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline i & j \\ \hline \end{array} \quad \text{ou } j \in [1, p]$$

$$w_2 = 1 + P$$

$$D'_{n'} \quad \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = P+1 \\ w_n = w_{n-1} + Pw_{n-2} \end{cases} \iff \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 1 \\ w_n = w_{n-1} + Pw_{n-2} \end{cases}$$

calcul de $w_n =$

$$S(x) = \sum_{k \geq 0} w_k x^k$$

$$S(x) = 1 + 1x + (1+P)x^2 \quad (x-1)$$

$$xS(x) = 1x + 1x^2 \quad (x-1)$$

$$x^2S(x) = 1x^2 \quad (x-1)$$

$$(1-x-Px^2)S(x) = 1$$

$$S(x) = \frac{1}{1-x-Px^2} = \frac{1}{P-(x-r_+)(x-r_-)} \quad \text{ou } r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4P}}{-2P}$$

9

on obtient donc =

$$S(x) = \frac{1}{P} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{r_+ - r_-} \left(\left(\frac{1}{r_+} \right)^{k+1} - \left(\frac{1}{r_-} \right)^{k+1} \right) x^k$$

d'où

$$W_k = \frac{1}{P} \frac{1}{(r_+ - r_-)} \left(\left(\frac{1}{r_+} \right)^{k+1} - \left(\frac{1}{r_-} \right)^{k+1} \right)$$
$$\text{où } r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+P}}{-2P}$$

on peut donc maintenant résoudre le problème initial =

le parage de D est la réunion des parages de D ayant les valeurs des deux premières cases fixées.

Soit =

(10)

$$U_k = \underbrace{(P^2 - P) \cdot 1}_{\text{les 2^{es} cases sont indépendantes}} + \underbrace{P \cdot W_k}_{\text{les 2^{es} cases sont identiques}}$$

Annexe =

calcul de $A, B, C,$ et D dans $S(x)$ de l'exercice 4 =

$$S(x) = \frac{A}{(1-x)^3} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)} + \frac{D}{1-2x}$$

$$(1-x)^3 S(x) = A + (1-x)B + (1-x)^2 C + \frac{(1-x)^3}{1-2x} D$$

$$\left((1-x)^3 S(x) \right)' = -B + (1-x) \left(\dots \right)$$

$$\begin{aligned} \left((1-x)^3 S(x) \right)'' &= \dots + 2 \cdot C + (1-x) \left(\dots \right) \\ (1-2x) S(x) &= D + (1-2x) \left(\dots \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left((1-x)^3 S(x) \right) = A + 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\left((1-x)^3 S(x) \right)' \right) = -B$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\left((1-x)^3 S(x) \right)'' \right) = 2 \cdot C$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left((1-2x) S(x) \right) = D$$

Annexe