

Chaînes de couvertures et sommes de Greene

Adrien BOUSSICAULT

Laboratoire d'informatique
IGM, Université Marne-la-vallée

International Conference on Enterprise and Scientific Computing
Systems, Douala - Cameroun, 9-12 april 2007

Études des fractions rationnelles

Les fractions de Greene :

$$\psi_{123\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_{n-1} - x_n)}$$

But: caractériser le numérateur et le dénominateur.

Introduction (suite)

$$\mathcal{P} = \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & \diagup \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{array} \rightarrow 2143 + 2134 + 1243 + 1234$$

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \psi_{2143} + \psi_{2134} + \psi_{1243} + \psi_{1234}$$

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{x_2 + x_1 - x_4 - x_3}{(x_2 - x_4) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_1 - x_3)}$$

Introduction (suite)

La somme s'écrit simplement lorsque les poset sont sans cycle.
Cas des poset avec plusieurs cycles ?

Motivation : mieux comprendre les variétés de Schubert.

Une variété indexée par une permutation σ est non-singulière si et seulement si $\overleftarrow{\sigma}$ évite 1324 et 2143.

Comprendre le cas des permutations qui n'évitent pas 1324 et 2143 pourrait nous aider à mieux cerner les cas singulier des variétés de Schubert.

Plan

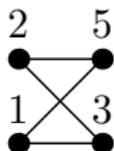
- 1 Théorème de Greene
- 2 Fonctions symétriques
- 3 Opérations sur les poset et les fractions
- 4 Conséquences de ces opérations
- 5 Quelques numérateurs particuliers
- 6 Factorisation par chaîne de couvertures

Plan

- 1 Théorème de Greene
 - Poset et diagramme de Hasse
 - Extensions linéaires d'un poset
 - Poset planaires et théorème de Greene
- 2 Fonctions symétriques
- 3 Opérations sur les poset et les fractions
- 4 Conséquences de ces opérations
- 5 Quelques numérateurs particuliers
- 6 Factorisation par chaîne de couvertures

Poset et diagramme de Hasse

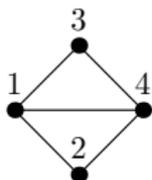
Poset ou ensemble partiellement ordonné



$$1 \leq 3 \quad 1 \leq 5$$

$$2 \leq 3 \quad 2 \leq 5$$

2, 1 minimaux et 5, 3 maximaux

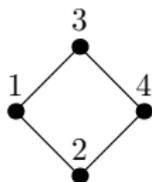


$$1 \leq 2 \quad 1 \leq 3 \quad 1 \leq 4$$

$$2 \leq 4 \quad 3 \leq 4$$

1 minimaux et 4 maximaux

Diagramme de Hasse $H(\mathcal{P})$:

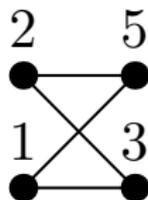


$$1 \preceq 3 \preceq 4$$

$$1 \preceq 2 \preceq 4$$

Extensions linéaires d'un poset

Ensemble totalement ordonné compatible avec l'ordre de P



Extensions linéaires du poset ci dessus :

$$\mathcal{L}(P) = \{1235, 1253, 2135, 2153\}$$

L'objet de l'étude (rappel)

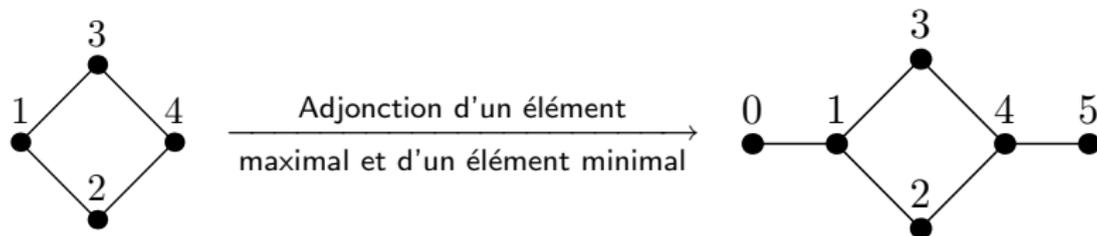
$$\mathcal{P} = \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ 2 & 4 \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{array} \rightarrow 2143 + 2134 + 1243 + 1234$$

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \psi_{2143} + \psi_{2134} + \psi_{1243} + \psi_{1234}$$

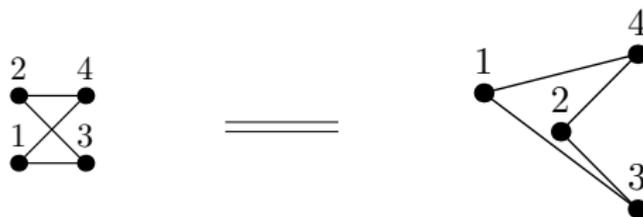
$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{x_2 + x_1 - x_4 - x_3}{(x_2 - x_4) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_1 - x_3)}$$

Poset planaires

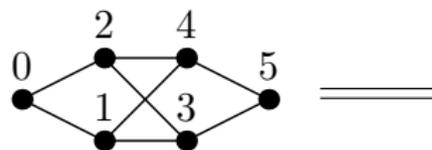
Un poset est planaire si sont diagramme de Hasse auquel (où l'on ajoute un élément minimal et un élément maximal) peut être dessiné dans le plan sans chevauchement d'arêtes.



