

Tableaux boisés servis avec leur algorithme d'insertion

Adrien Boussicault

Travail en collaboration avec
Jean-Christophe Aval, Mathilde Bouvel et Philippe Nadeau

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

GT - Bordeaux - 13 mai 2011

Introduction

Les tableaux boisés sont des objets inspirés des tableaux alternatifs et des tableaux de permutations.

Les tableaux alternatifs et les tableaux de permutations ont été utilisés pour étudier

- la structure du PASEP;
- les motifs $2 - 31$ d'une permutation;
- les excédences et cycles d'une permutation.

Introduction

Les tableaux alternatifs et les tableaux de permutations ont fait le sujet de nombreux articles de recherche:

- 2006 : Postnikov,
- 2005 : Williams,
- 2007 : Burstein , Corteel/Hitczenko, Corteel/Williams, Steingrímsson/Williams,
- 2008 : Corteel/Nadeau, Nadeau, Viennot,
- 2010 : Corteel/Kim, Corteel/Williams.

Les tableaux boisés et leur algorithme d'insertion est un modèle permettant d'expliquer simplement un grand nombre de résultats mis en valeurs par les recherches précédentes.

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

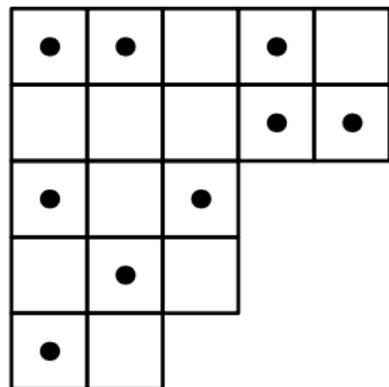
Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Tableaux boisés



$\text{taille}(\text{tableau boisé}) = \text{nb points}$

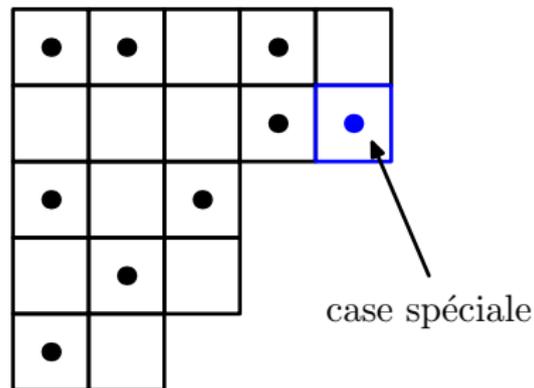
- La forme du tableau est une partition;
- chaque ligne et chaque colonne contient au moins un point;
- le motif  est interdit;
- La case nord-ouest contient un point;
- Mis à part le point situé dans le coin nord-ouest du tableau, chaque point possède un point sur la même ligne à sa gauche, ou sur la même colonne au dessus de lui.

Principe de l'algorithme d'insertion

A partir d'un objet initial fixé, itérer l'étape suivante :

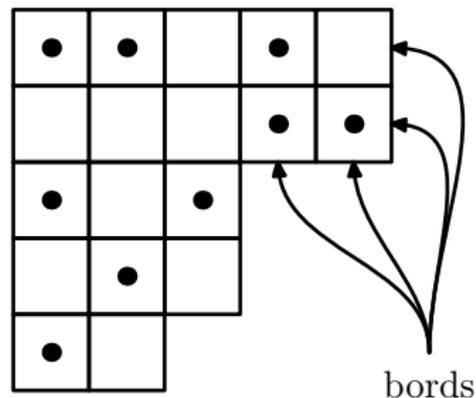
- 1 repérer la case spéciale (généralement la case ajoutée à l'étape précédente);
- 2 choisir une position sur l'objet courant;
- 3 ajouter une case à la position choisie;
- 4 si la nouvelle case ajoutée est à gauche de la case spéciale, alors il faut ajouter un ruban reliant les deux cases.

Repérer la case spéciale



Le point spécial est le point le plus à droite qui ne possède pas de case en dessous de lui.

Choisir une position : les bords du tableau boisé

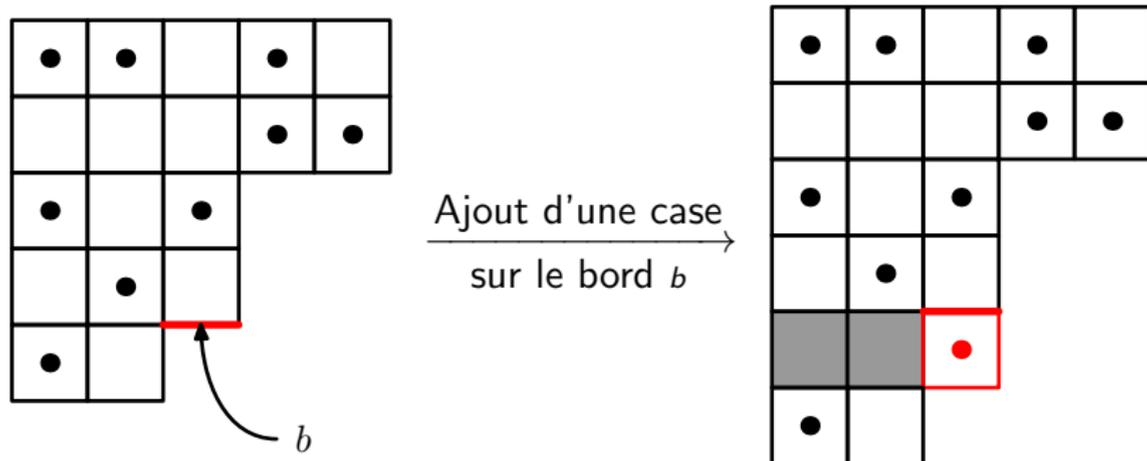


$\text{taille}(\text{tableau boisé}) = \text{nb points}$

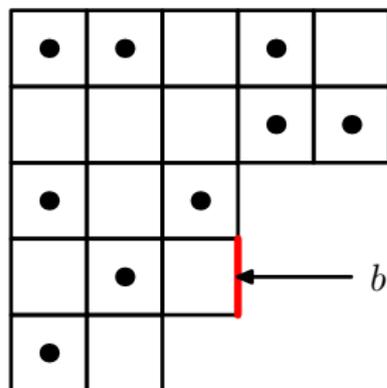
$$\text{taille}(T) = 9$$

Il y a $\text{taille}(T) + 1$ bords.

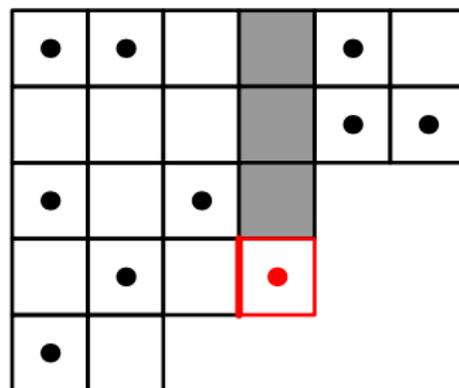
Ajouter une case sur un bord horizontal



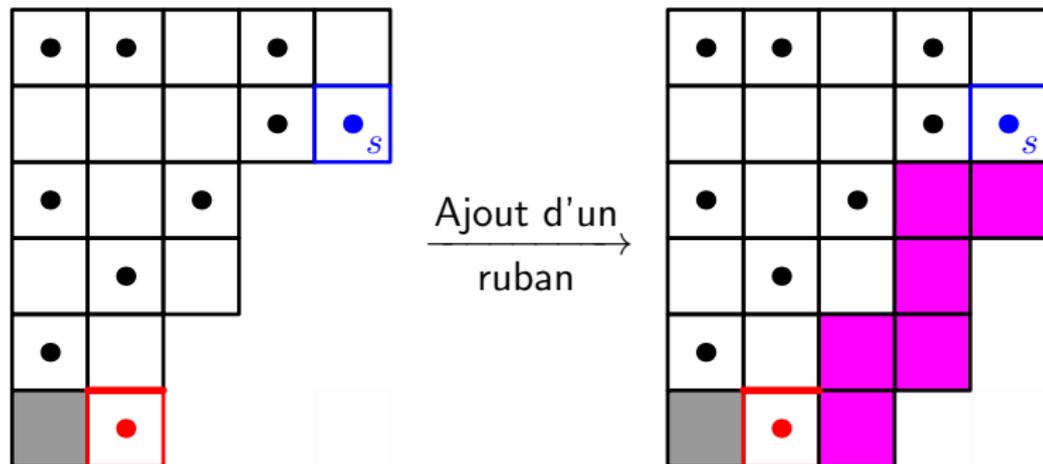
Ajouter une case sur un bord vertical



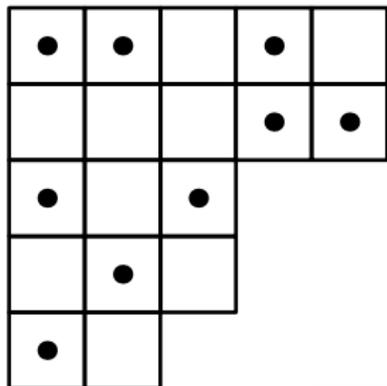
Ajout d'une case
sur le bord b →



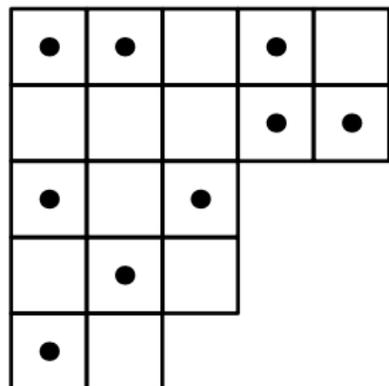
Ajouter un ruban



Une étape de l'algorithme d'insertion

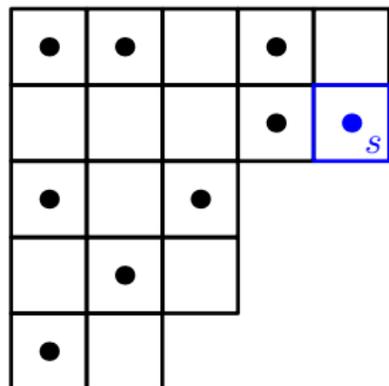


Une étape de l'algorithme d'insertion



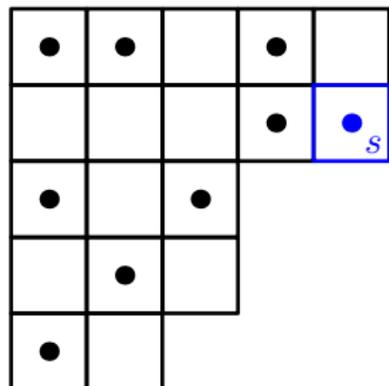
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;

