

Chaînes de couvertures et sommes de Greene

Adrien Boussicault

RÉSUMÉ. À chaque mot w , on associe la fonction rationnelle $\psi_w := \prod (x_{w_i} - x_{w_{i+1}})^{-1}$. Le but de cet article est d'étudier la somme $\Psi_{\mathcal{P}}$, que nous appellerons somme de Greene, des fonctions ψ_w sur les extensions linéaires w des **poset** \mathcal{P} . Cet article est la suite de [1]. Dans cette étude, nous nous sommes attachés à décrire l'opération d'ordonnement partiel des **poset** dans le but de décrire certaines factorisations du numérateur de $\Psi_{\mathcal{P}}$. Nous donnons aussi une expression du numérateur des fractions rationnelles $\Psi_{\mathcal{P}}$ associées aux **poset** de partition à l'aide des polynômes de Schubert.

1. Introduction

À chaque mot w , on associe la fraction rationnelle

$$\psi_w := \frac{1}{(x_{w_1} - x_{w_2})(x_{w_2} - x_{w_3}) \dots (x_{w_{n-1}} - x_{w_n})}.$$

La somme

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \sum_{w \in \mathcal{L}(\mathcal{P})} \psi_w,$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ désigne les extensions linéaires du **poset** \mathcal{P} considérées comme des mots w , fait apparaître des propriétés remarquables. Par exemple, Greene [5] donne une expression de $\Psi_{\mathcal{P}}$ pour les **poset** planaires :

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est un graphe non connexe,} \\ \prod_{y,z \in \mathcal{P}} (x_y - x_z)^{\mu_{\mathcal{P}}(y,z)} & \text{si } \mathcal{P} \text{ est un graphe connexe,} \end{cases}$$

où $\mu(x, y)$ représente la fonction de Möbius sur le **poset** \mathcal{P} .

Butler et Bousquet-Mélou dans [2] ont montré que les diagrammes de Hasse associés aux permutations¹ évitant les motifs 1324 et $\overline{2143}$ sont acycliques. Dans le contexte des permutations, les extensions linéaires de certains diagrammes de Hasse correspondent exactement aux intervalles du permutoèdre et notre somme $\Psi_{\mathcal{P}}$ s'exprime comme un produit de termes du type $(x_i - x_j)^{-1}$.

Étonnamment, ces mots apparaissent aussi en géométrie, caractérisant certaines familles de variétés de Schubert. Les variétés de Schubert sont indexées par des permutations et celles qui sont non singulières sont indexées par des permutations qui évitent les motifs 1324 et 2143.

Dans un précédent article [1], nous avons déterminé complètement l'expression du dénominateur de la fraction réduite $\Psi_{\mathcal{P}}$ et nous avons mis à jour des opérateurs sur les graphes. Ces outils permettent de restreindre la classe des **poset** à étudier aux **poset** dont le diagramme de Hasse est bipartite. Les principaux résultats de ce travail sont rappelés dans la Section 2. Cet article a pour but de mieux comprendre les numérateurs des fractions réduites $\Psi_{\mathcal{P}}$. Pour cela, nous allons nous intéresser aux conséquences de l'ordonnement partiel d'un **poset** sur son diagramme de Hasse (Section 3) et sa fraction réduite $\Psi_{\mathcal{P}}$ (Section 4). Nous appliquerons ces résultats à la factorisation par chaînes et au calcul des fractions associées aux graphes

2000 *Mathematics Subject Classification.* 06A05,06A06,06A07,26C15.

Key words and phrases. fraction rationnelle, **poset**, diagramme de Hasse, variétés de Schubert.

¹À chaque permutation σ , on peut associer un **poset** dont les extensions linéaires décrivent l'intervalle $[Id, \sigma]$ du permutoèdre.

de partition. Dans ce dernier exemple nous donnerons une expression de ces fractions à l'aide des polynômes de Schubert.

2. Notations et rappels

Dans cette partie, nous rappelons les différentes définitions et propriétés qui ont été introduites, démontrées et illustrées dans [1].

2.1. Poset, diagrammes de Hasse et extensions linéaires.

Un ensemble *partiellement ordonné* (**poset**) $\mathcal{P} = (P, \leq)$ est un ensemble P muni d'une relation d'ordre \leq , c'est à dire que \leq est un relation binaire qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Pour tout $x \in P$, $x \leq x$ (réflexivité),
- 2) si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$ (antisymétrie),
- 3) si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ (transitivité).

Nous notons $\Gamma_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des couples $(x, y) \in P \times P$ tels que $x \leq y$.

Dans la suite de l'article, nous allons travailler sur les graphes. En effet, un **poset** est un graphe orienté sans cycle, transitif et réflexif. On appelle graphe \mathcal{G} tout couple $(\Sigma_{\mathcal{G}}, \Gamma_{\mathcal{G}})$ où $\Sigma_{\mathcal{G}}$ est un ensemble d'éléments appelés sommets et $\Gamma_{\mathcal{G}}$ un ensemble de couples de $\Sigma_{\mathcal{G}} \times \Sigma_{\mathcal{G}}$ appelés arêtes. Par souci de simplicité, on note les sommets $\Sigma_{\mathcal{G}}$ par G . Nous nous intéresserons en particulier aux Graphes Orientés, Réflexifs et Sans Cycle (**GORSC**). Ainsi, un **poset** est un **GORSC** transitif.

À tout graphe \mathcal{G} , on définit une relation binaire $\leq_{\mathcal{G}}$ entre les sommets du graphe par $x \leq_{\mathcal{G}} y$ si $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{P}}$.

Une grande partie du document est consacrée à l'étude des opérations sur les graphes. Nous avons donc choisi de faire agir les opérateurs par la droite et d'utiliser des polices grasses pour faciliter la distinction entre opérateurs et objets.

Soit **Poset** l'opérateur qui à tout **GORSC** \mathcal{G} associe l'unique **poset** $\mathcal{G}.\mathbf{Poset} := (G, \mathcal{T}(\Gamma_{\mathcal{G}}))$, où $\mathcal{T}(\Gamma_{\mathcal{G}})$ est la clôture transitive de $\Gamma_{\mathcal{G}}$. La clôture transitive de $\Gamma_{\mathcal{G}}$ est l'ensemble des couples (x, y) tel qu'il existe une suite $z_i \in G$ pour laquelle $(x, z_1), (z_1, z_2), \dots, (z_{k-1}, z_k), (z_k, y)$ appartiennent tous à $\Gamma_{\mathcal{G}}$.

Soit \mathcal{G} un **GORSC**, on utilise \leq pour désigner la relation binaire du **poset** $\mathcal{G}.\mathbf{Poset}$.