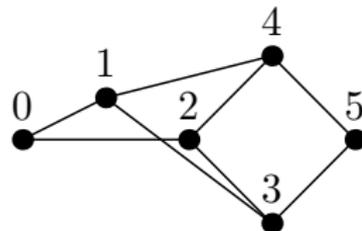
Poset non planaires



Adjonction
d'un élément
maximal et d'un
élément minimal ↓



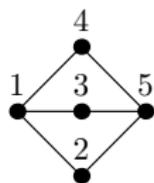
Adjonction
d'un élément
maximal et d'un
élément minimal ↓



Fonction de Möbius d'un poset

Soit \mathcal{P} un poset et x et y deux éléments du poset alors

$$\mu_{\mathcal{P}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu_{\mathcal{P}}(x, z) & \text{si } x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\mu_{\mathcal{P}}(1, 1) = 1$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(1, 2) = -1$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(1, 3) = -1$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(1, 4) = -1$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(1, 5) = 2$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(2, 5) = -1$$

$$\mu_{\mathcal{P}}(3, 5) = -1$$

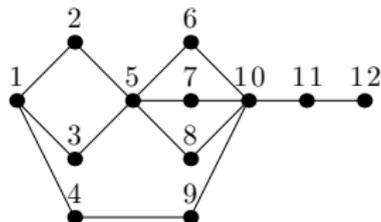
$$\mu_{\mathcal{P}}(4, 5) = -1$$

Théorème de Greene

Théorème

Soit \mathcal{P} un poset planaire

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \sum_{w \in \mathcal{L}(\mathcal{P})} \psi_w = \prod_{y, z \in \mathcal{P}} (x_y - x_z)^{\mu_{\mathcal{P}}(y, z)}$$



$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{(x_1 - x_5) \cdot (x_5 - x_{10})^2 \cdot (x_1 - x_{10})}{\prod_{(a,b) \text{ arête de } H(\mathcal{P})} (x_a - x_b)}$$

Plan

- 1 Théorème de Greene
- 2 Fonctions symétriques
 - Fonctions symétriques monômial, élémentaires et complète
 - Fonctions de Schur
 - Poset bipartites complets
- 3 Opérations sur les poset et les fractions
- 4 Conséquences de ces opérations
- 5 Quelques numérateurs particuliers
- 6 Factorisation par chaîne de couvertures

Anneaux des fonctions symétriques

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$$

où S_n est l'ensemble des permutations de taille n .

Exemples de fonctions symétriques à 3 variables :

$$x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3$$

Fonctions symétriques monômiales

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une partition et le monôme $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$.

$$m_\lambda := \sum_{m \in \{x^{\lambda \cdot \sigma} \mid \sigma \in S_n\}} m$$

Exemple de fonction monômiale à 3 variables :

$$m_{210} = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$$

Fonctions élémentaires

$$e_r := m_{(1^r)} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$$

$$E_t = \sum_i e_i \cdot t^i = \prod_i (1 + x_i \cdot t)$$

Les fonctions élémentaires à 3 variables :

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$e_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$e_3 = x_1 x_2 x_3$$

Fonctions complètes

$$h_r := \sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda$$

$$H_t = \sum_i h_i \cdot t^i = \prod_i \frac{1}{1 - x_i \cdot t}$$

Exemples de fonctions complètes à 3 variables :

$$h_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$h_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$h_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1x_2x_3$$

Fonctions complètes sur des différences d'alphabet

$$H_t \cdot E_{-t} = 1$$

$$H_t(X + Y) = H_t(X) \cdot H_t(Y)$$

Si on pose :

$$H_t(X - Y) = H_t(X) \cdot H_t(Y)^{-1}$$

On obtient alors que :

$$H_t(X - Y) = H_t(X) \cdot E_{-t}(Y)$$

On peut définir une fonction complète sur une différence d'alphabets :

$$h_n(X - Y) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot h_{n-i}(X) \cdot e_i(Y)$$

Fonctions de Schur

Soit v un vecteur de \mathbb{Z}^n , $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ deux ensembles de variables.

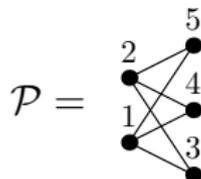
$$S_u(X - Y) = |h_{v_i - i + j}(X - Y)|_{1 \leq i, j \leq k}$$

Exemple de fonction de Schur à 3 variables ($X = \{x_1, x_2, x_3\}$):

$$S_{321}(X) = \begin{vmatrix} h_{0+3} & h_{-1+2} & h_{-2+1} \\ h_{1+3} & h_{0+2} & h_{-1+1} \\ h_{2+3} & h_{1+2} & h_{0+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_3 & h_1 & h_{-1} \\ h_4 & h_2 & h_0 \\ h_5 & h_3 & h_1 \end{vmatrix}$$

Par convention $h_{-1} = 0$ et $h_0 = 1$.

Poset bipartites complets



$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = S_{(1)^2}(1 + 2 - 3 - 4 - 5)$$

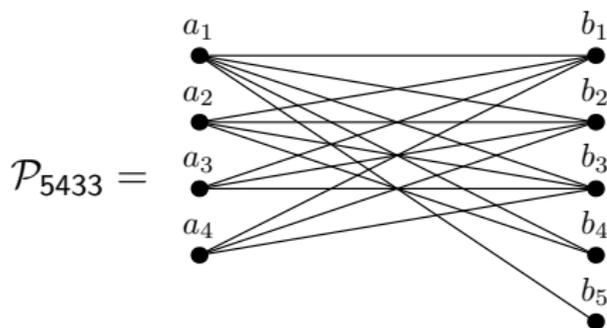
Proposition

Soit \mathcal{P} un poset dont le diagramme de Hasse est bipartite et complet, alors

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = S_{(\text{Card}(\max(\mathcal{P})) - 1)(\text{Card}(\min(\mathcal{P})) - 1)}(\min(\mathcal{P}) - \max(\mathcal{P}))$$

Poset de partitions

On note \mathbb{Y} les polynômes de Schubert.