Une étape de l'algorithme d'insertion



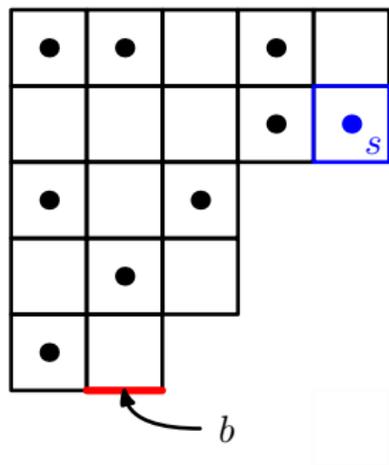
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;

Une étape de l'algorithme d'insertion



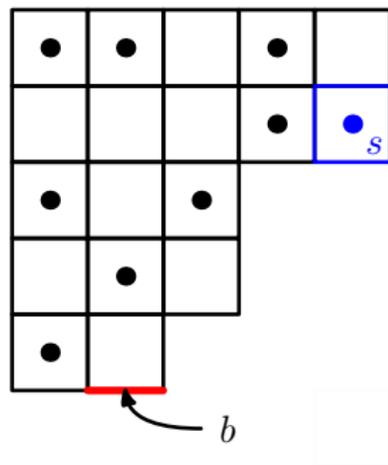
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;

Une étape de l'algorithme d'insertion



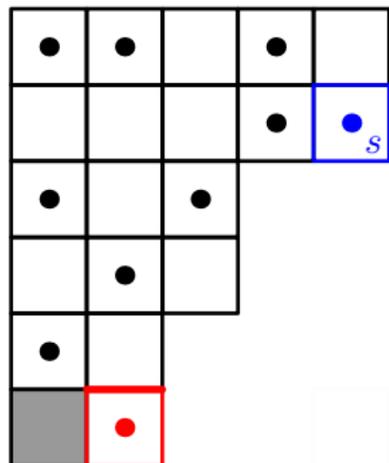
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;

Une étape de l'algorithme d'insertion



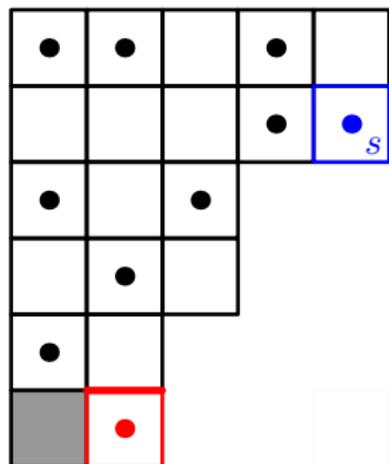
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;

Une étape de l'algorithme d'insertion



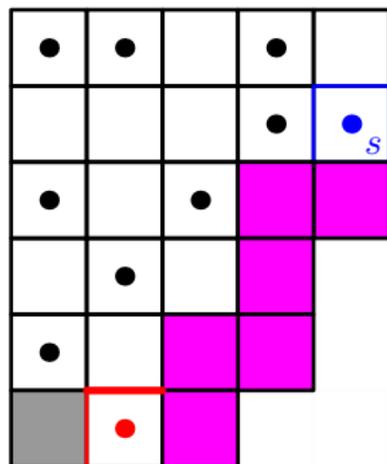
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;

Une étape de l'algorithme d'insertion



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Une étape de l'algorithme d'insertion



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .



Algorithme d'insertion - exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



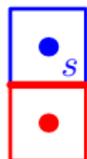
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



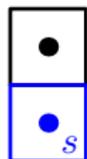
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



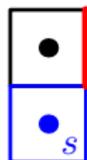
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



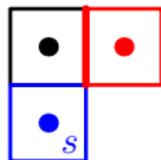
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



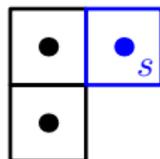
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



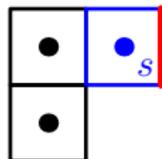
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



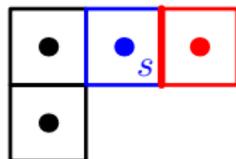
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



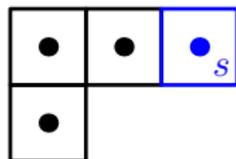
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



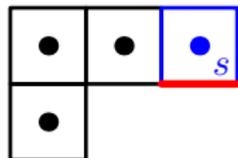
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



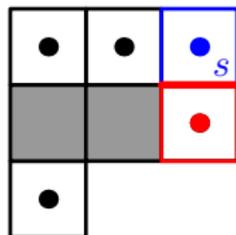
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



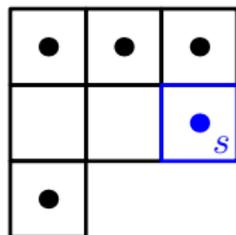
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



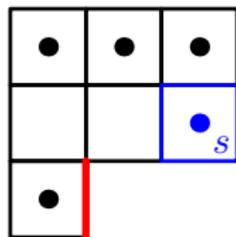
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



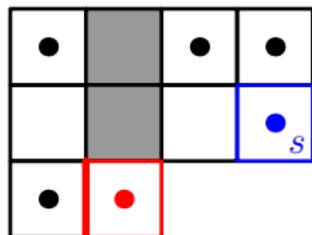
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



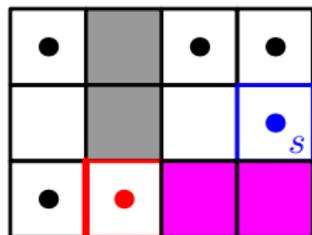
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



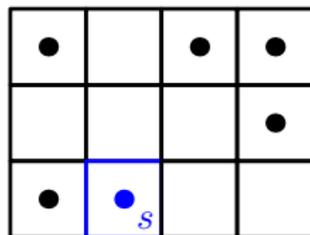
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



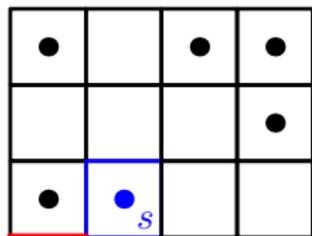
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



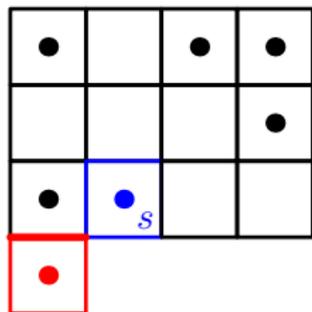
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



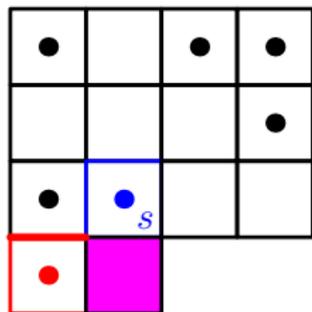
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



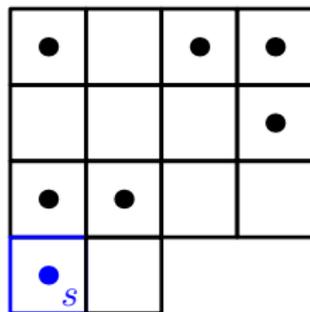
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



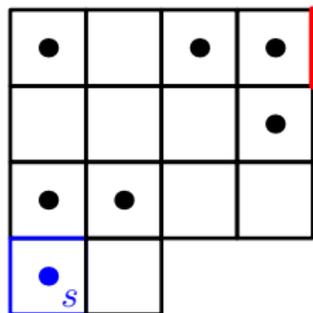
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



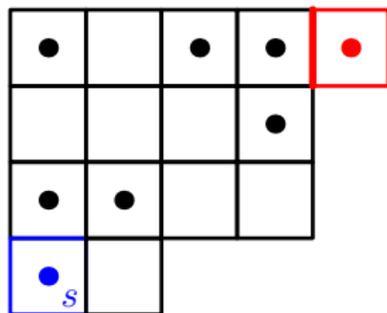
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



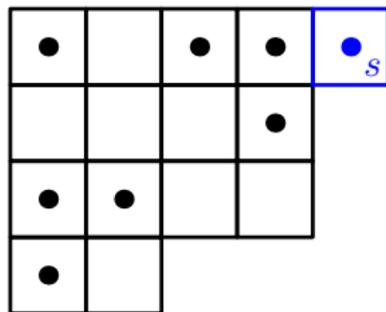
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



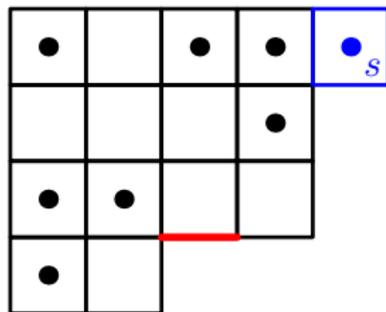
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



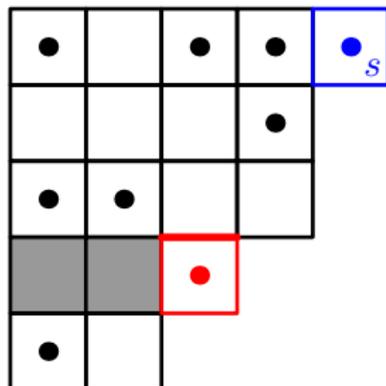
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



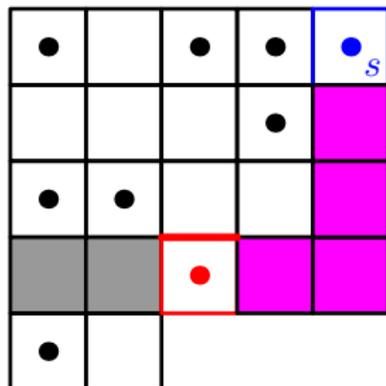
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



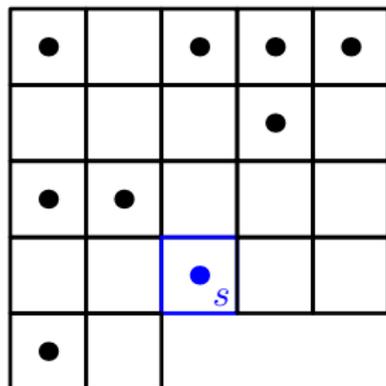
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



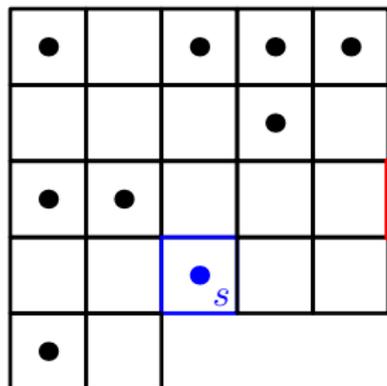
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



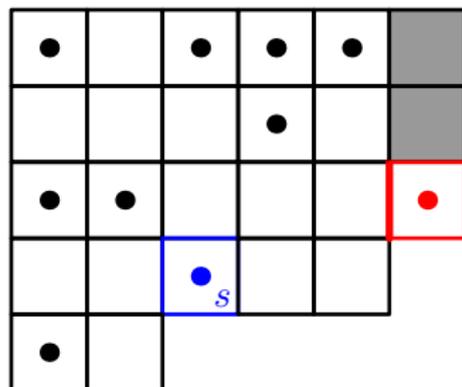
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



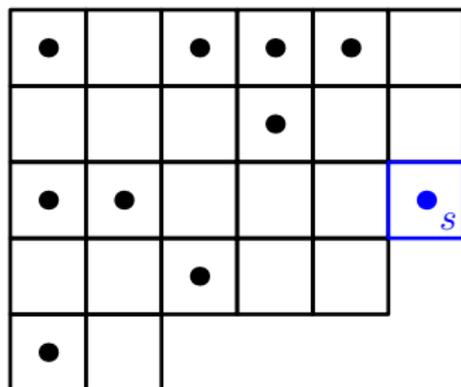
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



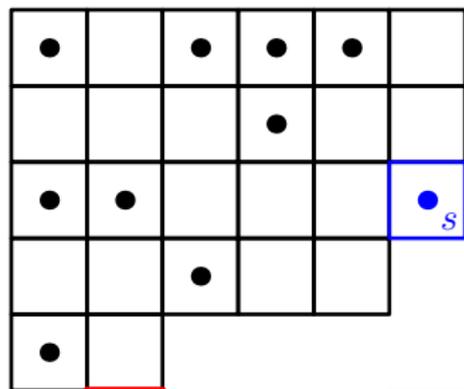
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



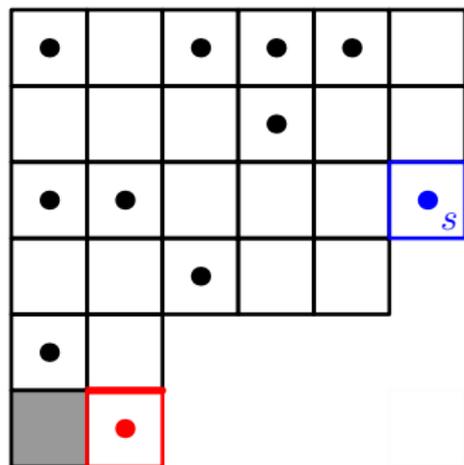
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



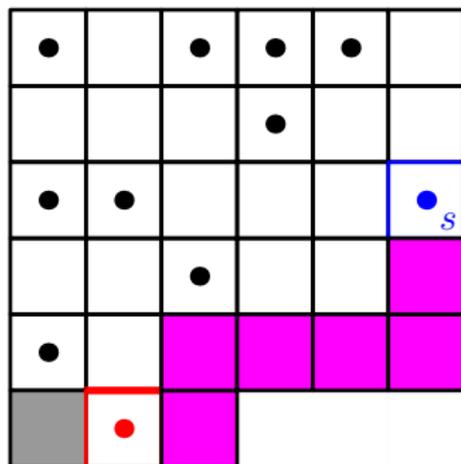
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



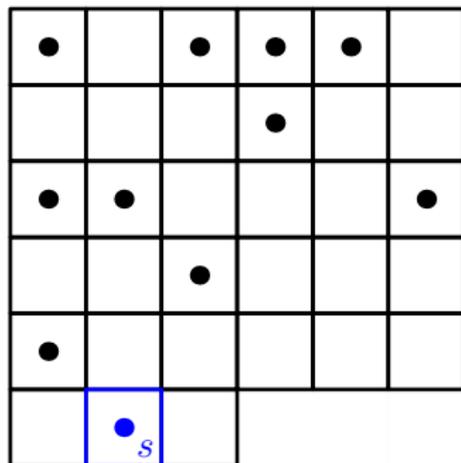
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet



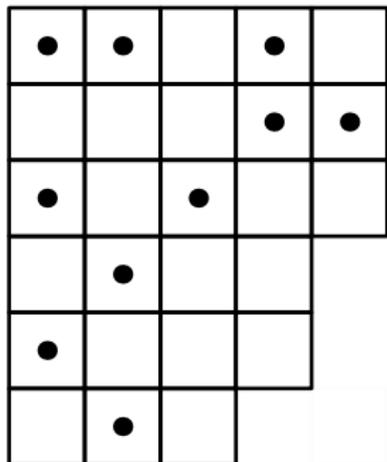
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Algorithme d'insertion - exemple complet

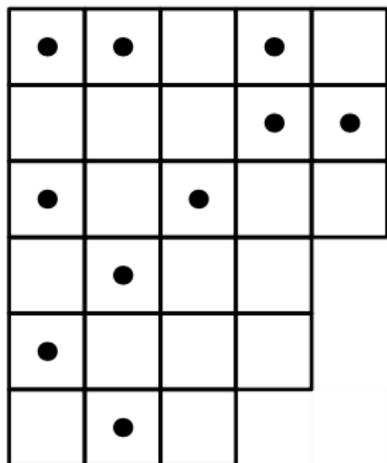


- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b ;
- 3) on ajoute la ligne ou la colonne correspondant au bord b ;
- 4) si la case ajoutée est située à gauche de la case s , on ajoute un ruban entre la case ajoutée sur le bord b et l'ancienne case spéciale s .

Une étape de l'Algorithme d'insertion inverse

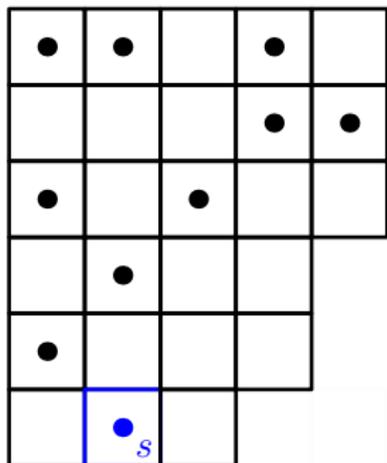


Une étape de l'Algorithme d'insertion inverse



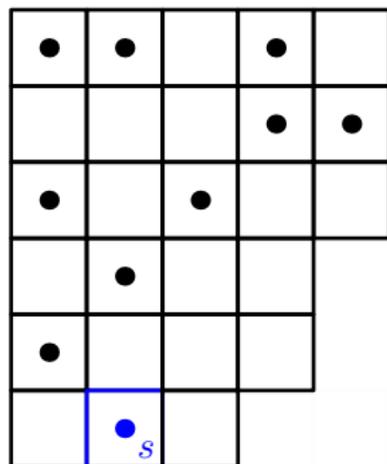
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;

Une étape de l'Algorithme d'insertion inverse



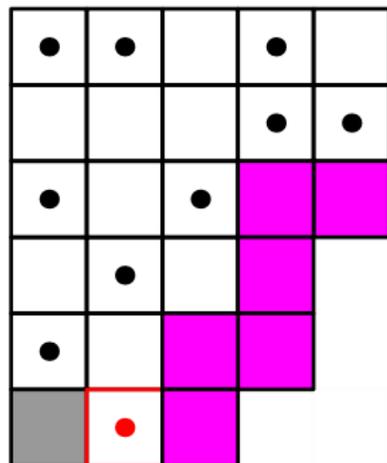
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;

Une étape de l'Algorithme d'insertion inverse



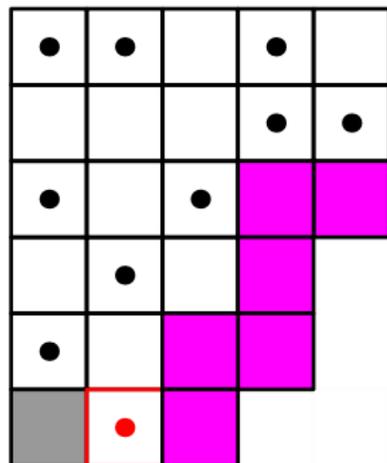
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;

Une étape de l'Algorithme d'insertion inverse



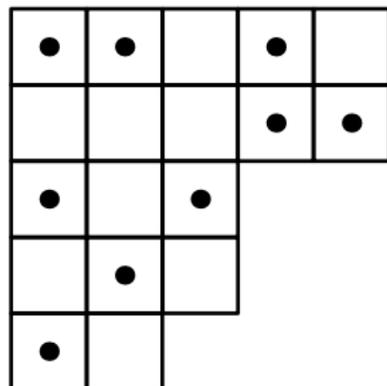
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;

Une étape de l'Algorithme d'insertion inverse



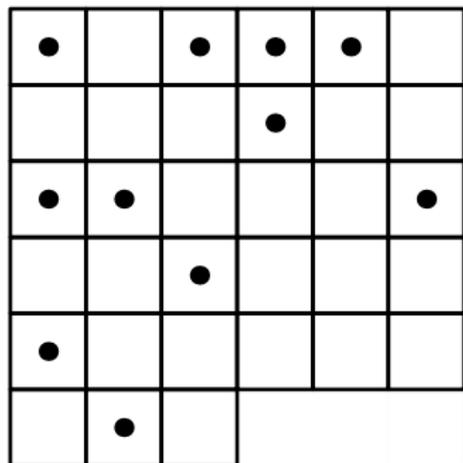
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Une étape de l'Algorithme d'insertion inverse



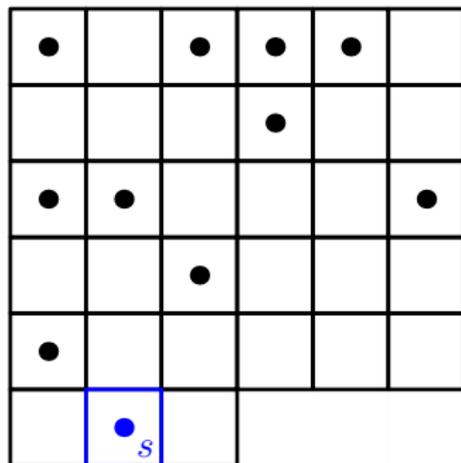
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



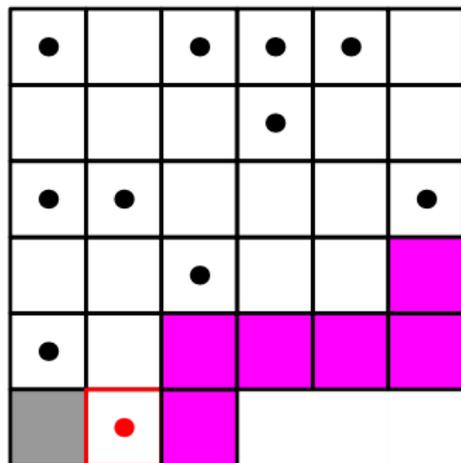
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



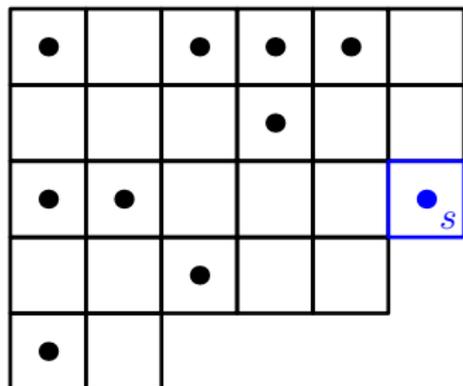
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