On dit qu'un élément x est plus petit (respectivement plus grand) qu'un élément y si $x \leq y$ (respectivement $y \leq x$). On dit qu'un élément x est minimal (resp. maximal) s'il n'existe pas d'élément de P plus petit (resp. plus grand) que lui. On note $Ext(\mathcal{P})$ le sous-ensemble de P composé des éléments qui ne sont ni minimaux ni maximaux. On appelle de tels objets des *extrémités* dans \mathcal{P} . De manière analogue, on note $Int(\mathcal{P})$ les éléments qui ne sont pas des extrémités (où bien éléments *intérieurs*). Attention, l'assertion $x \leq_{\mathcal{G}} y$ n'est pas équivalente à l'affirmation x est plus petit que y .

Soit **H** l'opérateur qui à tout **GORSC** \mathcal{G} associe $\mathcal{G}.\mathbf{H} := (G, \Gamma_{\mathcal{G}.\mathbf{H}})$ l'unique **GORSC** tel que $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{G}.\mathbf{H}}$ si et seulement si $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{G}}$ et il n'existe aucune suite $z_i \in G$ telle que $(x, z_1), (z_1, z_2), \dots, (z_{k-1}, z_k), (z_k, y)$ appartiennent tous à $\Gamma_{\mathcal{G}}$.

Soit \mathcal{P} un **poset**, on appelle diagramme de Hasse de \mathcal{P} le graphe $\mathcal{G}.\mathbf{H}$ dessiné de façon à ce que, si x est plus petit que y alors x est dessiné à gauche² de y . De plus, la relation binaire de $\mathcal{G}.\mathbf{H}$ est appelée relation de couverture et est notée \preceq .

Une *extension linéaire* d'un **poset** \mathcal{P} est un ordre total compatible avec celui de \mathcal{P} . On note l'ensemble de ces extensions $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. Généralement, on représente les ordres totaux à l'aide de mots. En effet, la position dans le mots des éléments du **poset** permet de coder toutes les relations d'ordre.

Dans cet article, un mot peut faire référence à une suite d'éléments, à un ensemble d'éléments ou à un **poset**. Le choix de son type se fait alors suivant le contexte. Par exemple, le mot 5821 peut selon le contexte représenter le mot 5821, le **poset** $(\{5, 8, 2, 1\}, \{(5, 8), (5, 2), (5, 1), (8, 2), (8, 1), (2, 1)\})$, la suite $(5, 8, 2, 1)$ ou l'ensemble $\{5, 8, 2, 1\}$.

Soient (Σ_1, Γ_1) et (Σ_2, Γ_2) deux **GORSC**. On note \vee l'union de deux **GORSC**

$$(\Sigma_1, \Gamma_1) \vee (\Sigma_2, \Gamma_2) := (\Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2).$$

L'union de deux **GORSC** n'est pas toujours un **GORSC**. En effet, des cycles peuvent apparaître. Il faut donc vérifier à chaque union que l'on obtient bien un **GORSC**.

²Généralement, les diagrammes de Hasse sont dessinés du bas vers le haut, mais leur représentation consomme plus de place et est moins naturelle.

Ainsi que \wedge l'intersection de deux GORSC

$$(\Sigma_1, \Gamma_1) \wedge (\Sigma_2, \Gamma_2) := (\Sigma_1 \cap \Sigma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2).$$

L'intersection de deux GORSC est bien un GORSC.

L'adjonction d'arêtes est l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} (\Sigma_1, \Gamma_1) \triangleleft (\Sigma_2, \Gamma_2) &:= (\Sigma_1, \Gamma_3) \\ &\text{et} \\ (\Sigma_1, \Gamma_1) \triangleleft \Gamma_2 &:= (\Sigma_1, \Gamma_3), \end{aligned}$$

où $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \{(a, b) \in \Gamma_2 \mid a, b \in \Sigma_1\}$.

Soient \mathcal{G} un GORSC et X un sous-ensemble de G . On note $|_X$ la restriction du graphe à l'ensemble X :

$$\mathcal{G}|_X := (X, \{(a, b) \in \Gamma_{\mathcal{G}} \mid a, b \in X\}).$$

Soient \mathcal{P} un GORSC et X un sous-ensemble de P . On note $\setminus X$ l'opération définie par $\mathcal{G} \setminus X := \mathcal{G}|_{G \setminus X}$.

Un graphe \mathcal{X} est inclu dans un graphe \mathcal{G} (notation : $\mathcal{X} \subset \mathcal{G}$) si et seulement si $X \subset G$ et $\Gamma_{\mathcal{X}} \subset \Gamma_{\mathcal{G}}$. Deux graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont disjoints si $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Un graphe \mathcal{X} est un sous-graphe \mathcal{G} (notation : $\mathcal{X} \ll \mathcal{G}$) si et seulement si $X \subset G$ et $\mathcal{G}|_X = \mathcal{X}$.

Soient \mathcal{P} un poset et $\mathcal{X} \ll \mathcal{P}$. Soit $w \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. On note \mathbf{O}_w l'opération qui au poset \mathcal{P} associe le poset dont les extensions linéaires sont celles de \mathcal{P} ayant w comme sous-mot.

En fait, $\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w$ est le poset $(\mathcal{P} \triangleleft w)$.

On définit récursivement $\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_{(w_1, w_2, \dots, w_k)}$ par $(\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_{(w_1, w_2, \dots, w_{k-1})}) \cdot \mathbf{O}_{w_k}$.

LEMME 2.1 (A. Boussicault [1]). Soient \mathcal{P} un poset et $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$, k sous-poset disjoints de \mathcal{P} , alors

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_{l \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1) \times \dots \times \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)} \mathcal{L}(\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_l),$$

où \bigsqcup représente l'union disjointe.

2.2. Émondages et contractions.

D'après les notations de [4], dans un graphe \mathcal{G} , on dit qu'un sommet v d'une arête e est *libre* si v n'est le sommet d'aucune autre arête que e . Une *arête intérieure* est une arête sans sommet libre. Supprimer une arête qui n'est pas intérieure avec un de ses sommets libres est appelé un *émondage élémentaire*. On appelle *émondage* toute séquence d'émondages élémentaires. On note par \mathbf{Em}_v l'opération d'émondage élémentaire de sommet v . De même, on appelle \mathbf{Em} l'opération qui à tout graphe associe le graphe émondé de \mathcal{G} , qui est l'unique sous-graphe maximal \mathcal{G} sans sommet libre. Par extension, on note \mathbf{Em}_w l'opération $\mathbf{Em}_{w_1} \dots \mathbf{Em}_{w_k}$.

PROPOSITION 2.1. Soient \mathcal{G} un GORSC et a, b deux éléments de G . Si $a \preceq b$, le graphe $(G \setminus b, \Gamma')$ tel que

$$(x, y) \in \Gamma' \Leftrightarrow ((x, y) \in \Gamma_{\mathcal{G}} \text{ ou } ((x, a) \in \Gamma_{\mathcal{G}} \text{ ou } (x, b) \in \Gamma_{\mathcal{G}}) \text{ et } ((a, y) \in \Gamma_{\mathcal{G}} \text{ ou } (b, y) \in \Gamma_{\mathcal{G}}))$$

est un GORSC.

