

Devoir de mathématiques sur les séries formelles

Ingénieurs 2000 - IR1

Décembre 2009

Exercice 1 (1 points)

Les séries suivantes sont-elles inversibles ? Pourquoi ?

- $2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + 4x^4 + \dots$,
- $x + 2x^2 + 5x^3 + 4x^4 + \dots$.

Exercice 2 (4 points)

Réalisez la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante:

$$\frac{x^5}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

Vous justifierez les résultats obtenus.

Exercice 3 (4 points)

Trouvez la fraction rationnelle qui a pour série formelle:

$$\sum_{k \geq 0} (k^2 + 2k)x^k.$$

Vous justifierez les résultats obtenus.

Exercice 4 (5 points)

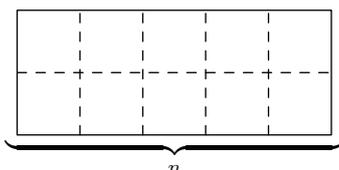
Donner une formule pour chaque coefficient de la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 1 \\ U_k = 3.U_{k-1} - 2.U_{k-2} - (3k-1) & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Vous justifierez les résultats obtenus.

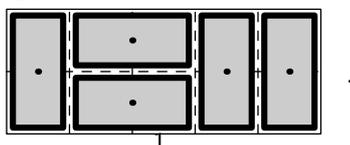
Exercice 5 (6 points)

Soit un damier D de hauteur 2 et de largeur n :

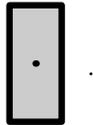


Un pavage de D consiste à occuper tout l'espace du damier D en utilisant des figures géométriques appelées tuiles sans laisser d'espace vide.

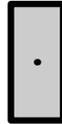
Par exemple, voici un pavage de D :



Ce pavage utilise uniquement la tuile :

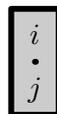


1) Compter le nombre de pavage U_n d'un damier de hauteur 2 et de largeur n à l'aide de la tuile suivante:



Pour ce faire, vous pouvez essayer de trouver une formule de récurrence qui relie les différents éléments de la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

2) Compter le nombre de pavage V_n d'un damier de hauteur 2 et de largeur n à l'aide des tuiles de la forme :



où i et j sont des entiers compris entre 1 et p et de façon à ce que deux chiffres posés l'un à côté de l'autre soient toujours identiques.

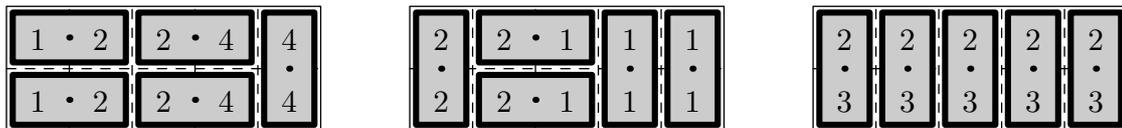
Par exemple, les configurations suivantes sont possibles :



Alors que les configurations suivantes sont impossibles:



Ainsi, les pavages suivants sont corrects et doivent être comptés:



Alors que les pavages suivants ne sont pas corrects et ne doivent pas être pris en compte:

