

La décomposition en éléments simples par le dessin

Adrien BOUSSICAULT

Laboratoire d'informatique
IGM, Université Paris-Est

Séminaire IGM - 2009

Introduction

- Réaliser la décomposition en éléments simples à l'aide d'opération sur les posets (ensemble partiellement ordonné)
- Coder chaque poset p à l'aide des fractions rationnelles suivantes:

$$\psi_{12\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_{n-1} - x_n)}$$

$$\Psi_P = \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \psi_w$$

où $\mathcal{L}(P)$ sont les extension linéaire de P .

Plan

- 1 Définitions
- 2 Quelques résultats
- 3 Quelques opérations sur les posets et les fractions
- 4 Décomposition en éléments simples

Plan

1 Définitions

- Poset et diagramme de Hasse
- Extensions linéaires d'un poset

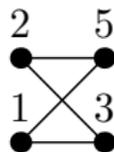
2 Quelques résultats

3 Quelques opérations sur les posets et les fractions

4 Décomposition en éléments simples

Poset et diagramme de Hasse

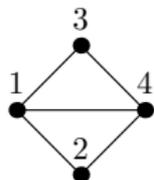
Poset ou ensemble partiellement ordonné



$$1 \leq 3 \quad 1 \leq 5$$

$$2 \leq 3 \quad 2 \leq 5$$

2, 1 minimaux et 5, 3 maximaux

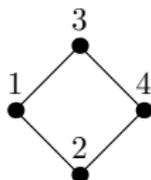


$$1 \leq 2 \quad 1 \leq 3 \quad 1 \leq 4$$

$$2 \leq 4 \quad 3 \leq 4$$

1 minimaux et 4 maximaux

Diagramme de Hasse $DH(P)$:

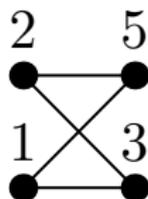


$$1 \preceq 3 \preceq 4$$

$$1 \preceq 2 \preceq 4$$

Extensions linéaires d'un poset

Ensemble totalement ordonné compatible avec l'ordre de P



Extensions linéaires du poset ci dessus :

$$\mathcal{L}(P) = \{1235, 1253, 2135, 2153\}$$

Rappel : Objet principal

$$\psi_{12\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_{n-1} - x_n)}$$

$$\Psi_P = \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \psi_w$$

Exemple

$$P = \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & \diagup \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{array} \rightarrow 2143 + 2134 + 1243 + 1234$$

$$\Psi_P = \psi_{2143} + \psi_{2134} + \psi_{1243} + \psi_{1234}$$

$$\Psi_P = \frac{x_2 + x_1 - x_4 - x_3}{(x_2 - x_4) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_1 - x_3)}$$

Plan

1 Définitions

2 Quelques résultats

- Dénominateur de Ψ_P
- Posets non connexes
- Posets sans cycle
- Posets avec un unique cycle

3 Quelques opérations sur les posets et les fractions

4 Décomposition en éléments simples

Dénominateur de la fraction réduite

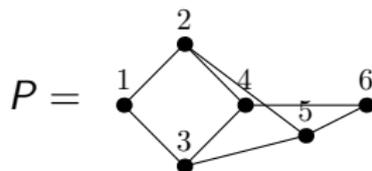
Théorème

Soit P un poset, et $D(\Psi_P)$ le dénominateur de la fraction réduite de Ψ_P alors,

$$D(\Psi_P) = \prod_{(a,b) \in DH(P)} (x_a - x_b)$$

Le degré du numérateur est égal au nombre de cycles du diagramme de Hasse de P .