Cette proposition généralise la Proposition 2.1 de [1] aux GORSC et se démontre de la même façon.

Quand a couvre b dans un GORSC \mathcal{G} , on note $\mathbf{C}_{a=b}$ l'opération qui au graphe \mathcal{G} associe le GORSC $(G \setminus b, \Gamma')$ où Γ' est défini dans la Proposition 2.1. Une telle opération est appelée *contraction*. Par extension, quand l'opération a un sens, on note $\mathbf{C}_w := \mathbf{C}_{w_1=w_2} \cdot \mathbf{C}_{w_2=w_3} \dots \mathbf{C}_{w_{|w|-1}=w_{|w|}}$. On pose $\mathbf{C}_\epsilon = id$.

PROPOSITION 2.2. Soient \mathcal{G} un GORSC et a, b deux éléments de P tels que $a \preceq b$, alors

$$\mathcal{G} \cdot \mathbf{Poset} \cdot \mathbf{C}_{a=b} = \mathcal{G} \cdot \mathbf{C}_{a=b} \cdot \mathbf{Poset}$$

Soit \mathcal{G} un GORSC, on appelle *décontraction d'un sommet s* de G , l'opération \mathbf{D}_s qui associe le GORSC $(G \cup \{\bar{s}\}, \Gamma')$ au graphe \mathcal{G} où Γ' est définie par $(y, z) \in \Gamma'$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- (1) $y = z$,
- (2) $(y, z) \in \Gamma_{\mathcal{G}}$ et $y, z \neq s$,
- (3) $z = s$ et $(y, s) \in \Gamma'$,
- (4) $y = \bar{s}$, et $(s, z) \in \Gamma'$,
- (5) $y = \bar{s}$ et $z = s$

2.3. Opérations sur les fractions rationnelles.

Dans [1], on montre que chacune des opérations présentées précédemment admet une interprétation sur les $\Psi_{\mathcal{P}}$. Voici, un tableau récapitulatif de ces résultats :

TAB. 1. Opérations sur les **poset** et fractions rationnelles

| Poset | Fractions rationnelles |
|--|---|
| Contraction d'une arête (a, b) $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}.\mathbf{C}_{a=b}$ | $((x_a - x_b) \cdot \Psi_{\mathcal{P}}) _{x_a=x_b} = \Psi_{\mathcal{P}.\mathbf{C}_{a=b}}$ (A) |
| Suppression d'une extrémité v $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}.\setminus\{v\}$ | $\lim_{x_v \rightarrow +\infty} (x_v \cdot \Psi_{\mathcal{P}}) = \begin{cases} -\Psi_{\mathcal{P}.\setminus\{v\}} & \text{si } v \text{ est maximal,} \\ \Psi_{\mathcal{P}.\setminus\{v\}} & \text{si } v \text{ est minimal.} \end{cases}$ (B) |
| Émondage d'une arête $s - v$ possédant le sommet libre v $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}.\setminus\{v\}$ | $\Psi_{\mathcal{P}} = \begin{cases} \Psi_{\mathcal{P}.\setminus\{v\}} \cdot \frac{1}{x_v - x_s} & \text{si } v \text{ est minimal} \\ \Psi_{\mathcal{P}.\setminus\{v\}} \cdot \frac{1}{x_s - x_v} & \text{si } v \text{ est maximal} \end{cases}$ (C) |
| $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k \ll \mathcal{P}$, k sous- poset disjoints $\mathcal{P} \rightarrow \{\mathcal{P}.\mathbf{O}_{(w_1, \dots, w_k)} w_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1), \dots, w_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)\}$ | $\Psi_{\mathcal{P}} = \sum_{w_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1), \dots, w_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)} \Psi_{\mathcal{P}.\mathbf{O}_{(w_1, \dots, w_k)}}$ (D) |

L'ensemble de ces relations permet ainsi de caractériser les fractions rationnelles $\Psi_{\mathcal{P}}$ en fonction de la nature du **poset** \mathcal{P} . Si on note $\text{Den}(\Psi_{\mathcal{P}})$ et $\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}})$ respectivement le dénominateur et le numérateur de $\Psi_{\mathcal{P}}$, alors nous avons les propriétés suivantes :

TAB. 2. Propriétés des **poset** et leurs conséquences sur les fractions rationnelles

| Poset | Fractions rationnelles |
|-------------------------------|--|
| \mathcal{P} connexe | $\Psi_{\mathcal{P}} \neq 0$ $\text{Den}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \prod_{a < b} (x_a - x_b)$ (E) Le degré du numérateur est le nombre de cycles de \mathcal{P} |
| \mathcal{P} non connexe | $\Psi_{\mathcal{P}} = 0$ (F) |
| \mathcal{P} acyclic | $\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = 1$ (G) |
| \mathcal{P} possède 1 cycle | $\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \sum_{i \in \min(\mathcal{P}.\mathbf{Em})} x_i - \sum_{i \in \max(\mathcal{P}.\mathbf{Em})} x_i$ (H) |

2.4. Théorème de Greene.

DÉFINITION 2.2 (Greene [5]). Un **poset** \mathcal{P} est *planaire* si son diagramme de Hasse, enrichi d'un élément maximal et d'un élément minimal, peut être plongé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sans posséder d'arêtes qui se croisent.

Les Figures 1 et 2 montrent un exemple de **poset** planaire et non planaire.

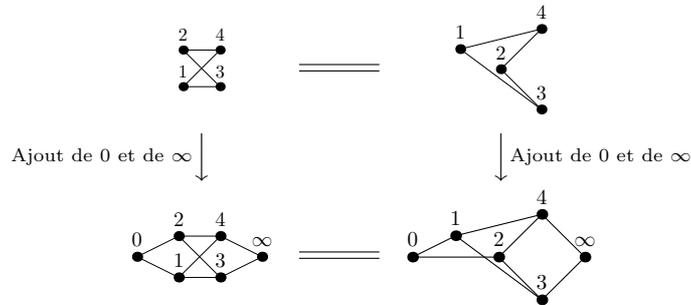
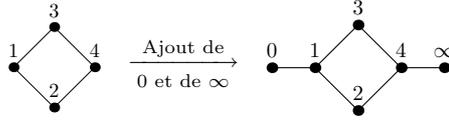


FIG. 1. Le **poset** \mathcal{P}_{2143} n'est pas planaire.


 FIG. 2. Le poset \mathcal{P}_{1324} est planaire.