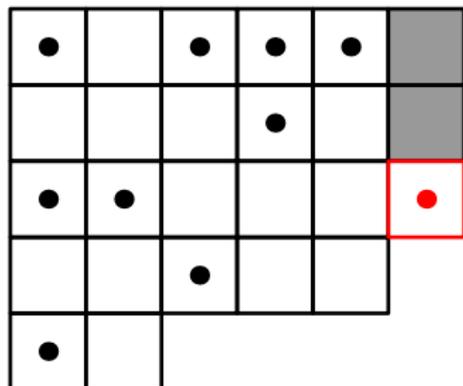
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



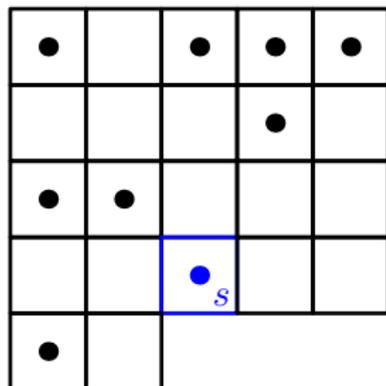
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



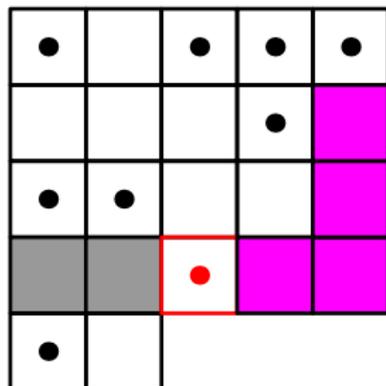
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



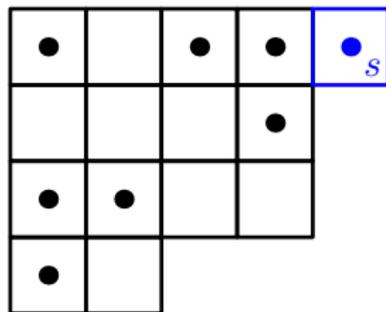
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



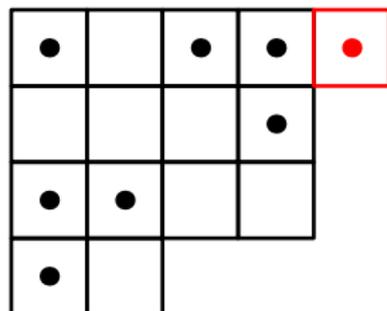
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



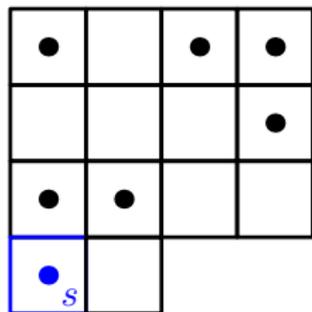
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



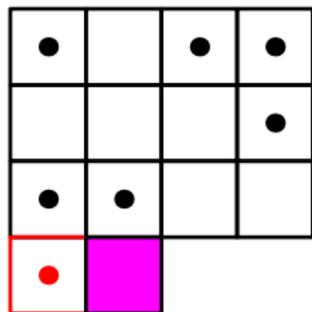
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet

| | | | |
|---|----------------|---|---|
| ● | | ● | ● |
| | | | ● |
| ● | ● _s | | |

- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

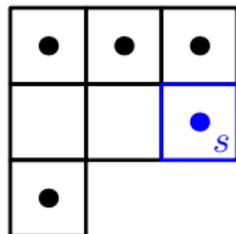
Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet

| | | | |
|---|---|---|---|
| ● | ■ | ● | ● |
| | ■ | | ● |
| ● | ● | ■ | ■ |



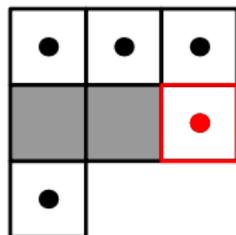
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



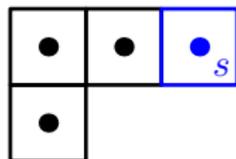
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



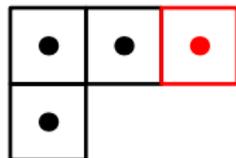
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



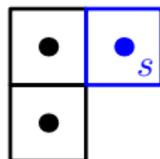
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



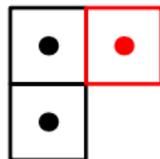
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



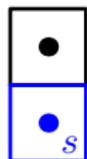
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



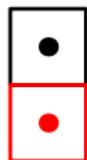
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.



Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.



Algorithme d'insertion inverse - Exemple complet



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on sélectionne,
 - ▶ la ligne (ou colonne) qui ne contient aucun point hormis celui de la case spéciale;
 - ▶ le ruban d'origine la case spéciale;
- 3) on supprime la ligne (ou colonne) et le ruban.

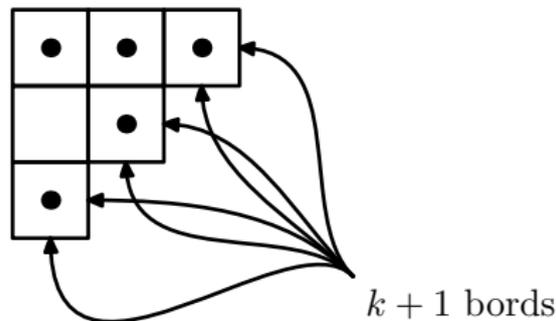


Nombre de tableaux boisés de taille n

$n!$

Preuve :

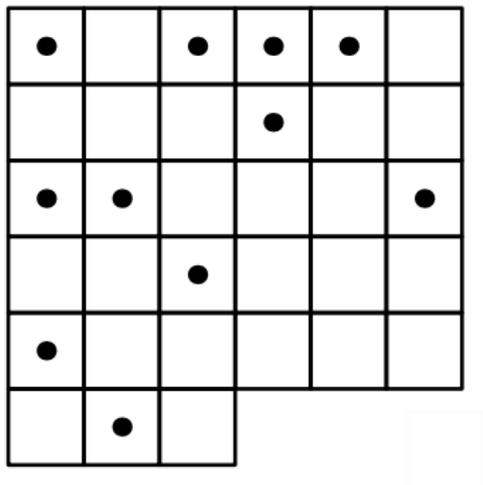
À un tableau boisé de taille k ,
on construit $k + 1$ tableaux
boisés différents de taille $k + 1$.



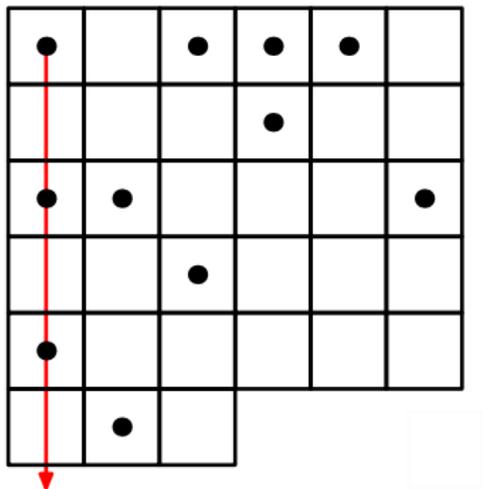
Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - **Une structure d'arbre sous-jacente**
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

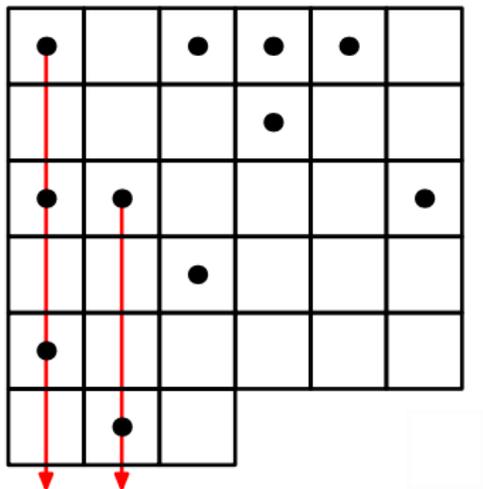
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



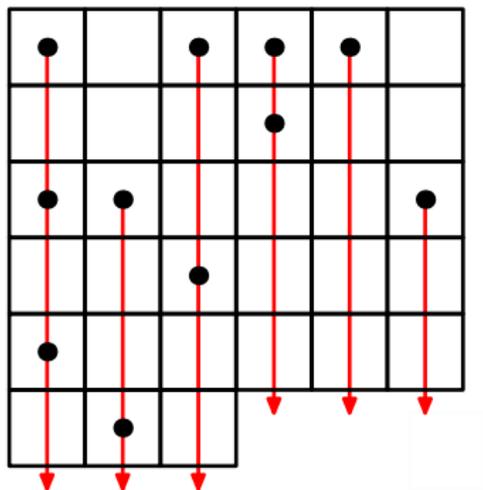
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



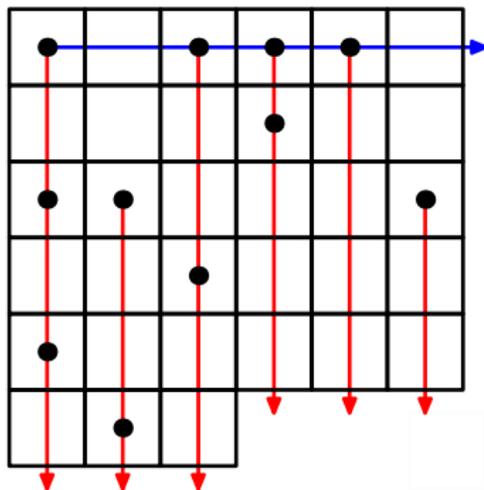
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



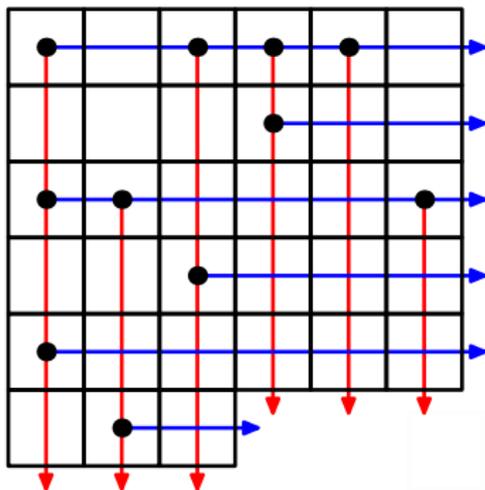
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



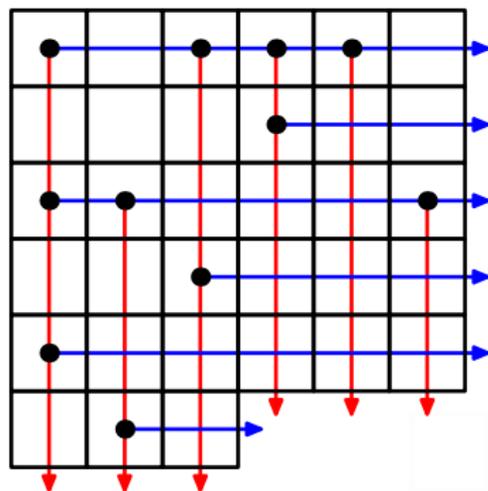
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



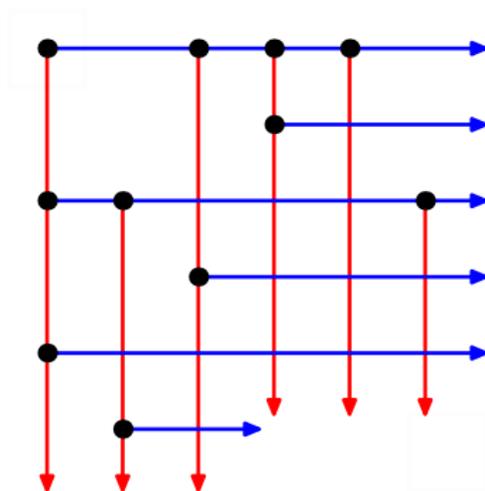
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



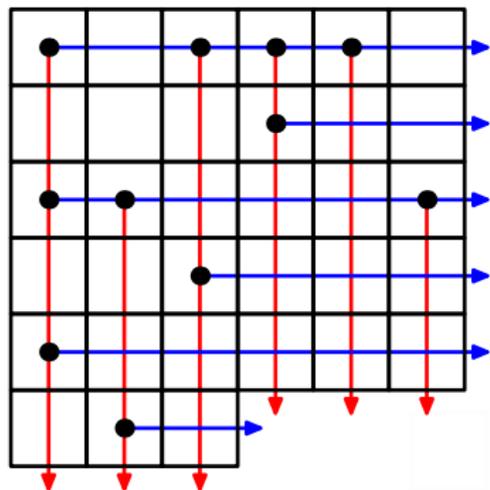
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



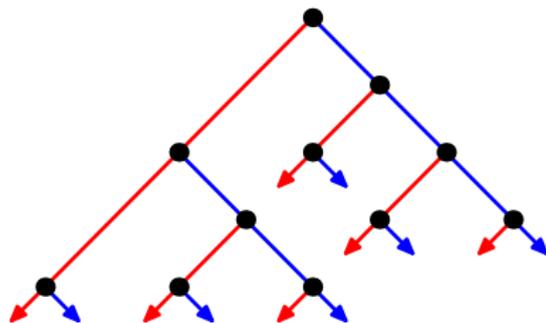
Extraction
de l'arbre



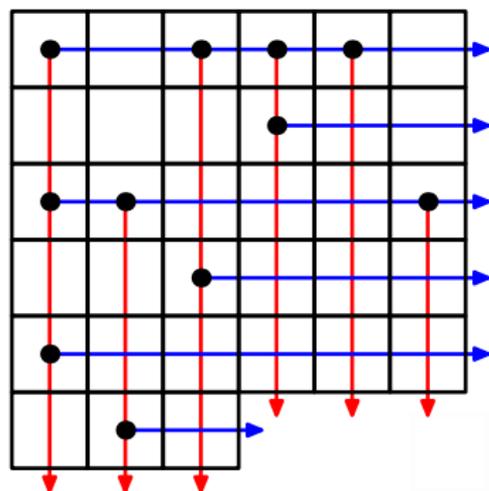
Arbres ensoleillés et tableaux boisés



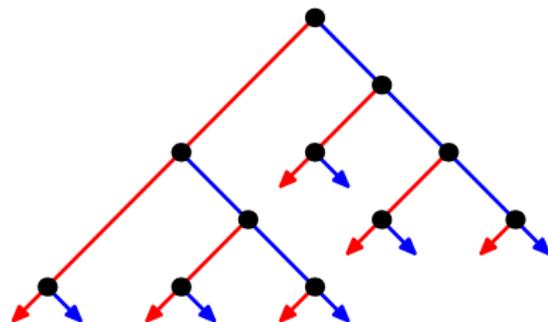
Extraction
de l'arbre



Arbres ensoleillés et tableaux boisés



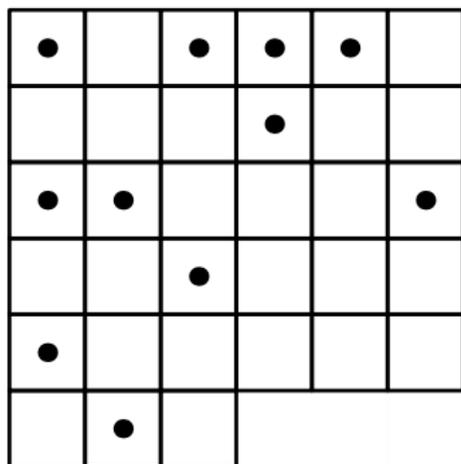
Extraction
de l'arbre



La structure arborescente des tableaux boisés a été initialement découverte par Burstein en 2007. Elle a été ensuite étudiée plus particulièrement par Nadeau en 2009.

Bijection entre tableaux boisés et arbres croissants

On étiquette les points du tableaux boisé selon leur ordre d'arrivée durant l'algorithme d'insertion. On extrait ensuite l'arbre en gardant les étiquettes.



Bijection entre tableaux boisés et arbres croissants

On étiquette les points du tableaux boisé selon leur ordre d'arrivée durant l'algorithme d'insertion. On extrait ensuite l'arbre en gardant les étiquettes.

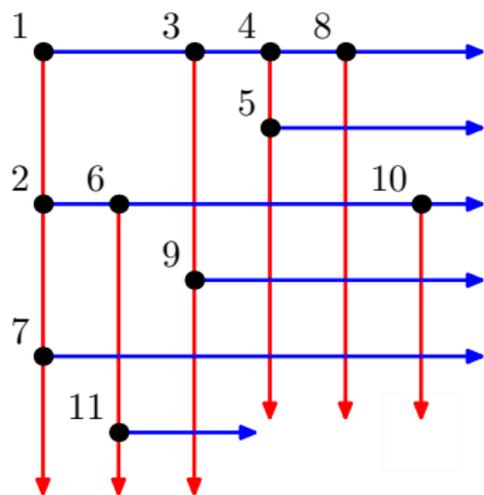
| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| 1 | | 3 | 4 | 8 | |
| | | | 5 | | |
| 2 | 6 | | | | 10 |
| | | 9 | | | |
| 7 | | | | | |
| | 11 | | | | |

Bijection entre tableaux boisés et arbres croissants

On étiquette les points du tableaux boisé selon leur ordre d'arrivée durant l'algorithme d'insertion. On extrait ensuite l'arbre en gardant les étiquettes.

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| 1 | | 3 | 4 | 8 | |
| | | | 5 | | |
| 2 | 6 | | | | 10 |
| | | 9 | | | |
| 7 | | | | | |
| | 11 | | | | |

Extraction
de l'arbre

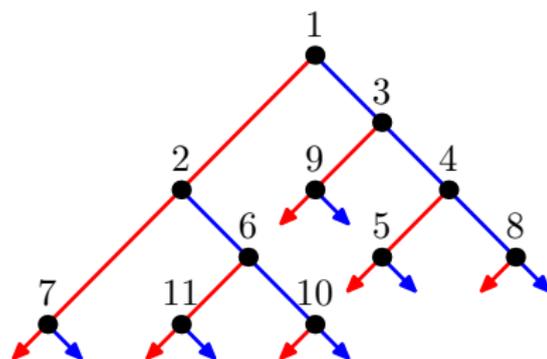


Bijection entre tableaux boisés et arbres croissants

On étiquette les points du tableaux boisé selon leur ordre d'arrivée durant l'algorithme d'insertion. On extrait ensuite l'arbre en gardant les étiquettes.

| | | | | | |
|---|----|---|---|---|----|
| 1 | | 3 | 4 | 8 | |
| | | | 5 | | |
| 2 | 6 | | | | 10 |
| | | 9 | | | |
| 7 | | | | | |
| | 11 | | | | |

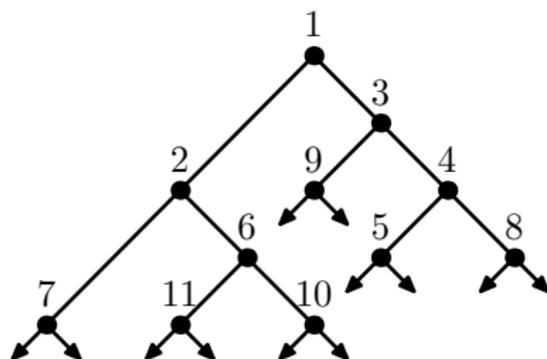
Extraction
de l'arbre



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

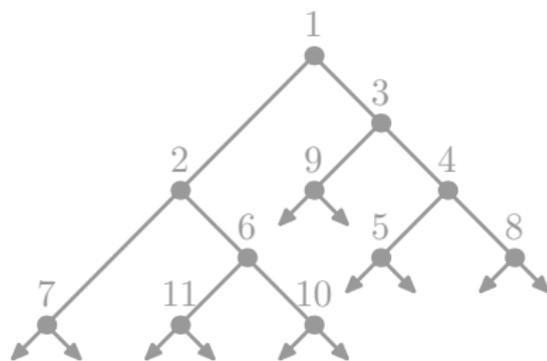
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

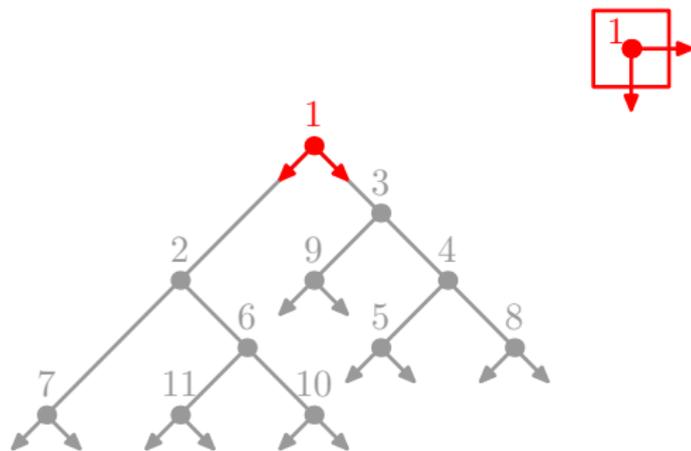
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