$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_{5433}}) = \mathbb{Y}_{0,3,2,2}$$

Proposition

Soit λ une partition, alors

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_\lambda}) = \mathbb{Y}_{0,\lambda_2-1,\dots,\lambda_n-1}$$

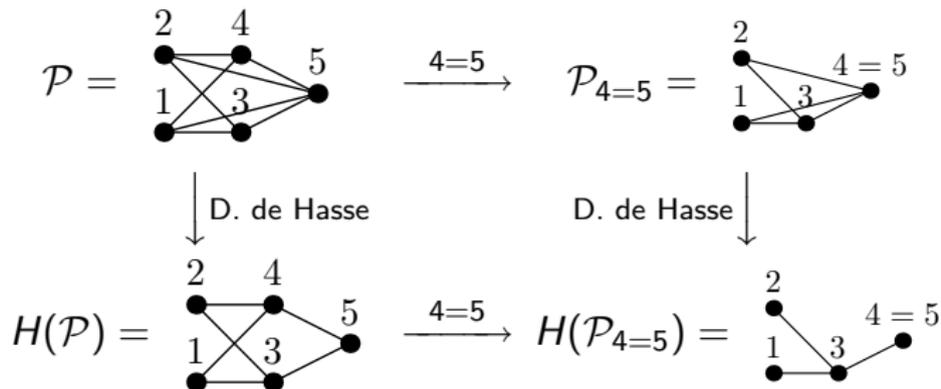
Le numérateur de la fraction rationnelle associée à ce poset n'est en général pas symétrique.

Plan

- 1 Théorème de Greene
- 2 Fonctions symétriques
- 3 Opérations sur les poset et les fractions**
 - Contractions et résidus
 - Suppression d'un élément extremal
 - Émondage
 - Ordonnancement
- 4 Conséquences de ces opérations
- 5 Quelques numérateurs particuliers
- 6 Factorisation par chaîne de couvertures

Contractions et résidus

Condition de contraction : l'arête choisie doit être une arête appartenant au diagramme de Hasse



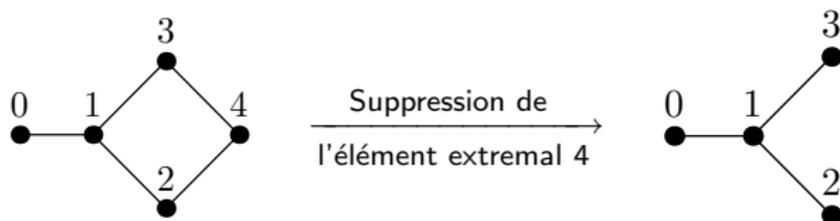
Contractions et Résidus (suite)

Théorème

Soient a et b deux éléments d'un poset \mathcal{P} .

$$((x_a - x_b) \cdot \Psi_{\mathcal{P}})|_{x_b=x_a} = \begin{cases} \Psi_{\mathcal{P}_{b=a}} & \text{si } (a, b) \text{ est une arête de } H(\mathcal{P}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Suppression d'un élément extrémal



Suppression d'un élément extremal (suite)

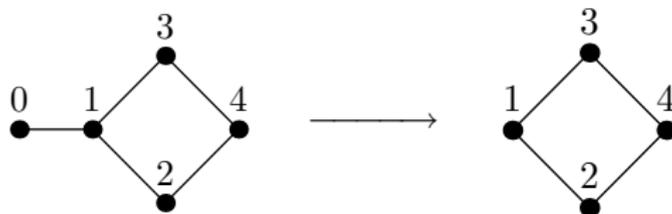
Théorème

Soit a un élément d'un poset \mathcal{P} .

$$\lim_{x_a \rightarrow +\infty} (x_a \cdot \Psi_{\mathcal{P}}) = \begin{cases} -\Psi_{\mathcal{P} \setminus a} & \text{si } a \text{ est maximal,} \\ \Psi_{\mathcal{P} \setminus a} & \text{si } a \text{ est minimal,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Émondage

Sommet libre : Sommet appartenant à une unique arête.



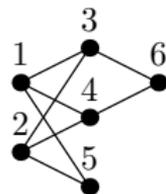
Émondage (suite)

Proposition

Soit a un élément d'un poset connexe tel que a est un sommet libre du diagramme de Hasse de \mathcal{P} . Soit b l'unique sommet tel que $b \preceq a$ or $a \preceq b$. Alors

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \begin{cases} \Psi_{\mathcal{P} \setminus \{a\}} \cdot \frac{1}{x_a - x_b} & \text{si } a \text{ est minimal,} \\ \Psi_{\mathcal{P} \setminus \{a\}} \cdot \frac{1}{x_b - x_a} & \text{si } a \text{ est maximal.} \end{cases}$$

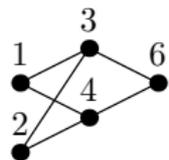
Ordonnancement



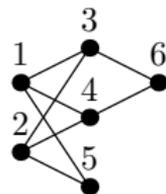
Ordonnement



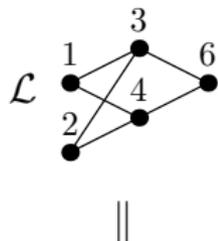
Ordonnement



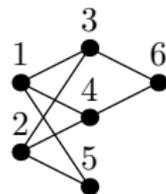
← Sous-poset
de \mathcal{P}



Ordonnement

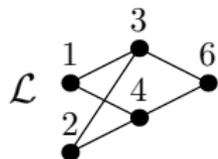


Sous-poset
de \mathcal{P}

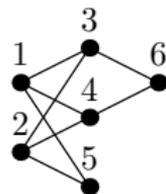


||

Ordonnement



Sous-poset
←
de \mathcal{P}



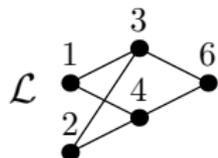
||

$$w_1 = \begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 6 \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