THÉORÈME 2.3 (Greene [5]). Soit \mathcal{P} un poset planaire, alors

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{P} \text{ n'est pas connexe,} \\ \prod_{y,z \in \mathcal{P}} (x_y - x_z)^{\mu(y,z)} & \text{si } \mathcal{P} \text{ est connexe,} \end{cases}$$

où $\mu(x, y)$ représente la fonction de Möbius du poset \mathcal{P} .

3. Opérations sur les poset et diagrammes de Hasse

Les résultats de la section précédente montrent qu'il existe une forte relation entre l'expression de la fraction rationnelle réduite et le diagramme de Hasse associé au poset. Dans ce paragraphe, nous étudions l'interprétation des transformations des poset pour le calcul des $\Psi_{\mathcal{P}}$.

3.1. Suppression d'une extrémité et contraction d'une arête.

De façon générale, l'opération \mathbf{H} ne commute pas avec les autres. En effet, $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\mathbf{C}_{a=b} \neq \mathcal{P}.\mathbf{C}_{a=b}.\mathbf{H}$, $\mathcal{P} \setminus_A.\mathbf{H} \neq \mathcal{P}.\mathbf{H} \setminus_A$ ou $\mathcal{P}.\setminus A.\mathbf{H} \neq \mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus A$. En particulier, on a :

PROPOSITION 3.1. Soient \mathcal{P} un poset et $a \preceq b$, alors

$$\mathcal{P}.\mathbf{C}_{a=b}.\mathbf{H} \subset \mathcal{P}.\mathbf{H}.\mathbf{C}_{a=b}.$$

Néanmoins, l'opérateur \mathbf{H} commute avec la suppression d'une extrémité.

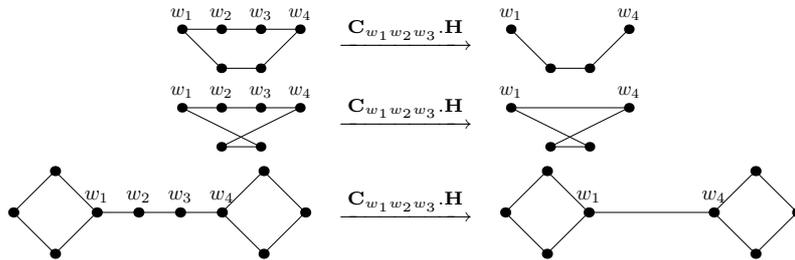
PROPOSITION 3.2. Soient \mathcal{P} un poset et m une extrémité.

$$\mathcal{P}.\setminus m.\mathbf{H} = \mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus m.$$

Si on appelle *arc* toute suite $w_1 \preceq w_2 \preceq \dots \preceq w_L$ telle que les seules relations de couverture de sommets w_2, \dots, w_{L-1} sont celles de w , alors la Proposition 3.1 peut être affinée.

PROPOSITION 3.3. Soient \mathcal{P} un poset et $w = (w_1, \dots, w_L)$ un arc de \mathcal{P} , alors

$$\mathcal{P}.\mathbf{C}_{w[1..L-1]}.\mathbf{H} = \begin{cases} \mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus w[2..L-1] & \text{s'il existe une chaîne } t \text{ telle que } t_i \neq w_j \\ & \text{et } w_1 \preceq t_1 \preceq \dots \preceq t_k \preceq w_L, \\ \mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus w[2..L-1] \triangleleft \{(w_1, w_L)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$


 FIG. 3. Contraction d'un arc w .

PLAN DE PREUVE. Supposons que $w = (w_1, w_2, w_3)$.

Nous savons que

$$\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus\{w_2\} \subset \mathcal{P}.\mathbf{C}_{w_1=w_2}.\mathbf{H} \subset \mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus\{w_2\} \triangleleft \{(w_1, w_3)\}.$$

La première inclusion se démontre par l'absurde en supposant qu'une arête (a, b) de $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus\{w_2\}$ n'est pas une arête de $\mathcal{P}.\mathbf{C}_{w_1=w_2}.\mathbf{H}$. En effet, l'existence d'une suite de relations de couverture dans $\mathcal{P}.\mathbf{C}_{w_1=w_2}.\mathbf{H}$

entre deux éléments a et b implique l'existence d'une suite de relations de couverture dans $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus\{w_2\}$ entre a et b .

La deuxième incusion est obtenue à l'aide de la Proposition 3.1.

Ainsi, s'il existe une chaîne $w_1 \preceq t_1 \preceq \dots \preceq t_k \preceq w_3$ dans P avec $t_i \neq w_j$ alors $w_1 \preceq t_1 \preceq \dots \preceq t_k \preceq w_3$ est aussi une chaîne de $\mathcal{P}.\mathbf{C}_{w_1=w_2}$ et donc (w_1, w_3) n'est pas une relation de couverture de $\mathcal{P}.\mathbf{C}_{w_1=w_2}$ et réciproquement. Ce qui prouve la proposition pour $L = 3$.

Par récurrence sur le nombre d'éléments de l'arc, on montre que notre proposition est vraie pour tout arc. □

3.2. Ordonnancement partiel de poset.

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de l'opérateur \mathbf{H} lorsque l'on ordonne deux éléments incomparables d'un poset.

PROPOSITION 3.4. *Soient \mathcal{P} un poset et a, b deux éléments incomparables, alors*

$$\mathcal{P}.\mathbf{O}_{ab}.\mathbf{H} \subset \mathcal{P}.\mathbf{H}.\triangleleft\{(a, b)\}.$$

La propriété se généralise facilement pour un ensemble quelconque d'éléments de P .

COROLLAIRE 3.1. *Soient \mathcal{P} un poset, $\mathcal{X} \ll \mathcal{P}$ et $w \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, alors*

$$\mathcal{P}.\mathbf{O}_w.\mathbf{H} \subset \mathcal{P}.\mathbf{H}.\triangleleft(w.\mathbf{H}).$$

3.3. Chaînes de couvertures.

On appelle *chaîne* ou *chaîne de couvertures* d'un poset \mathcal{P} toute suite finie $c = (c_1, \dots, c_l)$ de P telle que $c_i \preceq c_{i+1}$. On notera alors C_1, \dots, C_K l'ensemble des parties de P qui forment les composantes connexes de $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus c$. De même, on notera $C_k = \mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus_{C_k}$.

Dans la Figure 4, la chaîne $c = (1, 2, 13, 3, 4, 5, 6, 14)$ sépare le poset \mathcal{P} en 4 composantes connexes C_1, C_2, C_3, C_4 qui sont représentées dans la Figure 5.

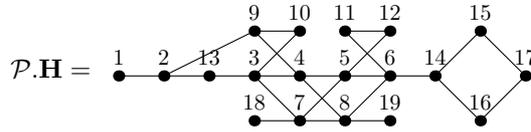


FIG. 4. Le poset \mathcal{P} possède la chaîne $c = (1, 2, 13, 3, 4, 5, 6, 14)$.

$$C_1 = \begin{array}{c} 9 \quad 10 \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$C_2 = \begin{array}{c} 18 \quad 7 \quad 8 \quad 19 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$C_3 = \begin{array}{c} 11 \quad 12 \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$C_4 = \begin{array}{c} 15 \\ \bullet \\ 17 \\ \bullet \\ 16 \end{array}$$

FIG. 5. Les composantes connexes C_1, C_2, C_3, C_4 de $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus c$.

On définit par F_k l'ensemble des éléments de la chaîne c qui sont connexes à C_k par une relation de couverture :

$$F_k = \{c_i \mid \exists e \in C_k \text{ tel que } e \preceq c_i \text{ ou } c_i \preceq e\}.$$

On note \overline{F}_l l'adhérence de F_k dans c :

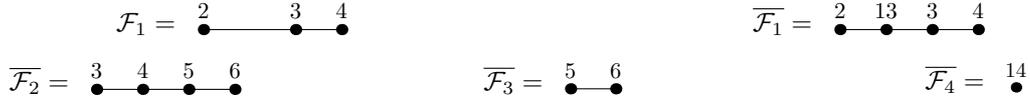
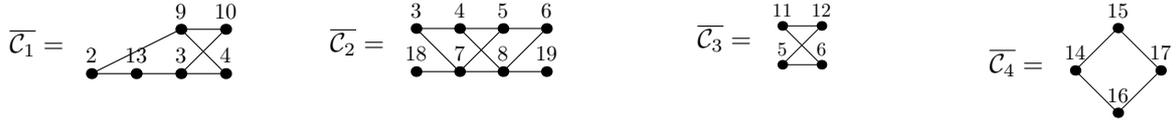
$$\overline{F}_l = \{c_i \mid \exists h, j \text{ tel que } c_h \in F_l, c_j \in F_l \text{ et } c_h \preceq c_i \preceq c_j\}.$$

On définit les \mathcal{F}_k et $\overline{\mathcal{F}}_k$ par respectivement $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus_{F_k}$ et $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus_{\overline{F}_k}$.

La Figure 6 illustre la définition de F_k et \overline{F}_k sur le poset \mathcal{P} de la Figure 4.

Enfin, on définit l'adhérence de C_i dans \mathcal{P} par l'ensemble $\overline{C}_i = C_i \cup \overline{F}_i$. On notera \overline{C}_i le graphe $\mathcal{P}.\mathbf{H}.\setminus_{\overline{C}_i}$.

La Figure 7 montre quelles sont les différentes adhérences \overline{C}_i associées au poset de la Figure 4.


 FIG. 6. Les composantes connexes $\mathcal{F}_1, \overline{\mathcal{F}}_1, \overline{\mathcal{F}}_2, \overline{\mathcal{F}}_3, \overline{\mathcal{F}}_4$ du poset \mathcal{P} .

 FIG. 7. Les composantes connexes $\overline{\mathcal{C}}_1, \overline{\mathcal{C}}_2, \overline{\mathcal{C}}_3, \overline{\mathcal{C}}_4$ du poset \mathcal{P} .

Lorsqu'un poset possède une chaîne de couvertures qui sépare son diagramme de Hasse en plusieurs composantes connexes, les opérations d'ordonnancement d'une adhérence de \mathcal{C}_k laissent invariante la restriction du diagramme de Hasse de \mathcal{P} aux autres composantes connexes. Les lemmes suivants illustrent cette propriété de stabilité.

LEMME 3.1. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c . Soient a, b deux éléments incomparables de $\overline{\mathcal{C}}_1$, alors

$$\forall i > 1, \quad \mathcal{P} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_i} = \mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_{(ab)} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_i}.$$

Le Lemme 3.1 peut être appliqué lorsque une composante $\overline{\mathcal{C}}_k$ de \mathcal{P} est totalement ordonnée.

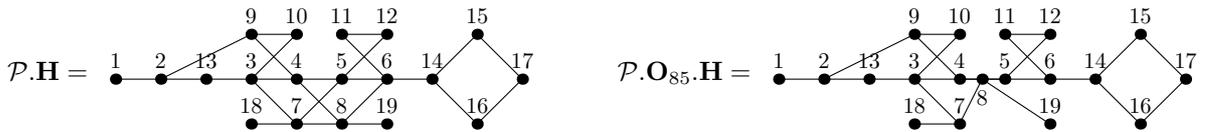
COROLLAIRE 3.2. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c . Soit $w \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{C}}_1)$, alors

$$\forall i > 1, \quad \mathcal{P} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_i} = \mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_i}.$$

Un résultat équivalent sur le diagramme de Hasse peut s'énoncer ainsi :

LEMME 3.2. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c . Soient a, b deux éléments incomparables de \mathcal{C}_1 , alors

$$\forall i > 1, \quad \mathcal{P} \cdot \mathbf{H} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_i} \setminus (c \cdot \mathbf{H}) \subset \mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_{ab} \cdot \mathbf{H}.$$


 FIG. 8. $\forall i > 1, \quad \mathcal{P} \cdot \mathbf{H} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_i} \setminus (c \cdot \mathbf{H}) \subset \mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_{85} \cdot \mathbf{H}.$

Le Lemme 3.2 peut être appliqué lorsque une composante $\overline{\mathcal{C}}_k$ de \mathcal{P} est totalement ordonnée.

COROLLAIRE 3.3. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c . Soit $w \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_1)$, alors

$$\forall i > 1, \quad \mathcal{P} \cdot \mathbf{H} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_i} \setminus (c \cdot \mathbf{H}) \subset \mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w \cdot \mathbf{H}.$$

La contrainte imposée par la chaîne sur les composantes connexes \mathcal{C}_k est telle qu'il est possible de prévoir exactement l'apparence du diagramme de Hasse lorsque l'on ordonne totalement une des ses composantes $\overline{\mathcal{C}}_k$. Le Lemme 3.3 et la Proposition 3.5 caractérisent ces diagrammes de Hasse.

LEMME 3.3. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c . Soit $w \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{C}}_1)$, alors

$$((\mathcal{P} \cdot \mathbf{H} \cdot |_{\overline{\mathcal{C}}_1}) \vee (w \cdot \mathbf{H})) \wedge (\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w \cdot \mathbf{H}) = w \cdot \mathbf{H}.$$

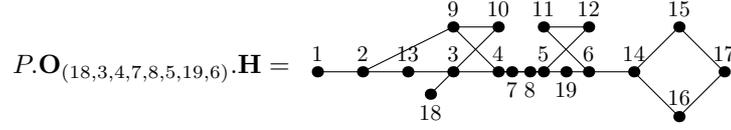


FIG. 9. $\forall i > 1, \mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{C_i} \setminus (c.\mathbf{H}) \subset \mathcal{P}.\mathbf{O}_{(18,3,4,7,8,5,19,6)}.\mathbf{H}$.

PROPOSITION 3.5. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c . Soit $w \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{C}_1})$, alors l'ensemble des arêtes du graphe $\mathcal{P}.\mathbf{O}_w.\mathbf{H}$ est partitionné en trois sous-ensembles qui sont les arêtes des graphes suivants :

- $w.\mathbf{H}$
- $(c.\mathbf{H}) \setminus (\mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{F_1} \vee \dots \vee \mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{F_K})$
- $(\mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{C_2} \vee \dots \vee \mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{C_K}) \setminus (\mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{F_1})$

Le terme $w.\mathbf{H}$ correspond aux arêtes de la composante $\overline{\mathcal{C}_1}$ qui a été totalement ordonné.

La partie $(c.\mathbf{H}) \setminus (\mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{F_1} \vee \dots \vee \mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{F_K})$ correspond aux arêtes de la chaîne c qui n'appartiennent à aucune composante $\overline{\mathcal{C}_j}$.

La partie en $(\mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{C_2} \vee \dots \vee \mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{C_K}) \setminus (\mathcal{P}.\mathbf{H}.\overline{F_1})$ correspond aux arêtes des composantes $\overline{\mathcal{C}_k}$ qui ne sont pas des arêtes de $\overline{\mathcal{C}_1}$.

4. Applications au calcul des sommes de Greene

4.1. Chaînes et factorisations.

Dans la Section 3, nous avons vu les contraintes qu'apportait la présence d'une chaîne sur le diagramme de Hasse. Nous allons maintenant voir ses conséquences sur les fractions rationnelles. Le Lemme 4.1 permet de calculer le degré d'une variable dans un numérateur de $\Psi_{\mathcal{P}}$. Son calcul est indispensable pour démontrer le Lemme 4.2 de la factorisation par arc. Enfin, la Proposition 4.1 présente la factorisation par chaînes.

LEMME 4.1. Soient \mathcal{P} un poset et m une extrémité. Soient e_1, \dots, e_L les sommets de \mathcal{P} tels que $e_i \preceq m$ ou $m \preceq e_i$, alors le degré de x_m dans le numérateur de la fraction réduite $\Psi_{\mathcal{P}}$ est au maximum égal à $L - 1$. De plus,

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \sum_{k=0}^{L-1} P_k(X - x_m) \cdot x_m^k + \epsilon \cdot \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P} \setminus \{m\}}) \cdot x_m^{L-1},$$

où

$$\epsilon = \begin{cases} (-1)^{L-1} & \text{si } m \text{ est maximal,} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $P_k(X - x_m)$ sont des polynômes en les variables $X \setminus \{x_m\}$

PREUVE. Soit d le nombre de cycles de \mathcal{P} . Notons $P_k(X - x_m)$ les polynômes en les variables $X \setminus \{x_m\}$ vérifiant

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{\sum_{k=0}^d P_k(X - x_m) \cdot x_m^k}{\prod_{i \preceq j} (x_i - x_j)}.$$

D'après l'équation (B) de la Table 1, on sait que

$$\lim_{x_m \rightarrow \infty} x_m \cdot \Psi_{\mathcal{P}} = \begin{cases} -\Psi_{\mathcal{P} \setminus \{m\}} & \text{si } m \text{ est maximal,} \\ \Psi_{\mathcal{P} \setminus \{m\}} & \text{si } m \text{ est minimal.} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $i > L - 1$, $P_i(X - x_m) = 0$ et que

$$P_{L-1}(X - x_m) = \begin{cases} (-1)^{L-1} \cdot \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P} \setminus \{m\}}) & \text{si } m \text{ est maximal,} \\ \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P} \setminus \{m\}}) & \text{si } m \text{ est minimal.} \end{cases}$$

□

Maintenant que le degré en les extrémités est connu, il est possible d'en déduire la propriété suivante à l'aide des opérations de contraction et décontraction.

LEMME 4.2. Soient \mathcal{P} un poset et (a, b, c) un arc de \mathcal{P} alors,

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.C_{a=b}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.C_{b=c}}).$$

PREUVE. Soit $\mathcal{P}.D_b$ le poset obtenu par décontraction de l'élément b en b et \bar{b} .



FIG. 10. Décontraction de l'élément b

D'après le Lemme 4.1, on sait que

$$\Psi_{\mathcal{P}.D_b} = \frac{P_0(X - x_b) - \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.D_b.\setminus\{b\}}).x_b}{\prod_{i \prec j} (x_i - x_j)} = \frac{P'_0(X - x_{\bar{b}}) + \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.D_b.\setminus\{\bar{b}\}}).x_{\bar{b}}}{\prod_{i \prec j} (x_i - x_j)}.$$

Or d'après l'égalité (C) de la Table 1,

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.D_b.\setminus\{b\}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.D_b.\setminus\{\bar{b}\}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.D_b.\setminus\{b, \bar{b}\}}).$$

Il existe donc un polynôme $Q(X - x_b - x_{\bar{b}})$ en les variables $X \setminus \{x_b, x_{\bar{b}}\}$ tel que

$$\Psi_{\mathcal{P}.D_b} = \frac{Q(X - x_b - x_{\bar{b}}) + \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.D_b.\setminus\{b, \bar{b}\}}).(x_{\bar{b}} - x_b)}{\prod_{i \prec j} (x_i - x_j)}.$$

Par contraction de l'arête (b, \bar{b}) , on obtient

$$\Psi_{\mathcal{P}.D_b.C_{b=\bar{b}}} = \Psi_{\mathcal{P}} = \frac{Q(X - x_b - x_{\bar{b}})}{\prod_{i \prec j} (x_i - x_j)}.$$

Le polynôme $Q(X - x_b - x_{\bar{b}})$ étant indépendant en les variables x_b et $x_{\bar{b}}$, la contraction de l'arête (a, b) ou (b, c) donne le résultat souhaité :

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.C_{a=b}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.C_{c=b}}).$$

□

COROLLAIRE 4.1. Soient \mathcal{P} un poset et $w = (w_1, \dots, w_L)$ un arc de \mathcal{P} alors,

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}.C_{w[1..L-1]}}).$$

PROPOSITION 4.1. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de P et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c , alors

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{\prod_{j=1}^K \Psi_{\mathcal{C}_j}}{|c| - 1},$$

$$\prod_{j=1}^K \Psi_{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_{i+1}}^{\mu_i - 1}$$

où $\mu_i = \text{Card}(\{l \mid (c_i, c_{i+1}) \in \Gamma_{\mathcal{C}_l, \mathbf{H}}\})$.