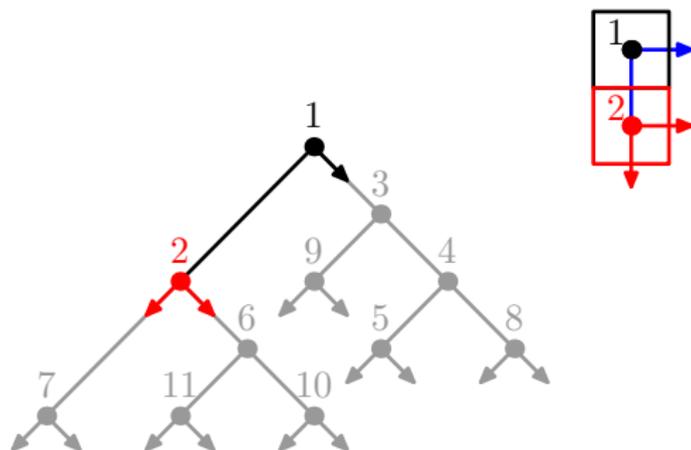
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

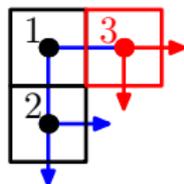
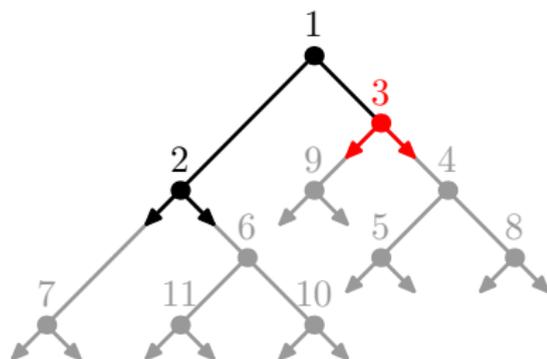
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

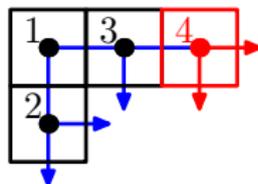
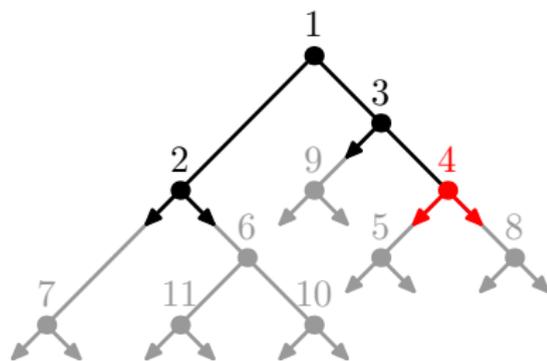
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

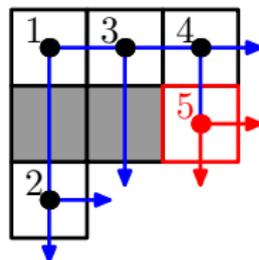
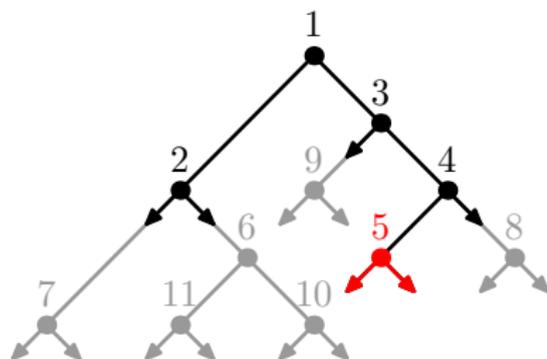
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

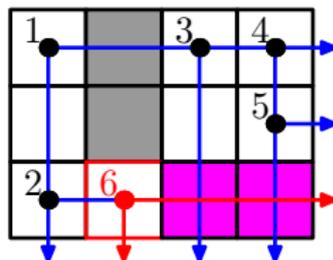
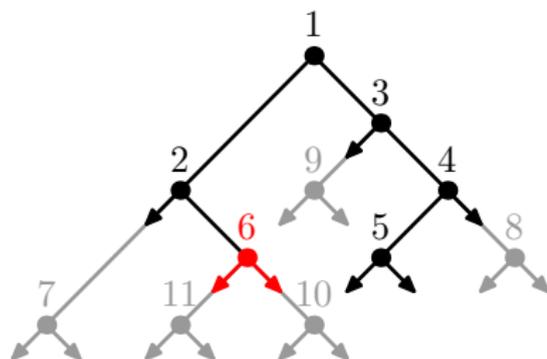
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

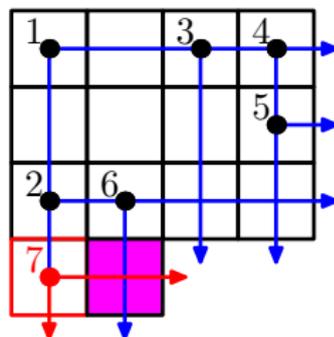
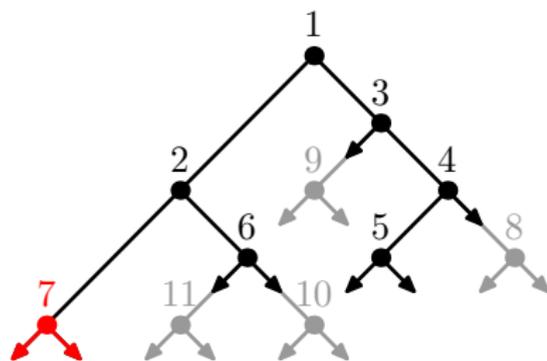
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

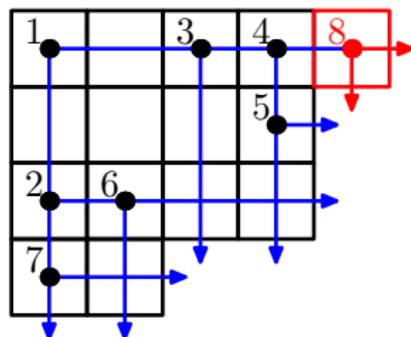
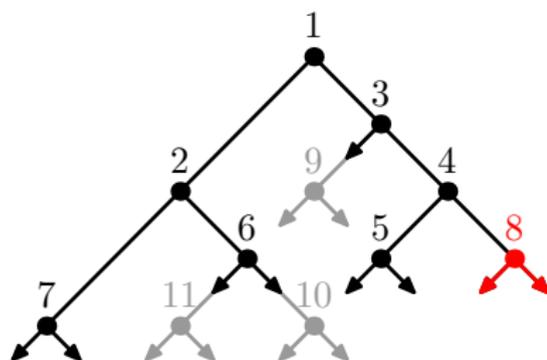
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

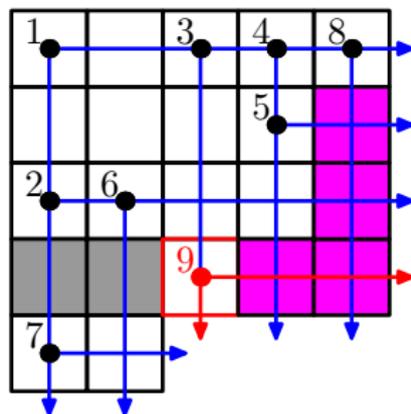
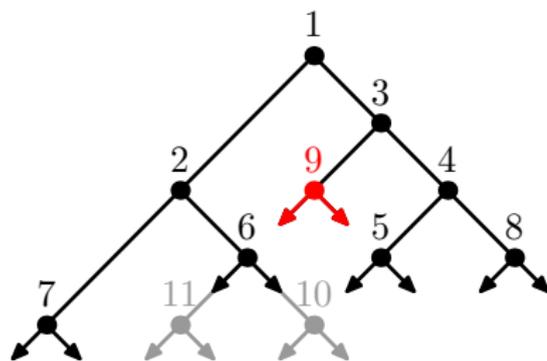
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

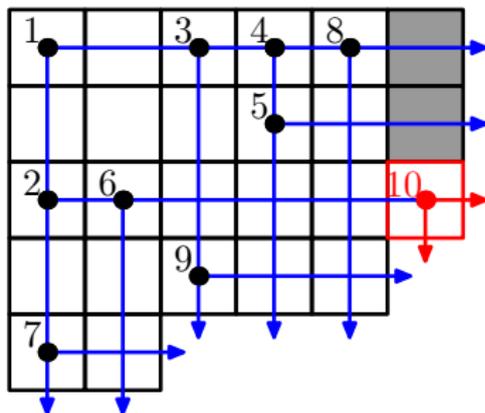
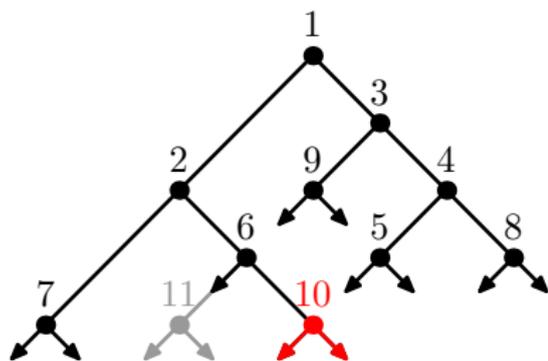
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

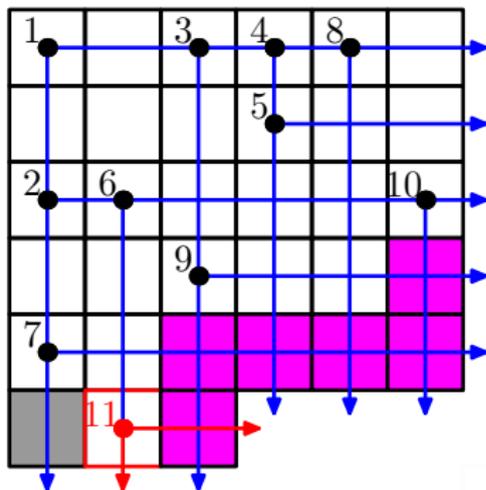
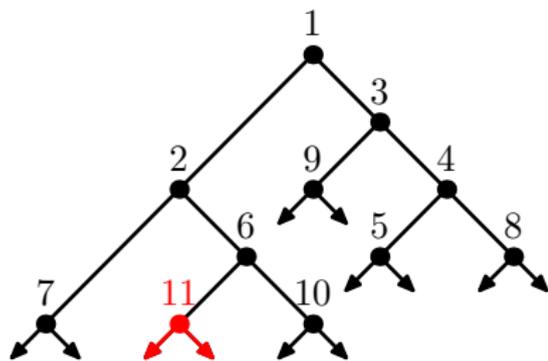
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

