

Calcul des suites de récurrence linéaire

Trouver une formule explicite permettant de calculer chacun des termes des suites suivantes :

i) Fibonacci :

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

iii) $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = 4F_n - 4F_{n-1} \end{cases}$

ii) $\begin{cases} F_0 = -1 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = 3F_n - 2F_{n-1} \end{cases}$

iv) $\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_{n+3} = 5F_{n+2} - 8F_{n+1} + 4F_n \end{cases}$

Pour chacune des suites, vous utiliserez la méthode classique puis la méthode utilisant les séries génératrices.

Méthode classique appliquée à la suite de Fibonacci :

Le but est de trouver une formule explicite de la suite :

$$\begin{cases} \text{Initialisation : } F_0 = 1 \text{ et } F_1 = 1 \\ \text{Formule de rcurrence : } F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

La méthode classique consiste s'intéresser au problème général suivant : existe-t-il une formule explicite pour les suites vérifiant la formule de récurrence précédente. On note S l'ensemble des ces suites :

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n > 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}\}.$$

Nous allons d'abord caractériser les propriétés de S .

- 1) Trouver deux suites appartenant à S . Vous noterez $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ces deux suites.
- 2) Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore un suite de S .
- 3) Soit α un nombre complexe. Vérifier que la suite $\alpha.(u_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\alpha \times u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore un suite de S .
- 4) Soit α un nombre complexe. Vérifier que la suite $\alpha.(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore un suite de S .

Lorsque l'on connaît deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à S , il est facile de calculer de nouvelles suites appartenant à S . Il suffit pour cela de prendre une combinaison linéaire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\alpha.(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta.(v_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- 5) Donner à l'aide de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux nouvelles suites de S .

Lorsqu'un ensemble vérifie un certain nombre de propriétés dont la propriété précédente, on dit qu'il s'agit d'un espace vectoriel.

6) (optionel) Prouver que S est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Pour caractériser S , il suffit donc de trouver un sous-ensemble B de S tel que S est obtenu en faisant des combinaisons linéaires des suites de B . On dit alors que B est un ensemble générateur de S .

$$S = \{\alpha_1 \cdot (u_n^1)_{n \in \mathbb{N}} + \alpha_2 \cdot (u_n^2)_{n \in \mathbb{N}} + \dots + (u_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \in B \text{ et les } \alpha_i \text{ sont presque tous nuls}\}.$$

7) (optionel) Est-ce que la base $B = \{u_n, v_n\}$ est un ensemble générateur de S ?

Si B est un ensemble de suites indépendantes, c'est-à-dire qu'aucune suite de B ne peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'autres suites de B , alors on dit que B est une base.

8) (optionel) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles indépendantes ? Forment-elles une base de S ?

Une question naturelle est de savoir si on peut trouver B de façon à ce qu'il soit fini. La réponse est oui. On peut même démontrer que toute base B de S possède exactement 2 vecteurs. La taille de B correspond la différence entre le plus grand indice et le plus petit indice de la formule de récurrence.

9) (optionel) Prouver que toute base B de S est finie et possède exactement 2 vecteurs.

Ainsi, si vous avez choisi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq \alpha \cdot (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors l'ensemble $B = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ forme une base de S . Vous pouvez donc exprimer n'importe quelle suite de S à l'aide de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

10) Trouver α et β tels que $F_n = \alpha \times u_n + \beta \times v_n$.

Pour trouver une formule explicite de F_n , il nous suffit donc de trouver une base B que l'on sait calculer explicitement. Pour cela il suffit de remarquer que pour certains entiers k et pour certains nombres complexes r , les suites définies par $s_n = n^k \times r^n$ appartiennent à S .

11) Prouver que la suite définie par $s_n = r^n$ appartient à S si et seulement si r est une racine du polynôme $P(t) = t^2 - t - 1$. Calculer ces racines que l'on notera r_+ et r_- .

12) Vérifier que $B = \{(r_+^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_-^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ forme bien une base de S .

Comme la suite de Fibonacci appartient à S , elle va donc être une combinaison linéaire de $(r_+^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_-^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$F_n = \alpha \times r_+^n + \beta \times r_-^n$$

13) Calculer α et β et donner une formule explicite de F_n .

Méthode utilisant les séries génératrices :

Cette méthode consiste à étudier la série suivante :

$$S(t) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n.$$

On commence par prouver que cette série est égale à une fraction rationnelle. Ensuite, le calcul d'une formule explicite de F_n s'obtient en réalisant une décomposition en éléments simples de $S(t)$ et en écrivant chaque terme à l'aide de séries. Voici la méthode détaillée pour l'exercice utilisant la suite :

$$\begin{cases} F_0 = -1 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = 3F_n - 2F_{n-1} \end{cases}$$

- 1) Ecrire explicitement les premiers termes des séries suivantes : $S(t)$, $t \times S(t)$ et $t^2 \times S(t)$
- 2) Montrer qu'il existe deux polynômes $P(t)$ et $Q(t)$ tels que $S(t) \times P(t) = Q(t)$. En déduire une expression de $S(t)$ à l'aide d'une fraction rationnelle.