Exemple



$$\begin{aligned} N(\Psi_P) = & -x_1x_2x_3 + x_1x_2x_6 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_6 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_5 \\ & - x_1x_4x_6 - x_2x_3x_6 - x_2x_4x_5 - x_1x_5x_6 - x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 \end{aligned}$$

$$D(\Psi_P) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)(x_4 - x_6)(x_3 - x_5)(x_5 - x_6)$$

Poset non connexes

Propriété

Soit P un poset, le diagramme de Hasse de P est connexe si et seulement si $\Psi_P \neq 0$

Exemple :

$$\overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet} = 0$$

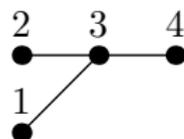
Poset sans cycle

Propriété

Si le diagramme de Hasse de P ne possède pas de cycle alors

$$N(\Psi_P) = 1$$

Exemple


$$= \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)}$$

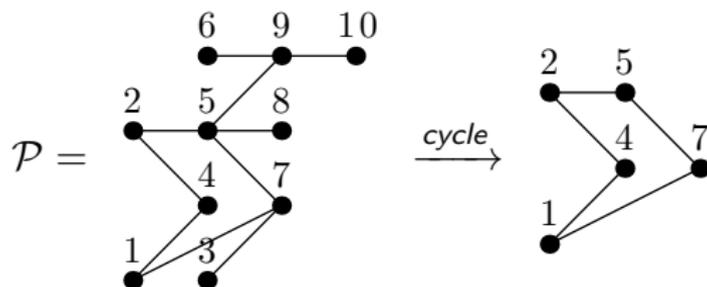
Poset possédant 1 seul cycle

Propriété

Si le diagramme de Hasse de P possède un seul cycle noté C alors

$$N(\Psi_P) = \sum_{i \in \min(C)} x_i - \sum_{j \in \max(C)} x_j$$

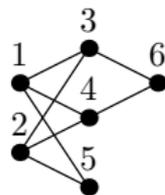
Exemple : $Num(\Psi_{\mathcal{P}}) = x_1 + x_2 - x_4 - x_7$



Plan

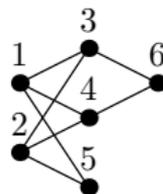
- 1 Définitions
- 2 Quelques résultats
- 3 Quelques opérations sur les posets et les fractions
 - Tri d'un sous poset
 - Inclusion-Exclusion
 - Factorisation par chaîne
- 4 Décomposition en éléments simples

Tri d'un sous-poset : Exemple

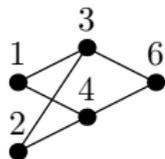


Tri d'un sous-poset : Exemple

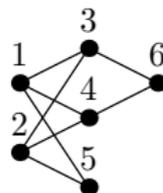
← Choix d'un
sous-poset



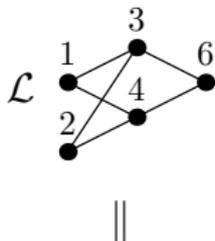
Tri d'un sous-poset : Exemple



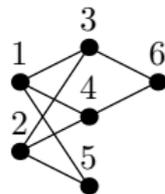
← Choix d'un
sous-poset



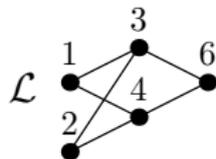
Tri d'un sous-poset : Exemple



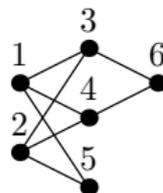
← Choix d'un
sous-poset



Tri d'un sous-poset : Exemple



← Choix d'un
sous-poset



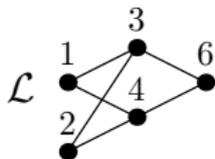
||

$$w_1 = \begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 6 \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

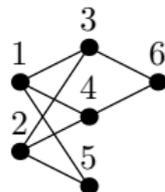
$$w_2 = \begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 1 & & 3 & & 4 & & 6 \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

⋮

Tri d'un sous-poset : Exemple



← Choix d'un
sous-poset



||



Tri de P
selon w_1 →

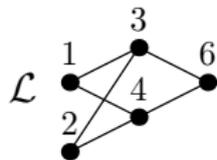


Tri de P
selon w_2 →

⋮

⋮

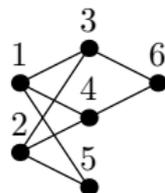
Tri d'un sous-poset : Exemple



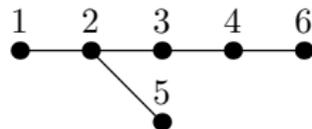
||



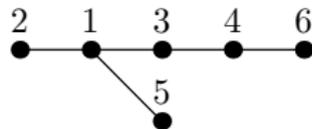
← Choix d'un
sous-poset



Tri de P
selon w_1 →



Tri de P
selon w_2 →

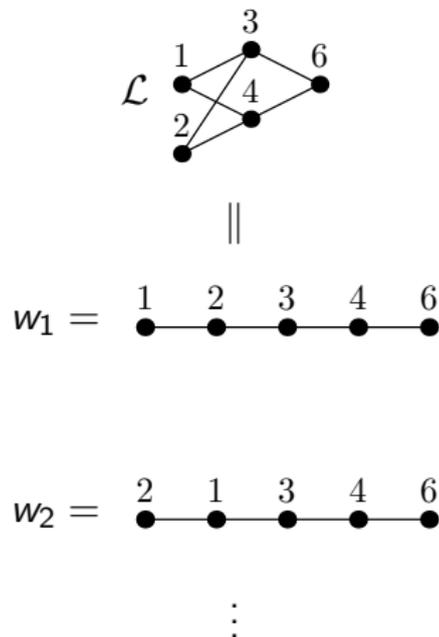


⋮

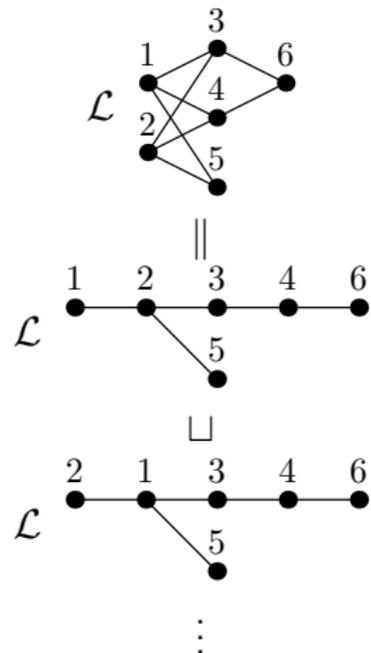
⋮

⋮

Tri d'un sous-poset : Exemple



← Choix d'un sous-poset



Tri d'un sous poset

Propriété

Soit P un poset, $I \subset P$ et P_I le poset induit par I alors,

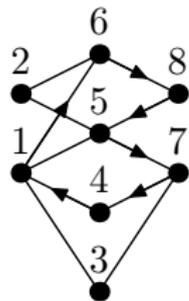
$$\mathcal{L}(P) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(P_I)} \mathcal{L}(P_w)$$

où P_w est le poset obtenu par réunion des relations d'ordre de P et de w .

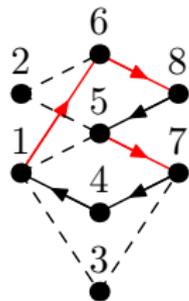
Conséquence :