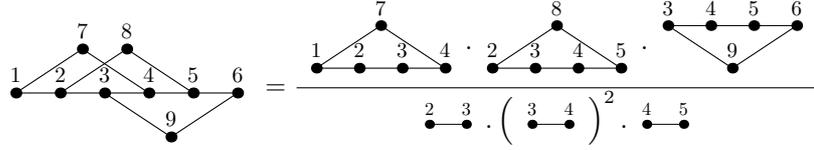
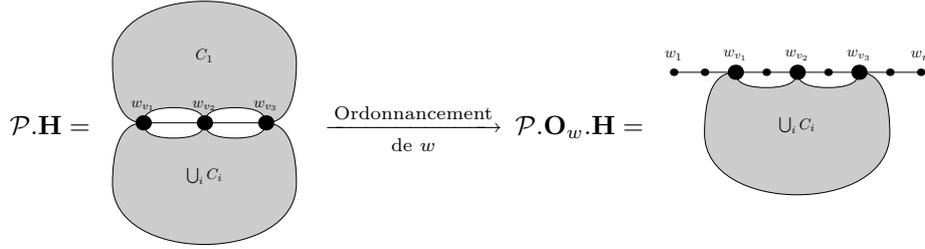
De plus, $\bar{\mathcal{C}}_i = \mathcal{P}.H|_{\bar{\mathcal{C}}_i}$.

PLAN DE PREUVE. D'après l'équation (D) de la Table 1, on sait que

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \sum_{w \in \mathcal{L}(\bar{\mathcal{C}}_1)} \Psi_{\mathcal{P}.O_w}.$$

Or, grâce à la Proposition 3.5, nous connaissons avec précision la constitution du diagramme de Hasse de $\mathcal{P}.O_w$.

$$\mathcal{P}.O_w.H = (w.H) \vee ((c.H) \setminus (\mathcal{P}.H|_{\bar{F}_1} \vee \dots \vee \mathcal{P}.H|_{\bar{F}_K})) \vee ((\mathcal{P}.H|_{\bar{\mathcal{C}}_2} \vee \dots \vee \mathcal{P}.H|_{\bar{\mathcal{C}}_K}) \setminus (\mathcal{P}.H|_{\bar{F}_1})).$$

FIG. 11. Factorisation par chaînes ($c = (2, 3, 4, 5)$).FIG. 12. Ordonnement de $\overline{C_1}$.

Si l'on définit par $v_1, \dots, v_{|c|}$ la suite croissante d'entiers telle que $w_{v_i} = c_i$, on en déduit que les arêtes de $w[1..v_1]$ et $w[v_{|c|-1}..|w|]$ peuvent être émondées dans le diagramme de Hasse de $\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w$. De même, les chaînes $w[v_i..v_{i+1}]$ sont des arcs de \mathcal{P} .

Une factorisation par arc (lemme 4.2) peut être appliquée sur chaque arc $w[v_i..v_{i+1}]$:

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}'}),$$

où $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w \cdot \mathbf{C}_{w[v_1..v_2-1]} \cdots \mathbf{C}_{w[v_{|c|-1}..v_{|c|}-1]}$.

À l'aide de la Proposition 3.3, comme pour chaque couple $(w_{v_i}, w_{v_{i+1}})$ il n'existe pas de suite t avec $t_k \neq w_j$ telle que $w_{v_i} \leq t_1 \leq \dots \leq t_l \leq w_{v_{i+1}}$, on en déduit que

$$\mathcal{P}' \cdot \mathbf{H} = \left((\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w \cdot \mathbf{H}) \setminus (w[v_1 + 1..v_2 - 1] \cup \dots \cup w[v_{|c|-1} + 1..v_{|c|} - 1]) \right) \vee (c \cdot \mathbf{H}).$$

Connaissant la construction de $\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w$ (Propriété 3.5), on en déduit que

$$\mathcal{P}' \cdot \mathbf{H} = (\mathcal{P} \setminus C_1 \cdot \mathbf{H}) \vee (w[1 \dots v_1] \cdot \mathbf{H}) \vee (w[v_{|c|} \dots w_{|w|}] \cdot \mathbf{H}).$$

À l'aide de l'émondage (équation (C), Table 1), on conclut que

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w}) = \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P} \setminus C_1})$$

Connaissant le dénominateur réduit de $\Psi_{\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w}$ (équation (E), Table 2) il est facile de reconstituer toute la

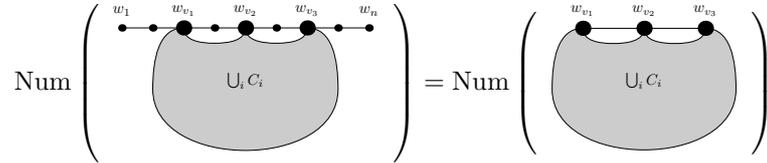


FIG. 13. Émondage et factorisation par arc.

fraction :

$$\Psi_{\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w} = \frac{\Psi_{\mathcal{P} \setminus C_1} \cdot \Psi_w}{\prod_{\{i | (c_i, c_{i+1}) \in \Gamma_{\overline{C_1}}\}} \Psi_{c_i c_{i+1}}}.$$

Lorsque l'on simplifie la somme $\Psi_{\mathcal{P}} = \sum_{w \in \mathcal{L}(\overline{C_1})} \Psi_{\mathcal{P} \cdot \mathbf{O}_w}$, on récupère une expression factorisée de $\Psi_{\mathcal{P}}$:

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{\Psi_{\mathcal{P} \setminus C_1} \cdot \Psi_{\overline{C_1}}}{\prod_{\{i | (c_i, c_{i+1}) \in \Gamma_{\overline{C_1}}\}} \Psi_{c_i c_{i+1}}}.$$

Le diagramme de Hasse de $\mathcal{P} \setminus C_1$ étant exactement identique au diagramme de Hasse de \mathcal{P} auquel on a retiré les sommets C_1 , la chaîne c continue à séparer $\mathcal{P} \setminus C_1$ en les composantes connexes C_2, \dots, C_K . La même opération peut donc être effectuée récursivement sur $\Psi_{\mathcal{P} \setminus C_1}$. On obtient

$$\Psi_{\mathcal{P}} = \frac{\Psi_c \cdot \prod_{j=1}^K \Psi_{\overline{C_j}}}{\prod_{l=1}^K \left(\prod_{\{i|(c_i, c_{i+1}) \in \Gamma_{\overline{C_l}}\}} \Psi_{c_i c_{i+1}} \right)}.$$

□

COROLLAIRE 4.2. Soient \mathcal{P} un poset, c une chaîne de \mathcal{P} et C_1, \dots, C_K les composantes connexes associées à c , alors

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = \prod_{i=1}^K \text{Num}(\Psi_{\overline{C_i}}).$$

De plus, $\overline{C_i} \cdot \mathbf{H} = \mathcal{P} \cdot \mathbf{H} |_{\overline{C_i}}$.