Toute fraction rationnelle peut être écrite à l'aide de fractions rationnelles élémentaires en utilisant la technique de décomposition en éléments simples (voir prérequis 1).

- 3) Prouver que $S(t) = \frac{-1 + 4t}{2(t - 1/2)(t - 1)} = \frac{3}{t - 1} + \frac{-1}{t - 1/2}$.

Chaque fraction élémentaire peut alors être écrite à l'aide de séries (voir prérequis 2). Ainsi,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-2t} = 1 + 2t + (2t)^2 + (2t)^3 + \dots$$

- 4) Ecrire $S(t)$ à l'aide de séries.
- 5) En identifiant les termes de $S(t) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n$ et ceux obtenus à la question précédente, déduire une formule explicite de F_n .

Prérequis 1 : décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

$$\text{i) } \frac{1}{(t-1)(t-2)} \quad \text{ii) } \frac{t^2+t}{(t-2)^2(t-3)} \quad \text{iii) } \frac{t^3}{t^2+1} \quad \text{iv) } \frac{t^5+t^4}{(t^3-t^2-t+1)^n}$$

Méthode :

La décomposition en éléments simples consiste à écrire toute fraction rationnelle $\frac{P(t)}{Q(t)}$ où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des polynômes à l'aide de fractions élémentaires de la forme $\frac{1}{(t-a)^k}$ où k est un entier positif. En effet toute fraction rationnelle $\frac{P(t)}{Q(t)}$ peut s'écrire de manière unique comme :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = R(t) + \sum_i \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{c_{i,k}}{(t-r_i)^k},$$

où $Q(t) = \prod_i (t-r_i)^{\alpha_i}$ avec $c_{i,k}$ des coefficients à valeurs dans les nombres complexes et $R(t)$ un polynôme.

Par exemple, si l'on pose $P(t) = t^4$ et $Q(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2$ alors, $Q(t) = (t-1)^2(t-2)$ et

$$\frac{t^4}{t^3 - 4t^2 + 5t - 2} = t + 4 - \frac{5}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{16}{t-2}.$$

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les coefficients $c_{i,k}$. En voici deux :

Méthode 1 :

- 1) Mettre au même dénominateur la fraction de la partie de gauche et celle de la partie de droite.

- 2) Identifier les numérateurs. En déduire une équation linéaire en les $c_{i,k}$.
- 3) Résoudre l'équation pour obtenir les coefficients $c_{i,k}$.

Méthode 2 :

Vous pouvez calculer rapidement les coefficients des fractions $\frac{1}{(t-r_i)^{\alpha_i}}$. Par exemple, pour calculer le coefficient $c_{1,2}$ de l'exemple précédent, on multiplie la fraction $\frac{t^4}{t^3-4t^2+5t-2} = R(t) + \frac{c_{1,1}}{t-1} + \frac{c_{1,2}}{(t-1)^2} + \frac{c_{2,1}}{t-2}$ par $(t-1)^2$ ce qui donne :

$$\frac{t^4}{t-2} = R(t) \times (t-1)^2 + c_{1,1} \times (t-1) + c_{1,2} + \frac{c_{2,1}}{t-2} \times (t-1)^2.$$

En remplaçant t par 1, on obtient alors le résultat souhaité :

$$\frac{1^4}{1-2} = -1 = c_{1,2}.$$

La formule exacte s'écrit de la façon suivante :

$$c_{i,\alpha_i} = \lim_{t \rightarrow r_i} \left((t-r_i)^{\alpha_i} \frac{P(t)}{Q(t)} \right).$$

- 1) Calculer tous les coefficients associés aux fractions $\frac{1}{(t-r_i)^{\alpha_i}}$.

Prérequis 2 : calcul de séries

Calculer les séries suivantes :

$$\text{i) } R_1 = \frac{1}{1-t} \quad \text{ii) } R_2 = \frac{1}{(1-t)^2} \quad \text{iii) } R_3 = \frac{1}{(1-t)^3} \quad \text{iv) } R_n = \frac{1}{(1-t)^n}$$

Aide :

Le calcul de R_1 se déduit de l'étude de la somme $\sum_{k=0}^N t^k$ lorsque $t < 1$ et $N \rightarrow \infty$.
Les fractions rationnelles R_2 , R_3 et R_n sont obtenues par dérivation successive de R_1 .