$$\Psi_P = \sum_{w \in \mathcal{L}(P_I)} \Psi_{P_w}$$

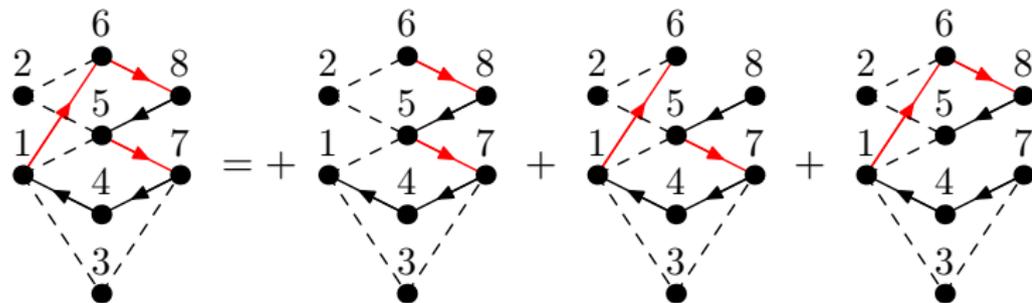
Inclusion-Exclusion



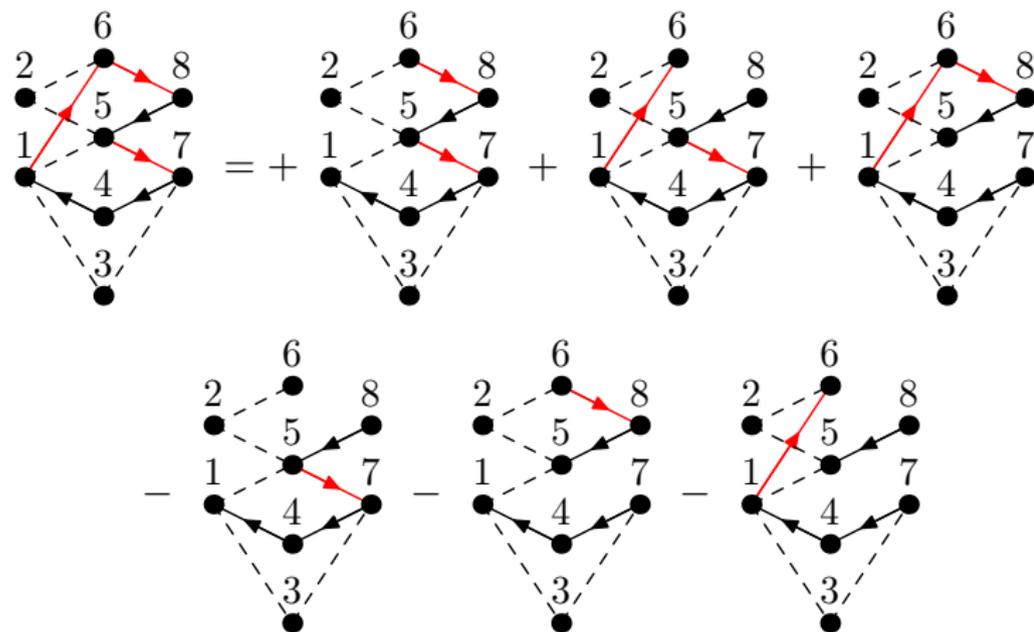
Inclusion-Exclusion



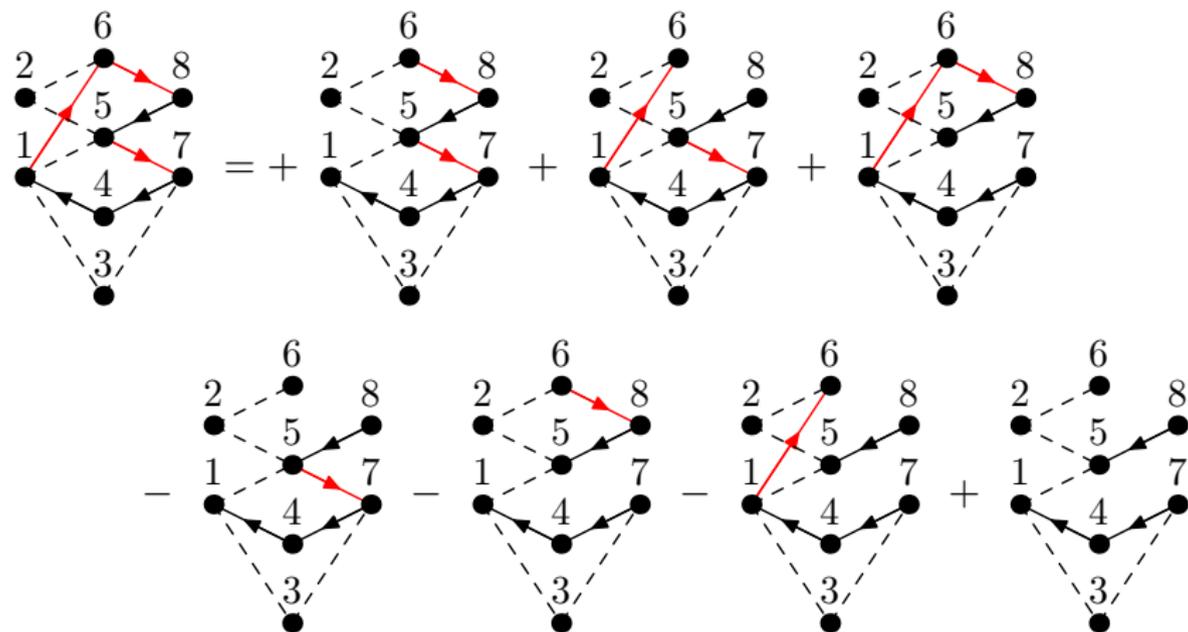
Inclusion-Exclusion



Inclusion-Exclusion



Inclusion-Exclusion



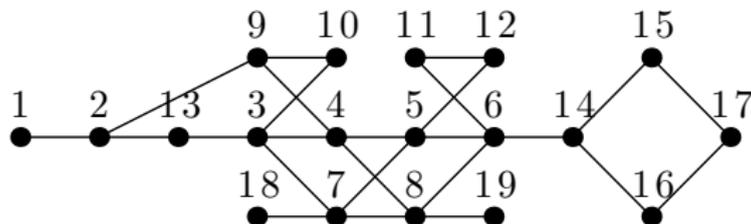
Inclusion-Exclusion

Théorème

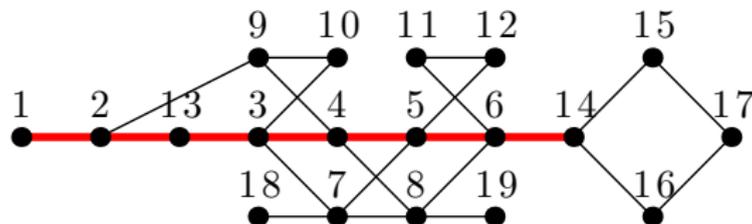
Soit C un circuit obtenu en orientant un cycle de $DH(P)$. Soit $HE(C)$ l'ensemble des arêtes qui ont les mêmes orientations que celles de $DH(P)$, alors

$$\Psi_P = \sum_{E \subset HE(C)} (-1)^{|E|-1} \Psi_{P \setminus E}$$

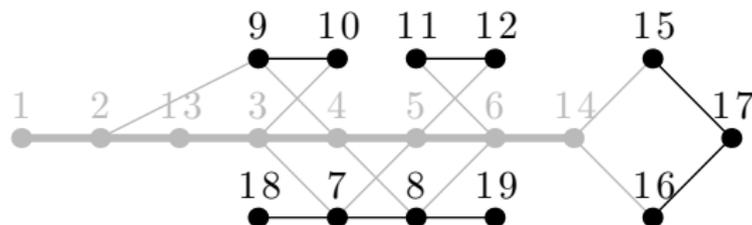
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



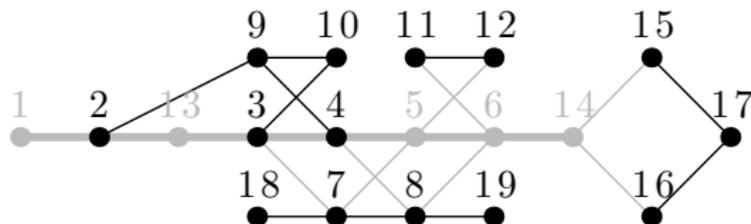
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



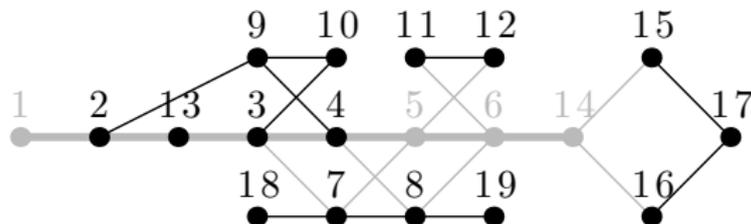
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



