Feuille 3 - Minimisation des automates et Résiduels

Informatique Théorique 2 - Unité J1INPW11
Licence 3 - Université Bordeaux 1

Exercice 1: Minimisation dťautomates

Minimiser les automates des figures 1 et 2 en utilisant l’algorithme de Moore.

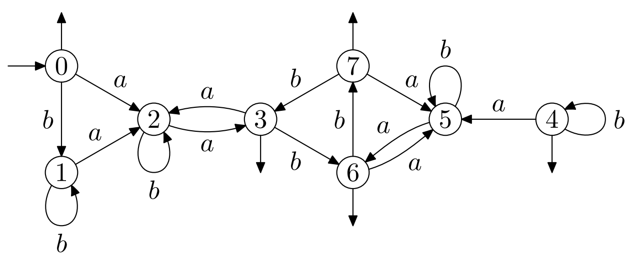

Figure 1 – Automate $\mathcal{A}_1$

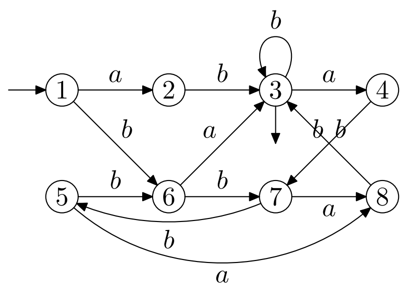

Figure 2 – Automate $\mathcal{A}_2$

Pour chacun des automates des figures 1 et 2, donner les classes d’équivalence de Nérode.

Exercice 2: Division par 3 : automates minimaux

Vérifier si les automates qui reconnaissent les nombres divisibles par 3 (exercice 2 de la feuille 2) sont minimaux.

Exercice 3: Comparer entre eux des expressions rationnelles et des automates

Parmi les expressions rationnelles et les automates suivants dire quels sont les automates et les expressions rationnelles qui représentent le même language.

$$(ab^*a + b(a + b))^*$$

$$(ab + b(a + b))^*$$

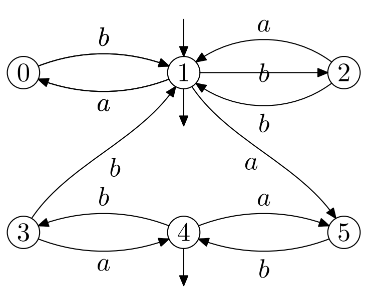

Figure 3 – Automate $\mathcal{A}_3$

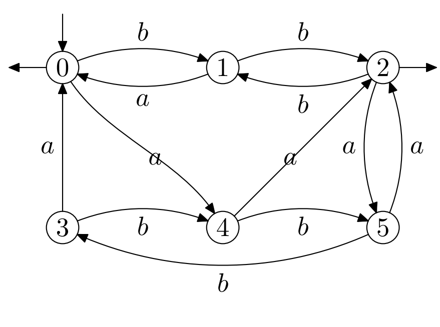

Figure 4 – Automate $\mathcal{A}_4$

Exercice 4: Résiduels

1. Soit $L_1 = \{b, aa, ba, aabab ab\}$ et $L_2 = \{a, b, ba, aab, bab, abab, aaba\}$ deux ensembles de mots. Calculer les résiduels suivants : $L_1^{-1}.L_2$, $L_2^{-1}.L_1$, $\epsilon^{-1}.L_1$, $[(a+b)^*]^{-1}.L_1$ et $\emptyset^{-1}.L_1$.
2. Soit L_1 et L_2 deux ensembles de mots. Si $\epsilon \in L_1$, que peut-on dire sur $L_1^{-1}.L_2$? Même question si $L_2 = \emptyset$.

Exercice 5: Les résiduels d'un language et leurs automates

1. Calculer les résiduels des languages suivants $L_1 = a^*b^*$, $L_2 = a^*ba + b^*aba$ et $L_3 = \{a^nb^n | n \geq 0\}$.
2. Pour chacun des languages de l'exercice 5, dire si ils sont reconnaissables par un automate. Si oui, construire l'automate minimal qui reconnait ce language. Vous pouvez répondre à cette question en construisant l'automate des résiduels.

Rappel : on appelle résiduels d'un language L, les languages R_ϵ, R_a, R_b, R_{aa}, R_{ab}, etc... où $R_u = u^{-1}.L$ et $u \in X^*$.

Exercice 6: Calcul des résiduels d'un automate

Pour chacun des automates de l'exercice 1, calculer les résiduels associés à leur language.

Exercice 7: Déterminisme contre non-determinisme

1. Donnez un automate fini non déterministe avec n états pour le language $L = (a+b)^*a(a+b)^{n-2}$
2. Montrez que tout automate fini déterministe reconnaissant L possède au moins 2^{n-1} états.

Exercice 8

Le jeu du barman aveugle consiste à poser quatre verres en cercle sur un plateau. Les verres peuvent être retournés ou non. Le but du barman est de s'arranger pour que tous les verres soient dans le même sens, mais sans les voir. Le but de son adversaire est qu'il n'y arrive pas. Le jeu se joue par tours. Un tour s'organise comme suit :

- Le barman retourne un ou deux verres de son choix. Pour qu'il ne récupère pas d'information en les touchant on lui met des gants de boxe ;
- L'adversaire fait faire un nombre quelconque de quarts de tours au plateau.

Si le barman place les verres dans le même sens, le jeu s'arrête.

On appelle configuration du plateau à un instant donné la position des verres à cet instant. En numérotant les verres dans l'ordre, on peut représenter une configuration par (haut,bas,bas,haut).

1. En remarquant que pour le barman, les configurations obtenues par rotation du plateau sont équivalentes (i.e. $\forall a, b, c, d$ (a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, d, a, b) et (d, a, b, c) sont équivalents) montrer qu'il y a quatre configurations possibles du plateau et qu'il y a trois actions possibles pour le barman.
2. Représenter les exécutions possibles du jeu par un automate non déterministe.
3. Déterminiser l'automate.

4. En remarquant qu'obtenir une stratégie gagnante pour le barman revient à trouver une série d'actions qui, quelle que soit la configuration de départ, passe par un état final, aider le barman à gagner.

Exercice 9: algorithme de minimisation de Brzozowski

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ un NFA sans transitions-ε. Le langage à gauche $L_g^{\mathcal{A}}(q)$ de l'état $q \in Q$ est le langage accepté par l'automate $\mathcal{A}_g(q) = (Q, \Sigma, \delta, I, q)$. Le langage à droite $L_d^{\mathcal{A}}(q)$ de l'état $q \in Q$ est le langage accepté par l'automate $\mathcal{A}_d(q) = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$.

Soit $d(\mathcal{A})$ l'automate des parties associé à $\mathcal{A}$ (en ne gardant que les états accessibles). Soit $r(\mathcal{A})$ l'automate miroir associé à $\mathcal{A}$ (obtenu en renversant les flèches et en échangeant I et F).

1. Montrer que $r(\mathcal{A})$ reconnaît les miroirs de mots dans $\mathcal{L}(\mathcal{A})$: $\mathcal{L}(r(\mathcal{A})) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^R$.
2. Montrer que le langage à gauche $L_g^{r(\mathcal{A})}(q)$ de l'état q dans $r(\mathcal{A})$ est le miroir du langage à droite $L_d^{\mathcal{A}}(q)$ de q dans $\mathcal{A}$. (Pareil pour gauche et droite inversés.)
3. Montrer que chaque langage à droite $L_d^{d(\mathcal{A})}(R)$ associé à un état R de $d(\mathcal{A})$ est l'union des langages à droite $L_d^{\mathcal{A}}(r)$, où $r \in R$.
4. Montrer que $\mathcal{A}$ est déterministe ssi les langages à gauche associés à ses états sont deux à deux disjoints et $|I| = 1$.
5. Montrer qu'un DFA complet, dont tous les états sont accessibles, est minimal ssi les langages à droite associés à ses états sont deux à deux différents.
6. Montrer que $d(r(d(r(\mathcal{A}))))$ est l'automate minimal de $\mathcal{A}$.