

Nombres de Catalan

IR1 année 2008-2009

Une série formelle est une somme définie à partir d'une suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\sum_{k \geq 0} a_k \cdot t^k$$

où t est une variable formelle.

Dans l'espace des séries formelles, ces objets sont bien définis bien que certaines séries ne convergent pas lorsque l'on substitue t par des réels ou des complexes. L'intérêt des séries formelles ne réside pas dans leurs convergences ni dans leurs évaluations pour une valeur de t donnée, mais dans l'étude des coefficients associés à chaque t^k .

Nous allons, dans ce TD, utiliser les séries formelles pour compter le nombre d'arbres binaires possédant k noeuds ou le nombre de façon d'écrire un mot admissible de parenthèses.

Exercice 1 : Dénombrement des arbres binaires

Un *arbre binaire* est un arbre dont chaque sommet possède 0 ou 2 fils. On rappelle qu'un *noeud* est un sommet possédant 2 fils et qu'une *feuille* est un sommet sans fils. Dans nos figures, les noeuds sont symbolisés par des \circ et les feuilles par des \bullet . La figure 1 donne trois exemples d'arbres binaires.

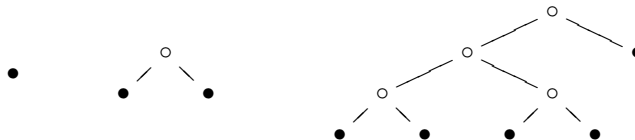


FIG. 1 – Quelques exemples d'arbres binaires

Soit \mathcal{A} la somme formelle des arbres binaires. Soit \mathcal{A}_k la somme formelle des arbres binaires possédant k noeuds.

Dans cet exercice, on souhaite trouver une formule explicite du nombre d'arbres possédant k noeuds.

1) Donner quelques termes de \mathcal{A} .

2) Donner \mathcal{A}_0 , \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_3 .

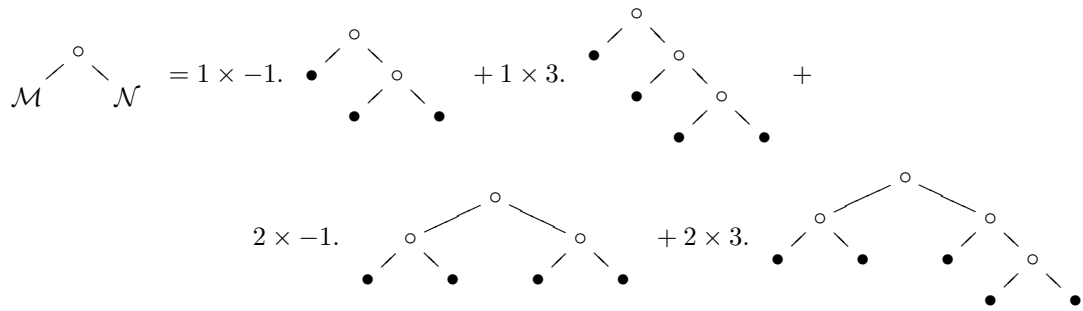
Soient $\mathcal{A}' := \sum_a \text{arbre binaire } c'_a \cdot a$ et $\mathcal{A}'' := \sum_a \text{arbre binaire } c''_a \cdot a$ où c'_a et c''_a sont des nombres complexes. On définit alors

$$\mathcal{A}' \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \mathcal{A}' \quad \mathcal{A}'' \end{array} := \sum_{\substack{a_1 \in \text{support}(\mathcal{A}') \\ a_2 \in \text{support}(\mathcal{A}'')}} c'_{a_1} \times c''_{a_2} \cdot \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ a_1 \quad a_2 \end{array}$$

où $\begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ a_1 \quad a_2 \end{array}$ est l'arbre dont le fils gauche de sa racine r est la racine de a_1 et dont le fils droit de r est la racine de a_2 .

Par exemple, soient $\mathcal{M} = 1 \times \bullet + 2 \times \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$ et $\mathcal{N} = -1 \times \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + 3 \times \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \end{array}$,

alors,



3) Donner les premiers termes de $\mathcal{A} \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{A} \end{array}$.

4) Montrer que la somme formelle \mathcal{A} peut être obtenue récursivement par :

$$\mathcal{A} = \bullet + \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{A} \end{array}$$

On souhaite compter le nombre d'éléments de \mathcal{A}_k que l'on notera $|\mathcal{A}_k|$. Pour cela, on construit sa série génératrice définie par :

$$S(t) = \sum_{k \geq 0} |\mathcal{A}_k| \cdot t^k.$$

5) A l'aide du 4), prouver que

$$S(t) = 1 + t \times (S(t))^2.$$

Pour cela, vous pouvez utiliser la fonction linéaire en les arbres, définie récursivement par

$$f : \begin{array}{ccc} \bullet & \rightarrow & 1 \\ \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ a_1 \quad a_2 \end{array} & \rightarrow & t \times f(a_1) \times f(a_2) \end{array},$$

où a_1 et a_2 sont des arbres. Vous remarquerez que $f(\mathcal{A}) = S(t)$.

6) Prouver que $S(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$.

7) Démontrer que $|\mathcal{A}_k| = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$.

On appelle $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ les nombres de catalans.

8) Vérifier le résultat obtenu sur quelques exemples.

Exercice 2 : Quelques résultats autour de \mathcal{A}_k

1) Montrer que $\mathcal{A}_k = \sum_{u+v=k-1} \mathcal{A}_u \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \mathcal{A}_u \quad \mathcal{A}_v \end{array}$.

2) Prouver que $C_k = \sum_{u+v=k-1} C_u \times C_v$.

3) Tester la formule sur quelques exemples.

Exercice 3 : Arbres binaires et mots admissibles de parenthèses

Un *mot admissible de parenthèses* est un mot constitué uniquement de parenthèses ouvrantes ou fermantes tel que :

- le nombre total de parenthèses ouvrantes est égale au nombre total de parenthèses fermantes,
 - dans chaque préfixe du mot, il y a plus de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.
- 1) Donner des exemples de mots admissibles et non admissibles de parenthèses.
 - 2) Montrer qu'il existe une bijection entre les arbres binaires et les mots admissibles de parenthèses.
 - 3) En déduire le nombre de mots admissibles de parenthèses possibles utilisant k parenthèses ouvrantes.