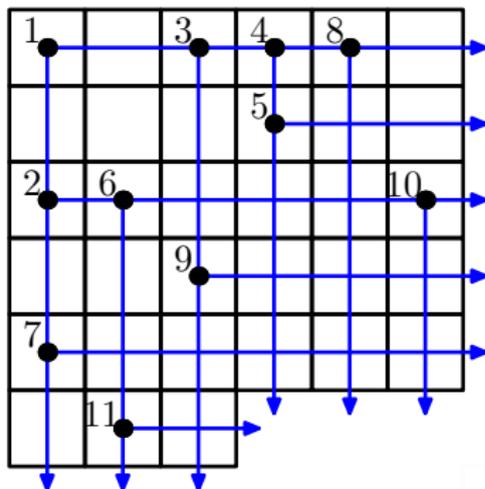
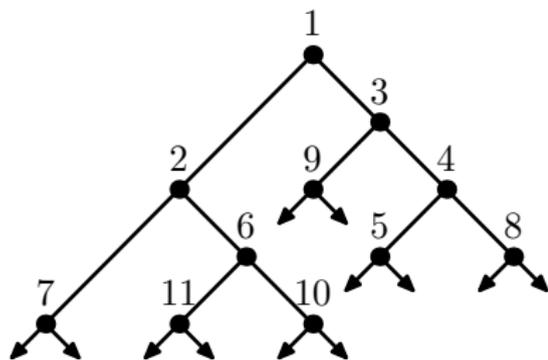
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

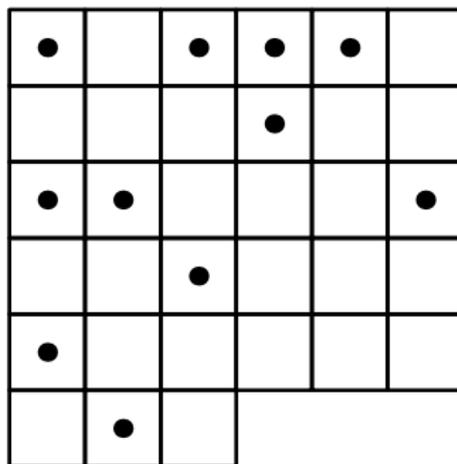
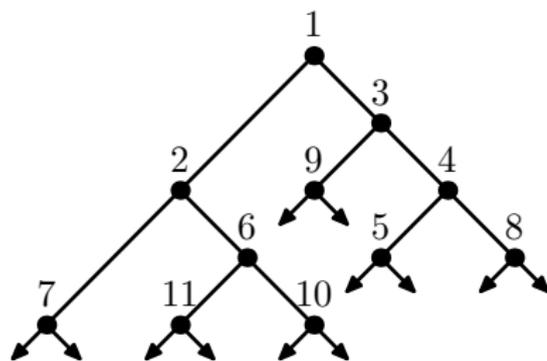
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Bijection inverse

Choisir un bord dans l'algorithme d'insertion revient à choisir une feuille dans l'arbre croissant. Insérer une case dans le tableau est équivalent à insérer un sommet dans une feuille.

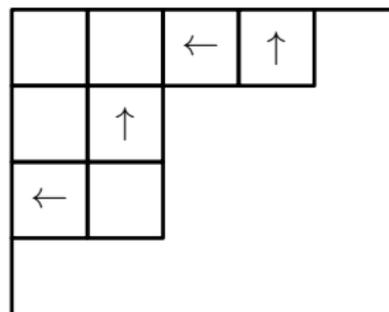
Pour obtenir la bijection inverse, il suffit d'insérer une case au bord pointé par la feuille dans laquelle on va insérer un noeud.



Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

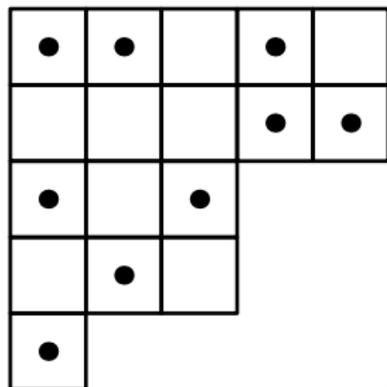
Les tableaux alternatifs



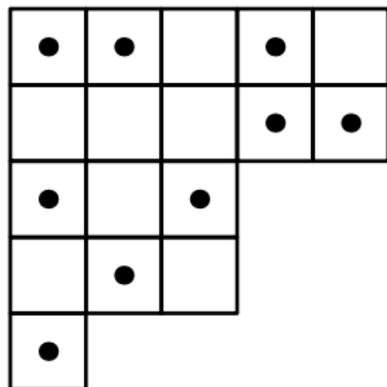
- La forme du tableau est une partition avec des lignes et des colonnes éventuellement vides;
- les cases contiennent des flèches orientées vers la gauche ou vers le haut;
- toutes les cases situées devant une flèche doivent être vides.

Les tableaux alternatifs ont été mis au point par Viennot en 2008. Il a montré qu'ils se déduisaient naturellement du "matrix ansatz" pour le PASEP et qu'ils étaient en bijection avec les tableaux de permutations.

Tableaux boisés vers tableaux alternatifs

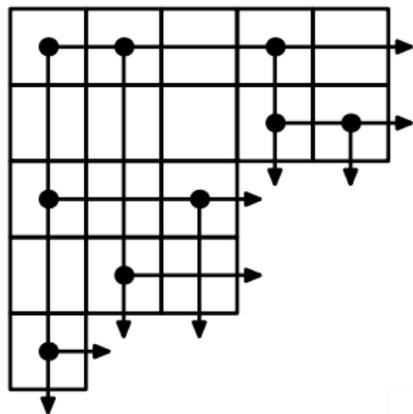


Tableaux boisés vers tableaux alternatifs



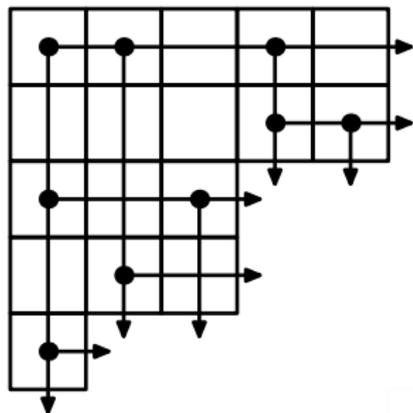
- 1) On construit l'arbre associé au tableau boisé;

Tableaux boisés vers tableaux alternatifs



- 1) On construit l'arbre associé au tableau boisé;

Tableaux boisés vers tableaux alternatifs

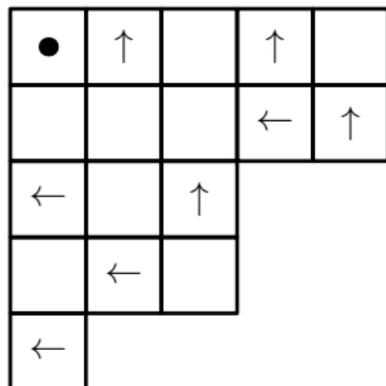


1) On construit l'arbre associé au tableau boisé;

2) on remplace $\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \leftarrow \end{array}$ par \leftarrow et

$\begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ \bullet \end{array}$ par \uparrow ;

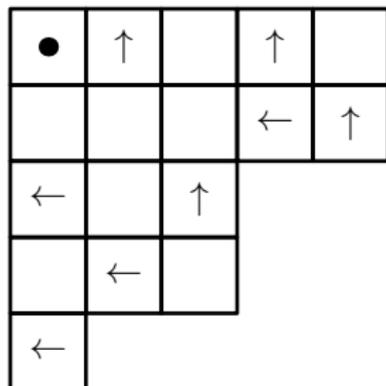
Tableaux boisés vers tableaux alternatifs



1) On construit l'arbre associé au tableau boisé;

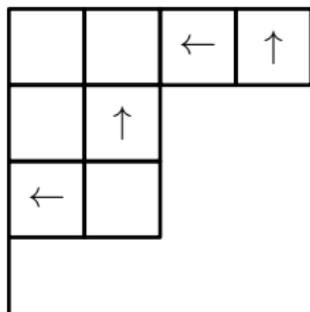
2) on remplace  par ← et  par ↑ ;

Tableaux boisés vers tableaux alternatifs



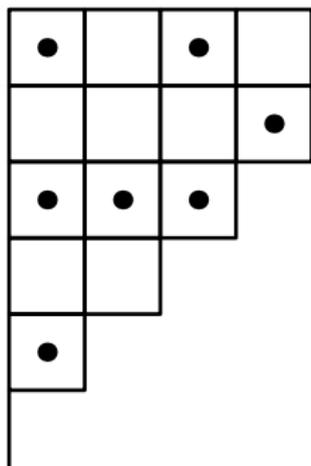
- 1) On construit l'arbre associé au tableau boisé;
- 2) on remplace  par \leftarrow et  par \uparrow ;
- 3) on supprime la première ligne et la première colonne.

Tableaux boisés vers tableaux alternatifs



- 1) On construit l'arbre associé au tableau boisé;
- 2) on remplace $\begin{array}{c} \bullet \\ \leftarrow \end{array}$ par \leftarrow et $\begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow \end{array}$ par \uparrow ;
- 3) on supprime la première ligne et la première colonne.

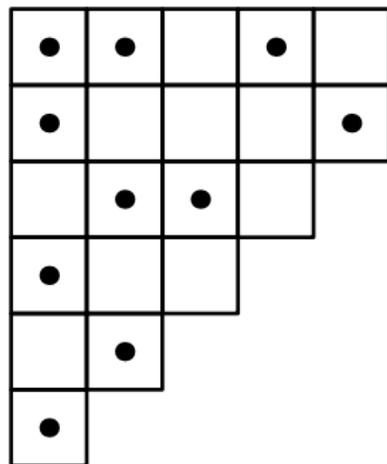
Les tableaux de permutations



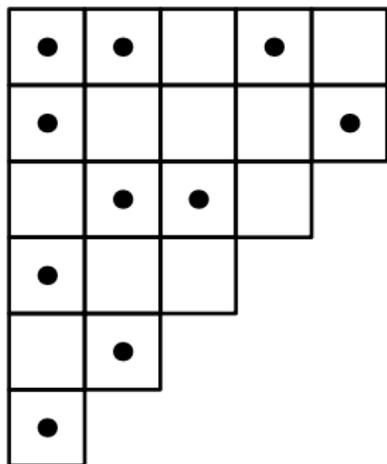
- La forme du tableau est une partition;
- chaque colonne contient au moins un point;
- le motif $\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \ \emptyset \end{array}$ est interdit;

Les tableaux de permutations ont été introduit par Postnikov (2006).