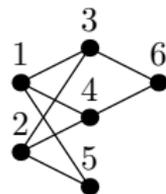
$$w_2 = \begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 1 & & 3 & & 4 & & 6 \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

⋮

Ordonnement



Sous-poset
de \mathcal{P}



||



Ordonnement
de \mathcal{P} selon w_1

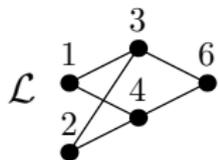


$\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_{w_2}$

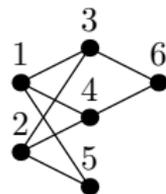
⋮

⋮

Ordonnement



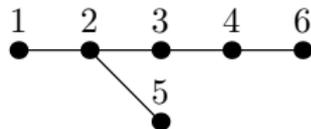
Sous-poset
de \mathcal{P}



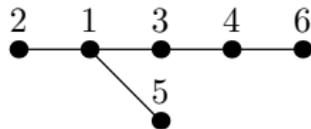
||



Ordonnement
de \mathcal{P} selon w_1



$\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_{w_2}$

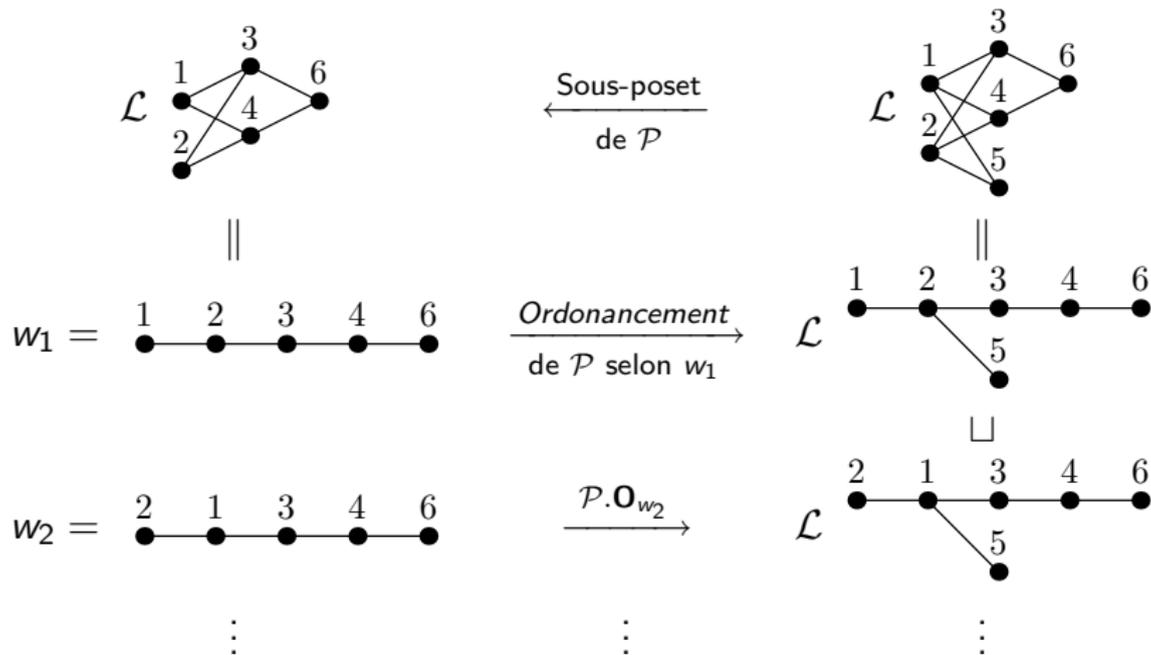


⋮

⋮

⋮

Ordonnement



Ordonnancement (suite)

Proposition

Soit \mathcal{X} un sous-poset d'un poset \mathcal{P} , alors

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \sum_{w \in \mathcal{L}(\mathcal{X})} \Psi_{\mathcal{P} \cdot \mathbf{0}_w}$$

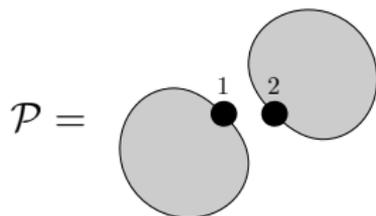
Plan

- 1 Théorème de Greene
- 2 Fonctions symétriques
- 3 Opérations sur les poset et les fractions
- 4 Conséquences de ces opérations**
 - Poset non connexes
 - Numérateur et dénominateur de la fraction réduite $\Psi_{\mathcal{P}}$
 - Décontraction et poset bipartite
- 5 Quelques numérateurs particuliers
- 6 Factorisation par chaîne de couvertures

Poset non connexes

Proposition

Soit \mathcal{P} un poset, le diagramme de Hasse de \mathcal{P} est connexe si et seulement si $\Psi_{\mathcal{P}} \neq 0$.



$$\Psi_{\mathcal{P}} = 0$$

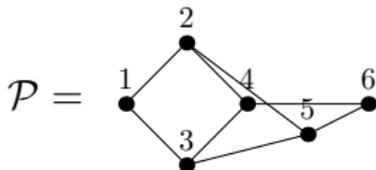
Preuve : contraction + théorème de Greene.

Dénominateur réduit

Corollaire

Soit \mathcal{P} un poset connexe, alors :

$$\text{Denominateur}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \prod_{(a,b) \text{ arête de } H(\mathcal{P})} (x_a - x_b).$$



$$\text{Den}(\Psi_{\mathcal{P}}) =$$

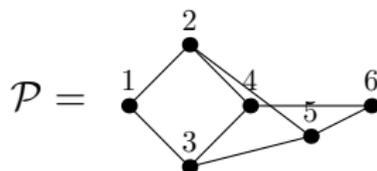
$$(x_1 - x_3) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_5 - x_6) \cdot (x_4 - x_6) \cdot (x_3 - x_5) \cdot (x_2 - x_5) \cdot (x_3 - x_4) \cdot (x_2 - x_4)$$

Preuve : la contraction + théorème sur les composantes connexes.