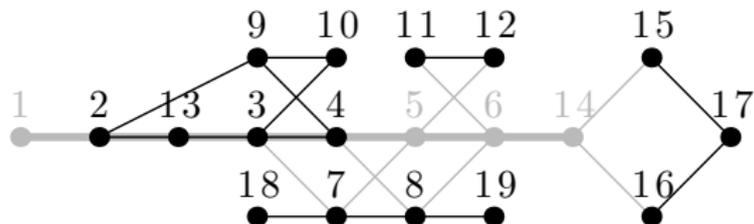
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



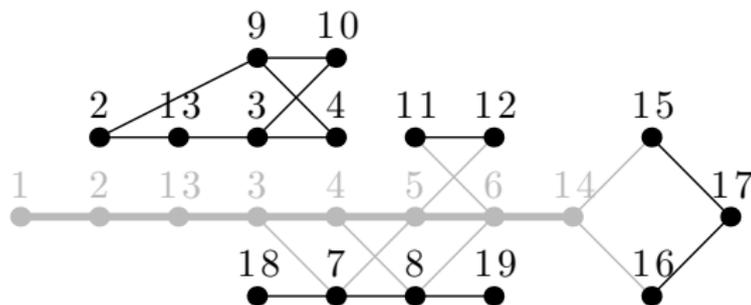
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



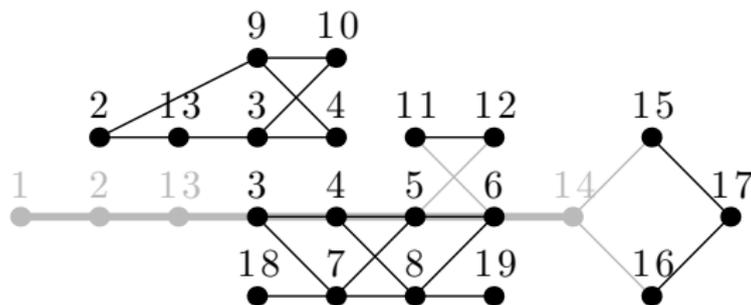
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



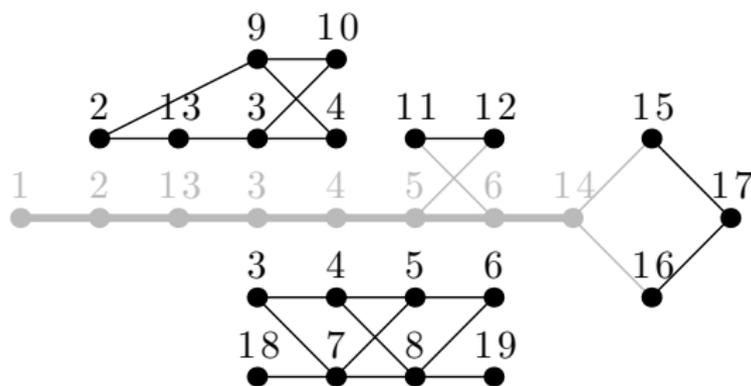
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



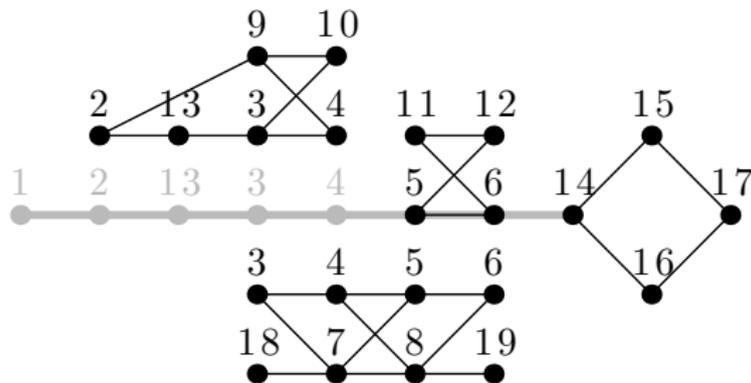
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