4.2. Graphe de partitions et polynômes de Schubert.

Soit v une suite décroissante infinie à support fini. On définit le diagramme de Ferrer $\text{Diagr}(v)$ par

$$\text{Diagr}(v) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^{*2} \mid i \leq v_j\}.$$

Soit $f(a_1, \dots, a_n)$ une fonction dont l'ensemble des variables est $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. On appelle différence divisée tout opérateur ∂_i agissant sur l'ensemble de ces fonctions tel que :

$$f \cdot \partial_i = \frac{f - f^{s_i}}{a_i - a_{i+1}},$$

où f^{s_i} est la fonction $f(a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n)$.

La définition des polynômes de Schubert est récursive et peut être trouvée dans le livre [6] de A. Lascoux. Les polynômes de Schubert $\mathbb{Y}_v(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ sont des polynômes sur deux ensembles de variables infinis $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ et $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$ indexés par des vecteurs de $v \in \mathbb{N}^\infty$ possédant un nombre fini de composantes non nulles. La définition récursive des polynômes de Schubert est :

(1) si v est décroissante alors,

$$\mathbb{Y}_v(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \prod_{(i,j) \in \text{Diagr}(v)} (a_i - b_j),$$

où $\text{Diagr}(v)$ dénote le diagramme de Ferrer de v ,

(2) s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $v_i < v_{i+1}$ alors,

$$\mathbb{Y}_v \cdot \partial_i = \mathbb{Y}_{v \cdot \partial_i},$$

où $v \cdot \partial_i = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i - 1, v_{i+2}, \dots)$.

Soit λ une partition. On appelle graphe de partition λ , le graphe bipartite $\mathcal{P}_\lambda(A)$ noté aussi \mathcal{P}_λ qui est un poset d'ensemble $\{a_1, \dots, a_{|\lambda|}, b_1, \dots, b_{\lambda_1}\}$ muni de la relation d'ordre \leq_λ définie par $a_i \leq_\lambda b_j$ si $j \leq \lambda_i$. Par exemple, la Figure 14 montre le poset associé à la partition 5433.

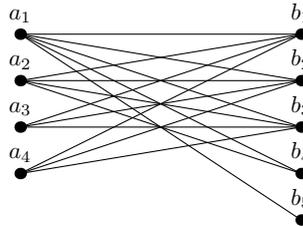


FIG. 14. poset de la partition 5433.

PROPOSITION 4.2. *Soit λ un partition, alors*

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_\lambda}) = \mathbb{Y}_{0, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1}$$

PREUVE. On commence par émonder le poset P_λ , on obtient

$$\Psi_{\mathcal{P}_\lambda} = \frac{1}{\prod_{\lambda_1 \leq k < \lambda_2} (a_1 - b_k)} \cdot \Psi_{\mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]}}$$

Si l'on ordonne les éléments a_1 et a_2 , l'égalité suivante apparaît :

$$\Psi_{\mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]}} = \Psi_{\mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]} \cdot \mathbf{O}_{12}} + \Psi_{\mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]} \cdot \mathbf{O}_{21}}$$

Or le diagramme de Hasse de ces nouveaux poset sont bien connus :

$$\mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]} \cdot \mathbf{O}_{12} \cdot \mathbf{H} = \mathcal{P}_{\lambda [2..n]}(A - a_1) \cdot \mathbf{H} \triangleleft \{(a_1, a_2)\},$$

$$\mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]} \cdot \mathbf{O}_{21} \cdot \mathbf{H} = \mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]} \cdot \mathbf{O}_{12} \cdot \mathbf{H} \cdot s_1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{P}_{\lambda_2 \lambda [2..n]}} &= \frac{1}{a_1 - a_2} \cdot (\Psi_{\mathcal{P}_{\lambda [2..n]}(A - a_1)} - \Psi_{\mathcal{P}_{\lambda [2..n]}(A - a_2)}) \\ &= \frac{1}{a_1 - a_2} \cdot \frac{\mathbb{Y}_{\lambda_2}(a_1) \cdot \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_{\lambda [2..n]}(A - a_1)}) - \mathbb{Y}_{\lambda_2}(a_2) \cdot \Psi_{\mathcal{P}_{\lambda [2..n]}(A - a_2)}}{\prod_{i \preceq j} (a_i - a_j)}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de montrer la formule de récurrence suivante :

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_\lambda}) = \left(\mathbb{Y}_{\lambda_2}(a_1) \cdot \text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_{\lambda [2..n]}(A - a_1)}) \right) \partial_1.$$

Lorsque l'on réitère le procédé sur $\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_{\lambda [2..n]}(A - a_1)})$, on obtient

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}_\lambda}) = (\mathbb{Y}_{\lambda_2}(a_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{Y}_{\lambda_n}(a_{n-1})) \partial_n \dots \partial_1 = (\mathbb{Y}_{\lambda [2..n]}(A)) \partial_n \dots \partial_1 = \mathbb{Y}_{0, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1}(A).$$

□

Dans l'article [1], nous avons vu que lorsque un poset \mathcal{P} est bipartite et complet alors :

$$\text{Num}(\Psi_{\mathcal{P}}) = S_{(\text{Card}(\max(\mathcal{P})) - 1)(\text{Card}(\min(\mathcal{P})) - 1)}(\min(\mathcal{P}) - \max(\mathcal{P})).$$

On en déduit l'égalité :

$$S_{(\text{Card}(\max(\mathcal{P})) - 1)(\text{Card}(\min(\mathcal{P})) - 1)}(\min(\mathcal{P}) - \max(\mathcal{P})) = \mathbb{Y}_{0, (\text{Card}(\max(\mathcal{P})) - 1)(\text{Card}(\min(\mathcal{P})) - 1)},$$

où $A = \min(\mathcal{P})$ et $B = \max(\mathcal{P})$.

Remerciements :

L'auteur remercie A. Lascoux pour avoir proposer ce problème concernant les fractions rationnelles ainsi que J.G. Luque pour le concours qu'il a apporté à l'élaboration de ce travail.

Références

- [1] A. Boussicault, *Operations on posets and rational identities of type A*, FPSAC (2007).
- [2] S. Butler and M. Bousquet-Mélou, *Forest-like permutations*, ArXiv : math.CO/0603617 (2005).
- [3] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics **173** (2005), Springer-Verlag Heidelberg.
- [4] P.J. Giblin, *Graphs, Surface and Homology - An Introduction to Algebraic Topology* (1981), London and New York Chapman and Hall.
- [5] C. Greene, *A rational function identity related to the Murnaghan-Nakayama formula for the characters of \mathcal{S}_n* , J. Alg. Comb. **1** 3 (1992), 235-255.
- [6] A. Lascoux, *Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials*, Series Conference Board of the Mathematical Sciences, Amer. Math. Soc. **99** (2003).

INSTITUT GASPARD MONGE, UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE, 5 BOULEVARD DESCARTES, CHAMPS-SUR-MARNE, 77454 MARNE-LA-VALLÉE CEDEX 2, FRANCE

E-mail address: adrian.boussicault@univ-mlv.fr