Degré du numérateur

Corollaire

Soit \mathcal{P} un poset connexe, le degré du numérateur de $\Psi_{\mathcal{P}}$ est égal au nombre de cycles dans le diagramme de Hasse non orienté de \mathcal{P} .

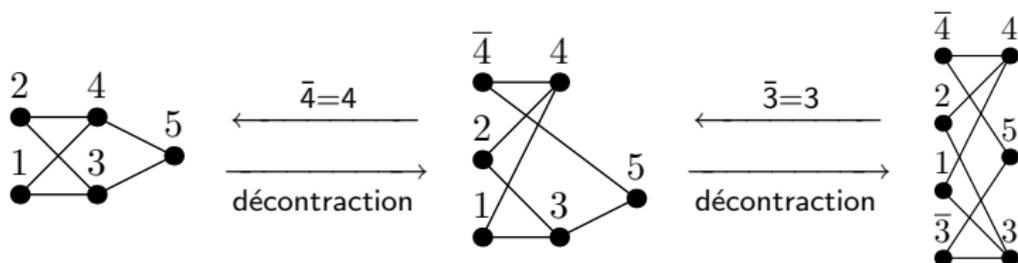


$$\text{Num}(\Psi_{132546}) = -x_1x_2x_3 + x_1x_2x_6 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_6 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_5 - x_1x_4x_6 - x_2x_3x_6 - x_2x_4x_5 - x_1x_5x_6 - x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6$$

Preuve : Formule d'Euler et caractérisation de dénominateur réduit.

Décontraction et poset bipartite

Tout calcul de fraction rationnelle d'un poset peut se ramener au calcul d'une fraction rationnelle associée à un poset bipartite à l'aide des opérations de contraction et de décontraction.



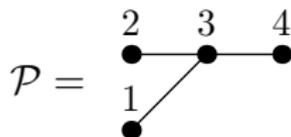
Plan

- 1 Théorème de Greene
- 2 Fonctions symétriques
- 3 Opérations sur les poset et les fractions
- 4 Conséquences de ces opérations
- 5 Quelques numérateurs particuliers**
 - Poset acycliques
 - Poset possédant 1 cycle
- 6 Factorisation par chaîne de couvertures

Poset acyclic

Proposition

Le diagramme de Hasse est sans cycle si et seulement si $\text{Num}(\mathcal{P}) = 1$.



$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{1}{(x_2 - x_3) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_3 - x_4)}$$

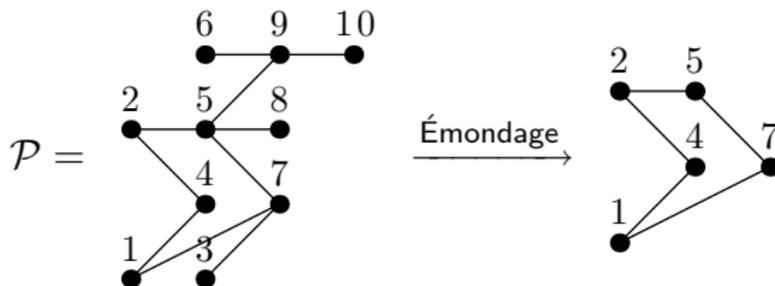
Poset possédant 1 cycle

Proposition

Soit \mathcal{P} un poset connexe possédant un unique cycle, alors

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \sum_{i \in \min(\text{Emonl}(\mathcal{P}))} x_i - \sum_{i \in \max(\text{Emon}(\mathcal{P}))} x_i.$$

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = x_1 + x_2 - x_4 - x_7$$

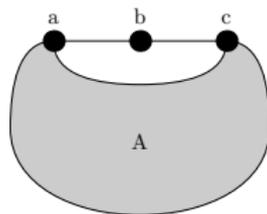


Plan

- 1 Théorème de Greene
- 2 Fonctions symétriques
- 3 Opérations sur les poset et les fractions
- 4 Conséquences de ces opérations
- 5 Quelques numérateurs particuliers
- 6 Factorisation par chaîne de couvertures**
 - Factorisation par arc
 - Factorisation par chaîne
 - D'autres factorisations

Les arcs

(a, b, c) est un arc d'un poset \mathcal{P} si les seules relations de couvertures possédant comme sommet b sont $a \preceq b$ et $b \preceq c$.

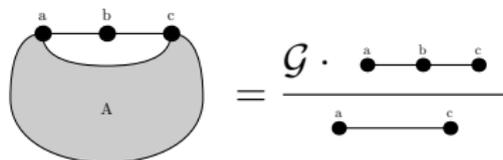


Factorisation par arc

Proposition

Soient \mathcal{P} un poset et (a, b, c) un arc de \mathcal{P} alors,

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.c_{a=b}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.c_{b=c}}).$$


$$\text{Diagram} = \mathcal{G} \cdot \frac{\text{Diagram 1}}{\text{Diagram 2}}$$

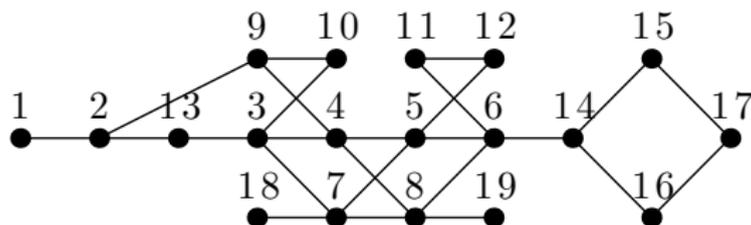
avec

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right.$$

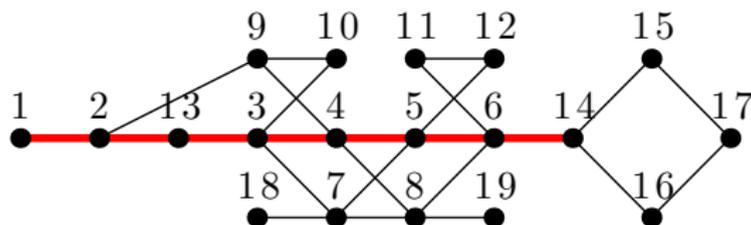
s'il existe une suite t_1, \dots, t_k de A tq $a \preceq t_1 \preceq \dots \preceq t_k \preceq c$,

sinon.

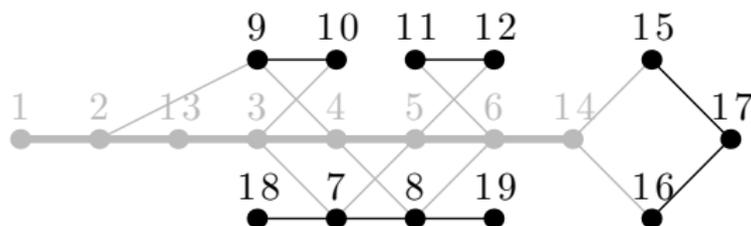
Composantes connexes et leurs adhérences



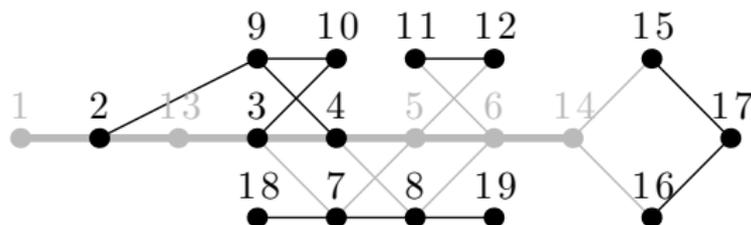
Composantes connexes et leurs adhérences



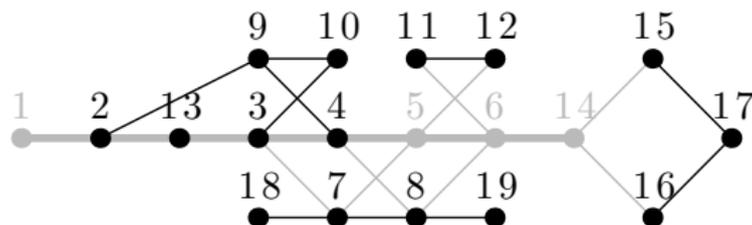
Composantes connexes et leurs adhérences



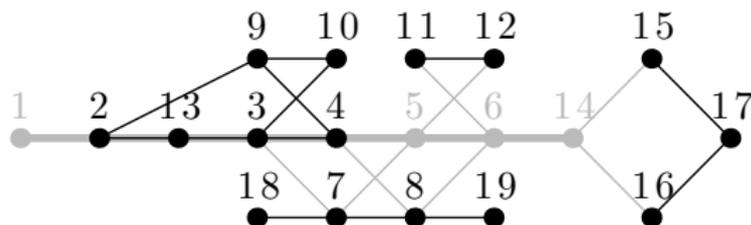
Composantes connexes et leurs adhérences



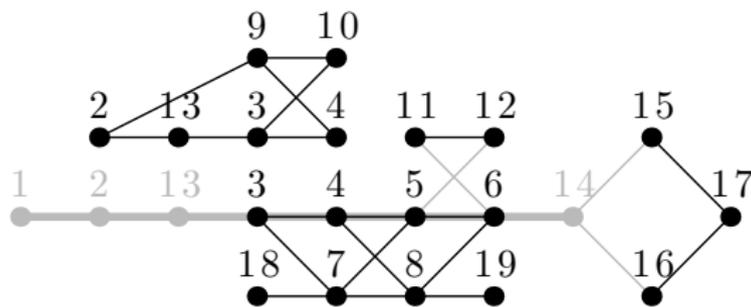
Composantes connexes et leurs adhérences



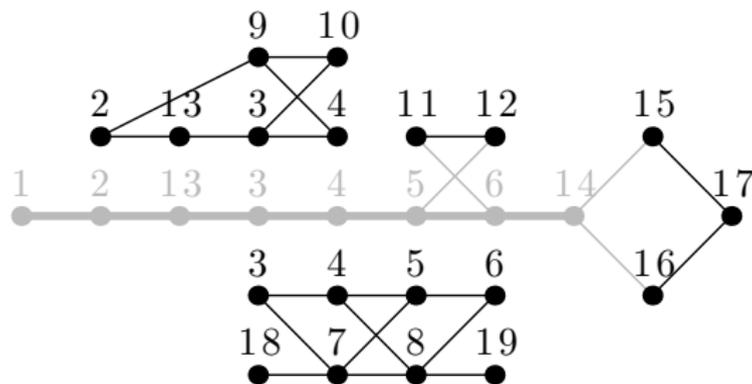
Composantes connexes et leurs adhérences



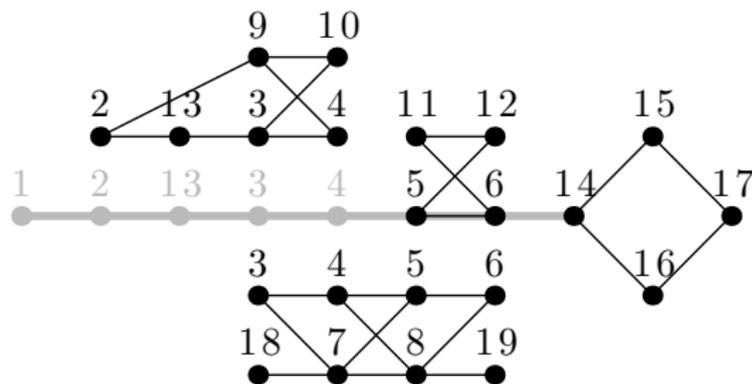
Composantes connexes et leurs adhérences