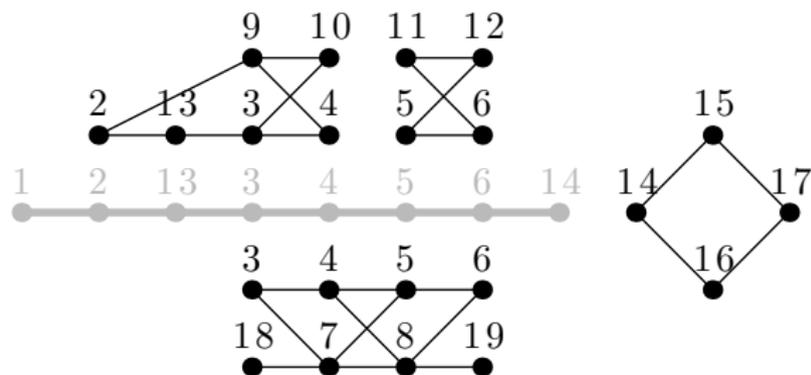
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



Factorisation par chaîne

$$N \left(\begin{array}{ccccccccccc} & & & 9 & 10 & 11 & 12 & & 15 & & \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & & \\ & & & / \quad \backslash & / \quad \backslash & / \quad \backslash & / \quad \backslash & & / \quad \backslash & & \\ 1 & 2 & 13 & 3 & 4 & 5 & 6 & 14 & & 17 & \\ \bullet & & \bullet & \\ & & & \backslash \quad / & \backslash \quad / & \backslash \quad / & \backslash \quad / & & \backslash \quad / & & \\ & & & 18 & 7 & 8 & 19 & & 16 & & \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & & \end{array} \right) =$$

$$N \left(\begin{array}{cccc} & 9 & 10 & \\ & \bullet & \bullet & \\ & / \quad \backslash & / \quad \backslash & \\ 2 & 13 & 3 & 4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ / \quad \backslash & / \quad \backslash & / \quad \backslash & / \quad \backslash \\ 18 & 7 & 8 & 19 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{cc} 11 & 12 \\ \bullet & \bullet \\ / \quad \backslash \\ 5 & 6 \\ \bullet & \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{ccc} & 15 & \\ & \bullet & \\ & / \quad \backslash & \\ 14 & & 17 \\ \bullet & & \bullet \\ & \backslash \quad / & \\ & 16 & \end{array} \right)$$

Factorisation par chaîne (autre exemple)

$$N \left(\begin{array}{c} \text{7} \quad \text{8} \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \quad \text{6} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{9} \\ \bullet \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{c} \text{7} \\ \bullet \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} \text{8} \\ \bullet \\ \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \quad \text{6} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{9} \\ \bullet \end{array} \right)$$

The diagram illustrates the decomposition of a planar graph into three smaller planar graphs. The top graph has vertices 1-6 in a horizontal line, with vertices 7 and 8 above and 9 below. Edges connect (1,7), (2,7), (2,8), (3,8), (4,8), (5,8), (6,8), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), and (9,3), (9,4), (9,5), (9,6). The bottom edge (1-2-3-4-5-6) is highlighted in red. This graph is equal to the product of three graphs: the first graph has vertices 1-4 and 7, with edges (1,7), (2,7), (2,3), (3,4), (1,2), (2,3), (3,4); the second graph has vertices 2-5 and 8, with edges (2,8), (3,8), (4,8), (5,8), (2,3), (3,4), (4,5); the third graph has vertices 3-6 and 9, with edges (3,9), (4,9), (5,9), (6,9), (3,4), (4,5), (5,6).

Factorisation par chaîne (théorème)

Théorème

Soient P un poset, c une chaîne de P et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c , alors

$$N(\Psi_P) = \prod_{j=1}^K N(\Psi_{\overline{\mathcal{C}}_j})$$

De plus, $\overline{\mathcal{C}}_j = P.\mathbf{H}.\overline{\mathcal{C}}_j$.