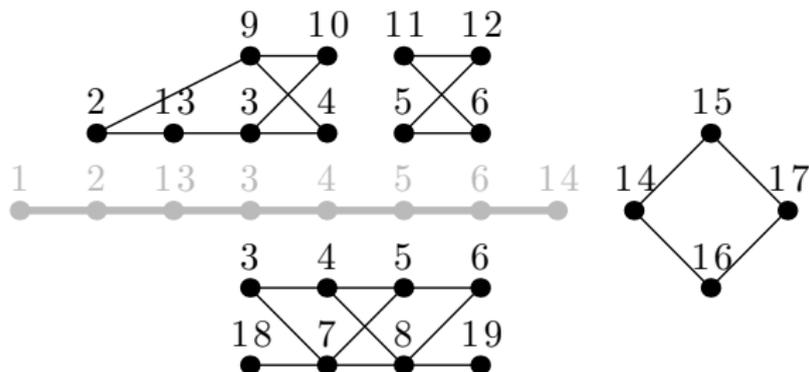
Composantes connexes et leurs adhérences



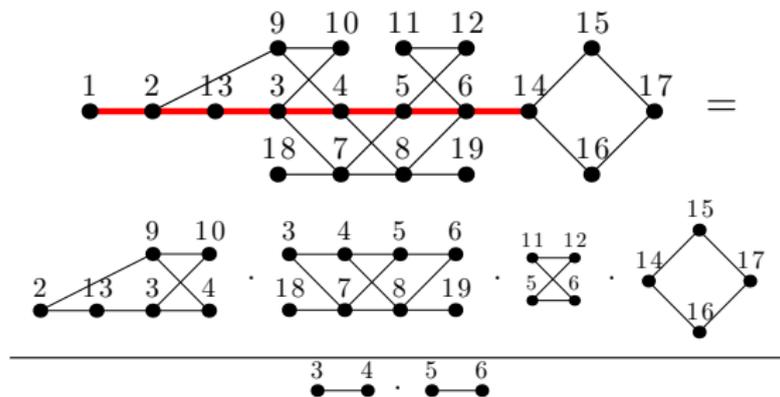
Composantes connexes et leurs adhérences



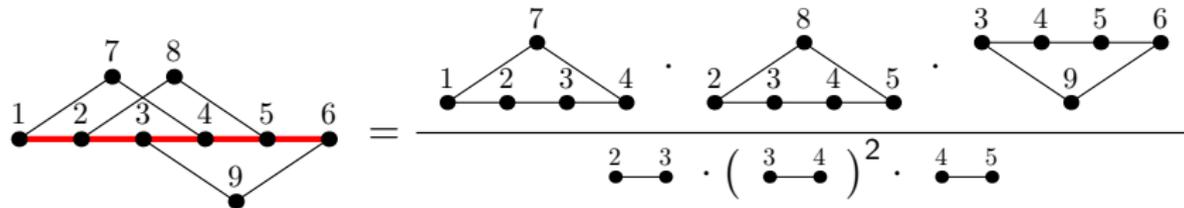
Composantes connexes et leurs adhérences



Factorisation par chaîne



Factorisation par chaîne (autre exemple)



Factorisation par chaîne (théorème)

Théorème

Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c , alors

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{\prod_{j=1}^K \Psi_{\overline{\mathcal{C}_j}}}{|c|-1 \prod_{j=1} \Psi_{\mathcal{C}_j \mathcal{C}_{j+1}}^{\mu_j - 1}}$$

où $\mu_j = \text{Card}(\{I \mid (c_j, c_{j+1}) \in \Gamma_{\overline{\mathcal{C}_j}, \mathbf{H}}\})$.

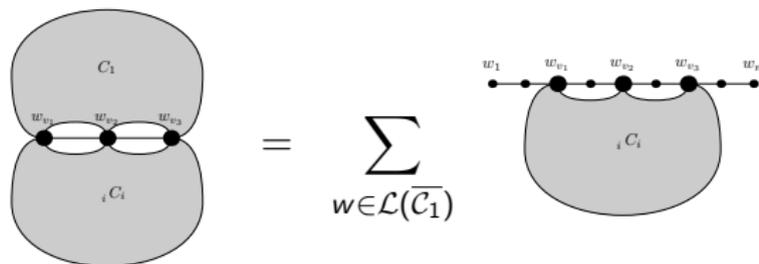
De plus, $\overline{\mathcal{C}_j} = \mathcal{P} \cdot \mathbf{H} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}_j}}$.

Preuve (esquisse)

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(\mathcal{X})} \mathcal{L}(\mathcal{P} \cdot \mathbf{0}_w)$$

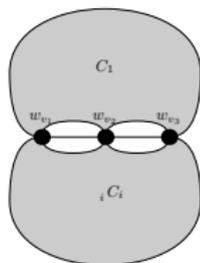
Preuve (esquisse)

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(\mathcal{X})} \mathcal{L}(\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w)$$

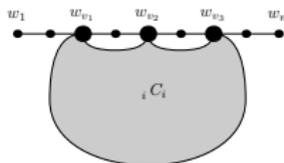


Preuve (esquisse)

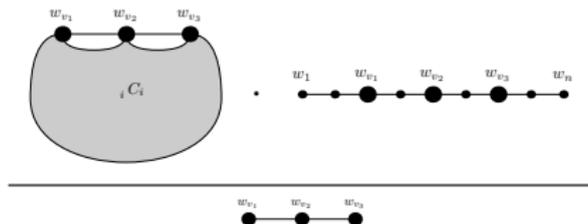
$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(\mathcal{X})} \mathcal{L}(\mathcal{P} \cdot \mathbf{0}_w)$$



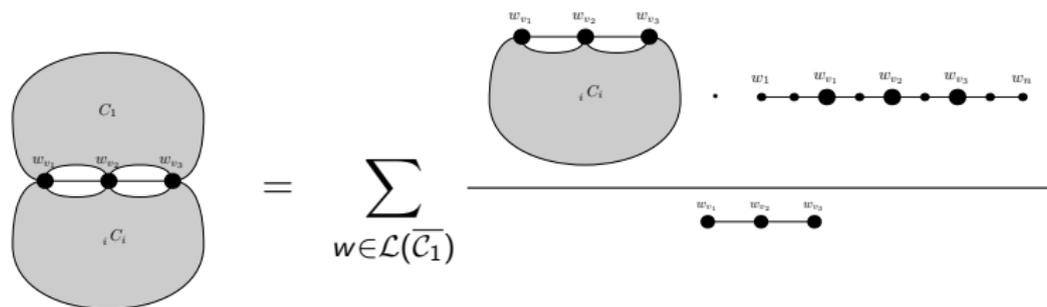
$$= \sum_{w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})}$$



$$= \sum_{w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})}$$



Esquisse de preuve (suite)



Esquisse de preuve (suite)

The diagram illustrates the decomposition of a genus-1 surface into a sum over link diagrams. On the left, a genus-1 surface is shown with two regions, C_1 (top) and ${}_i C_i$ (bottom), separated by a horizontal link with three components labeled w_{v_1} , w_{v_2} , and w_{v_3} . This is equated to a sum over link diagrams $w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})$. The first term in the sum is a link diagram with three components w_{v_1} , w_{v_2} , and w_{v_3} on the top boundary of a shaded region ${}_i C_i$, and a horizontal link with three components w_{v_1} , w_{v_2} , and w_{v_3} on the bottom boundary. This is multiplied by a link diagram with five components $w_1, w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}, w_{v_4}$ on a horizontal line. The second term in the sum is a link diagram with three components $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$ on a horizontal line, multiplied by a link diagram with five components $w_1, w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}, w_{v_4}$ on a horizontal line.

$$\begin{aligned}
 & \text{Genus-1 surface with regions } C_1 \text{ and } {}_i C_i \text{ and link } w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3} \\
 &= \sum_{w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})} \left(\text{Link diagram with } w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3} \text{ on } {}_i C_i \text{ and } w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3} \text{ on bottom} \right) \cdot \left(\text{Link diagram with } w_1, w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}, w_{v_4} \right) \\
 &= \left(\text{Link diagram with } w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3} \text{ on horizontal line} \right) \cdot \sum_{w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})} \left(\text{Link diagram with } w_1, w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}, w_{v_4} \right)
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve (suite)

The diagram illustrates the decomposition of a genus-1 surface C_1 into a sum over paths in the fundamental group $\mathcal{L}(\overline{C_1})$.

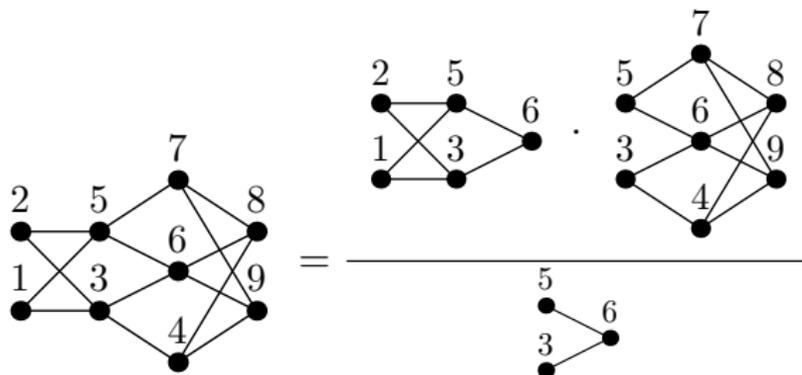
Step 1: The genus-1 surface C_1 is shown as two regions, C_1 (top) and ${}_i C_1$ (bottom), separated by a horizontal line with three marked points $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$.

Step 2: This is equated to a sum over paths $w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})$. The summand consists of the region ${}_i C_1$ above a horizontal line with three marked points $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$, multiplied by a path w starting at w_1 and ending at w_n , passing through $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$.

Step 3: This is further equated to a sum over paths $w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})$. The summand consists of a horizontal line with three marked points $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$ below the region ${}_i C_1$, multiplied by a path w starting at w_1 and ending at w_n , passing through $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$.

Step 4: This is equated to a sum over paths $w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})$. The summand consists of a horizontal line with three marked points $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$ below the region ${}_i C_1$, multiplied by a path w starting at w_1 and ending at w_n , passing through $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$, and then multiplied by the region C_1 above a horizontal line with three marked points $w_{v_1}, w_{v_2}, w_{v_3}$.

D'autres factorisations



Conclusion

Remerciements : Je remercie A. Lascoux pour m'avoir proposé ce problème concernant les fractions rationnelles ainsi que J.G. Luque pour le concours qu'il a apporté à l'élaboration de ce travail.

Les variétés de Schubert

Soit E et V deux drapeaux de \mathbb{C}^n .

$$V : V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = \mathbb{C}^n$$

On peut s'intéresser aux intersections des sous-espaces des drapeaux entre V et E :

$$\dim(V_i \cap E_j) = b_{i,j}$$

Soit V' un nouveau drapeau de \mathbb{C}^n ,

$$V' \sim V \text{ si et seulement si } \forall i, j \dim(V'_i \cap E_j) = b_{i,j}$$

On appelle *variété de Schubert* l'ensemble des drapeaux équivalents à V .