Plan

- 1 Définitions
- 2 Quelques résultats
- 3 Quelques opérations sur les posets et les fractions
- 4 Décomposition en éléments simples**
 - Rappel
 - Cas sans numérateur
 - Cas avec numérateur

Rappel au sujet de la décomposition en éléments simples

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-2}$$

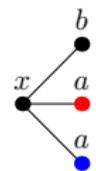
Cas sans numérateur

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x-b)} &= \\ &= \begin{array}{c} x \quad a \quad b \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ x \quad \bullet \\ \bullet \\ a \end{array} \\ &= \frac{1}{(x-a)(a-b)} + \frac{1}{(x-b)(b-a)} \\ &= \frac{\frac{1}{a-b}}{x-a} + \frac{\frac{1}{b-a}}{x-b} \end{aligned}$$

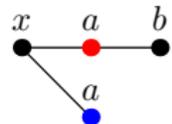
Cas sans numérateur (autre exemple)

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)}$$

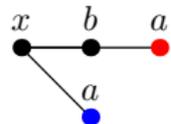
=



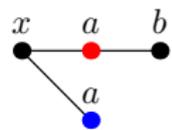
=



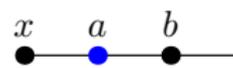
+



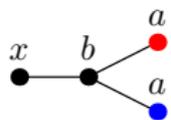
=



+



+



=

$$\frac{1}{a-b} \frac{1}{(x-a)^2}$$

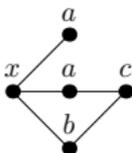
+

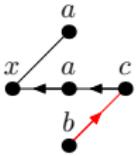
$$\frac{-1}{(b-a)^2} \frac{1}{x-a}$$

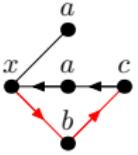
+

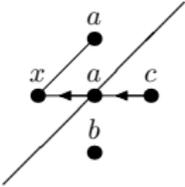
$$\frac{1}{(b-a)^2} \frac{1}{x-b}$$

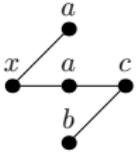
Cas avec numérateur

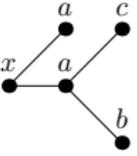
$$\frac{x - c}{(x - a)^2(x - b)} = (a - c)(b - c) \cdot$$


$$=$$


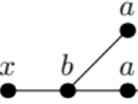
$$+$$


$$-$$


$$=$$


$$+$$


$$+$$


$$+$$


$$=$$

$$\frac{1}{(a-c)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(a-b)}$$

$$+$$

$$\frac{-1}{(b-a)^2(a-c)}$$

$$+$$

$$\frac{1}{(b-a)^2(a-c)}$$

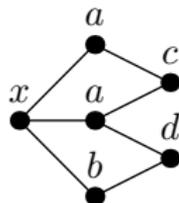
$$\frac{1}{x-a}$$

$$+$$

$$\frac{1}{x-b}$$

Cas avec numérateur (autre exemple)

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)^2(x-b)} = (a-c)^2(a-d)(b-d) \cdot$$

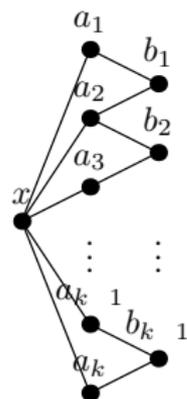


$$N \left(\begin{array}{c} a \\ x \text{ --- } a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{c} x \text{ --- } a \\ b \\ d \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} a \\ x \text{ --- } a \\ c \end{array} \right)$$

Cas avec numérateur (cas général)

Soit $(a_i)_i$ et $(b_j)_j$ tels que pour tout indices i et j , a_i est différent de b_j , alors

$$\frac{\prod_j (x - b_j)}{\prod_i (x - a_i)} = \prod_i (a_i - b_i)(a_{i+1} - b_i) \quad .$$



Conclusion

Points positifs:

- Décomposition en éléments simples à l'aide de dessins
- Liens entre posets et décomposition en éléments simples

Points négatifs:

- Méthode lente