Tableaux boisés vers tableaux de permutations

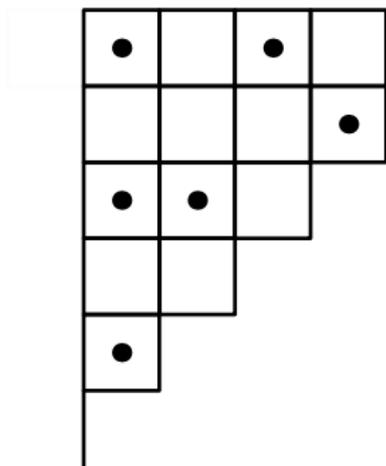


Tableaux boisés vers tableaux de permutations



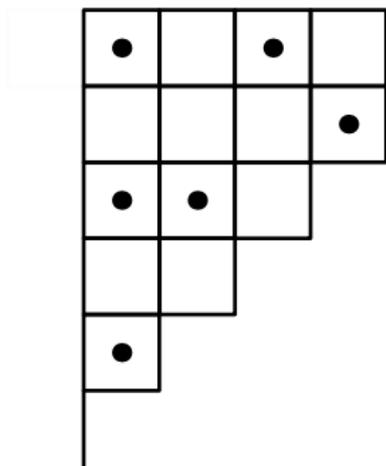
1) On supprime la première colonne;

Tableaux boisés vers tableaux de permutations



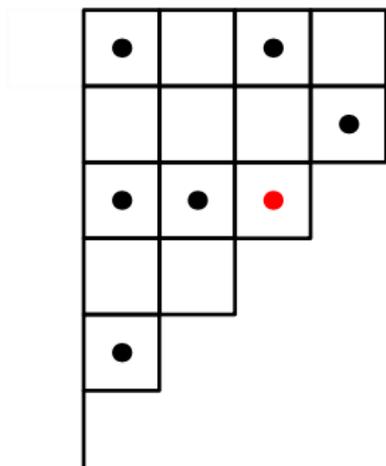
1) On supprime la première colonne;

Tableaux boisés vers tableaux de permutations



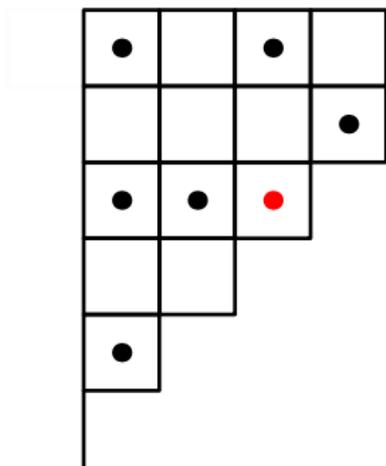
- 1) On supprime la première colonne;
- 2) on remplace tout les motifs $\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$ \emptyset par les motifs $\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$.

Tableaux boisés vers tableaux de permutations



- 1) On supprime la première colonne;
- 2) on remplace tout les motifs $\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$ \emptyset par les motifs $\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$.

Tableaux boisés vers tableaux de permutations



1) On supprime la première colonne;

2) on remplace tout les motifs $\bullet \overset{\bullet}{\emptyset}$

par les motifs $\bullet \overset{\bullet}{\bullet}$.

L'idée de remplacer le motif $\bullet \overset{\bullet}{\bullet}$ par le motif $\bullet \overset{\bullet}{\emptyset}$ a été initialement mis au point par Burstein en 2007. Cette bijection est simple, mais ne préserve pas de nombreuses statistiques. Nadeau à mis au point en 2009 des bijections plus évoluées permettant de respecter de nombreuses statistiques.

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 **Bijections entre tableaux boisés et permutations**
 - **Un patron de bijections**
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Principe du patron de bijection

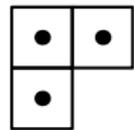


tableau
boisé

← premier
paramètre →

$\emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3)$

← deuxième
paramètre →

$[2, 1, 3]$
perm.

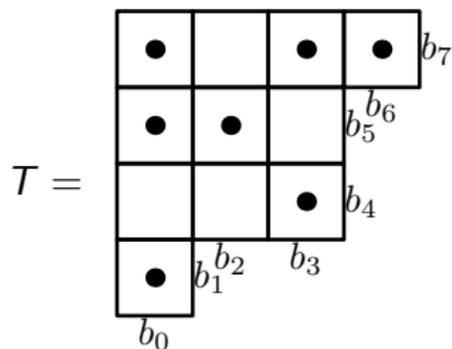
La numérotation du bord d'un tableau boisé

On numérote les bords d'un tableau boisé en définissant la fonction :

$$\begin{array}{l} \text{Bord} : \bigcup_{n \geq 0} \{\text{tableaux boisés de taille } n\} \times \llbracket 0..n \rrbracket \rightarrow \{\text{bords}\} \\ \qquad \qquad \qquad (T, u) \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \rightarrow \qquad b \end{array}$$

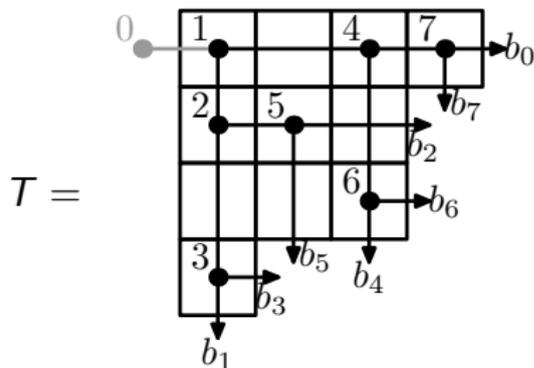
Premier exemple de numérotation du bord

On numérote les bords de la gauche vers la droite.



$$\text{bord}(T, u) := b_u$$

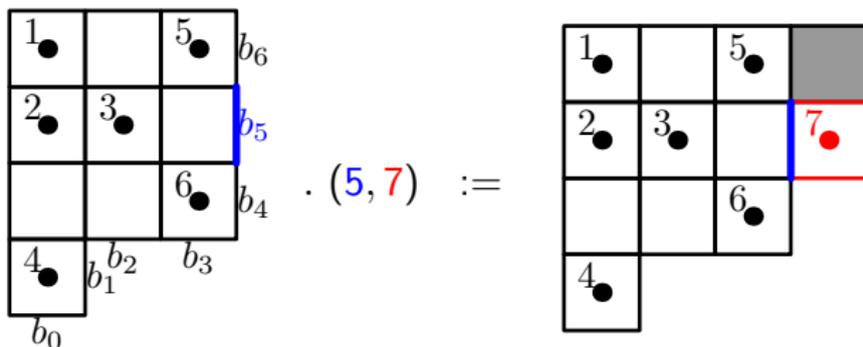
Deuxième exemple de numérotation du bord



$$\text{bord}(T, u) := b_u$$

- 1 On ajoute une racine virtuelle 0 à l'arbre.
- 2 Pour chaque bord b :
 - ▶ on repère la feuille associée au bord b
 - ▶ on remonte l'arbre, en partant de la feuille sans jamais tourner
 - ▶ le numero de bord est l'étiquette du dernier sommet

Le produit d'un tableau boisé par un bord

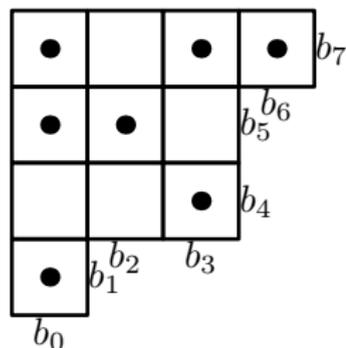


$$T.(u, |T| + 1) := \begin{cases} 0 & \text{si } u > |T| \\ \text{insertion}(T, \text{bord}(T, u)) & \text{sinon} \end{cases}$$

$(u, |T| + 1)$
 numéro du bord \uparrow \uparrow étape d'insertion

Les tableaux boisés sont des produits de bords

On choisit de numéroter les bords de la gauche vers la droite.



$$= \emptyset.(0, 1).(0, 2).(0, 3).(3, 4).(2, 5).(3, 6).(6, 7)$$

Série génératrice pour les tableaux boisés

$$\sum_{T \in \text{tableaux boisés}} T = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

$$X_k = (0, k) + (1, k) + \dots + (k - 1, k).$$

Patron de bijection

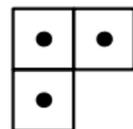


tableau
boisé

← Numérotation
du bord →

$\emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3)$

← Interprétation
du produit →

$[2, 1, 3]$
perm.

Paramètres:

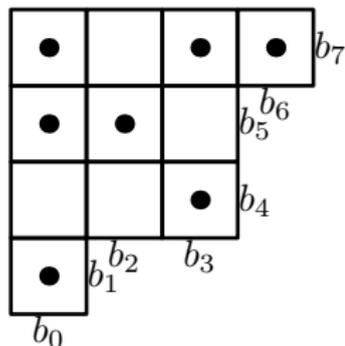
- Numérotation du bord
- Interprétation du produit de couples comme une permutation

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 **Bijections entre tableaux boisés et permutations**
 - Un patron de bijections
 - **Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code**
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Mise en oeuvre du patron de bijections

- Numérotation du bord de la gauche vers la droite.



- Les bords $(u_1, 1)(u_2, 2) \dots (u_n, n)$ codent la table d'inversions d'une permutation où le bord (u_k, k) signifie qu'il y a u_k entrées plus petites que k situées avant k dans la permutation.

Exemple

$$T = \emptyset$$

$$= \bullet$$



$$=$$



Exemple

$$T = \emptyset$$

$$= \bullet$$



(0, 1)

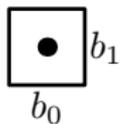
$$=$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1)$$

$$= \bullet 1 \bullet$$



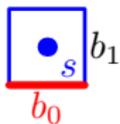
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1)$$

$$= \bullet 1 \bullet$$



(0, 2)

=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2)$$

$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet$$

$$= \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b_2 \\ s \\ b_1 \\ b_0 \end{array}$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2)$$

$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet$$

$$= \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{array}$$

(2, 3)

Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3)$$

$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet 3 \bullet$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b_3 \\ b_1 b_2 \\ b_0 \end{array}$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3)$$

$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet 3 \bullet$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b_3 \\ b_1 b_2 \\ b_0 \end{array}$$

(3, 4)



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3).(3, 4)$$

$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 4 \bullet$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{array}$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3).(3, 4)$$

$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 4 \bullet$$

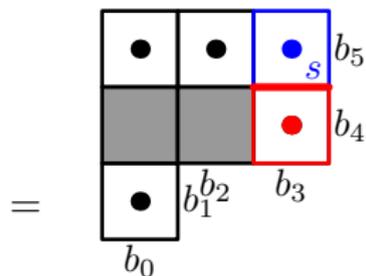
$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b_4 \\ s \\ b_3 \\ b_1 b_2 \\ b_0 \end{array}$$

(3, 5)

Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3).(3, 4).(3, 5)$$

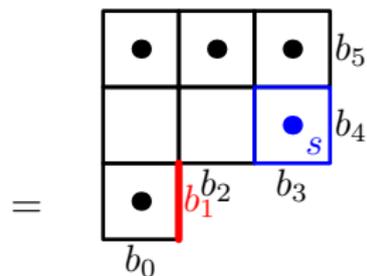
$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 4 \bullet$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3).(3, 4).(3, 5)$$

$$= \bullet 2 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 4 \bullet$$

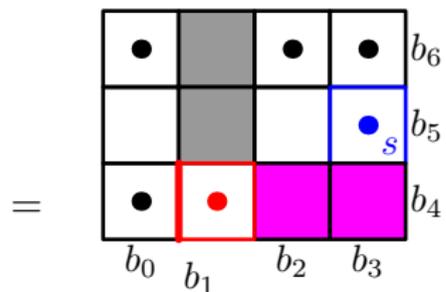


(1, 6)

Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3).(3, 4).(3, 5).(1, 6)$$

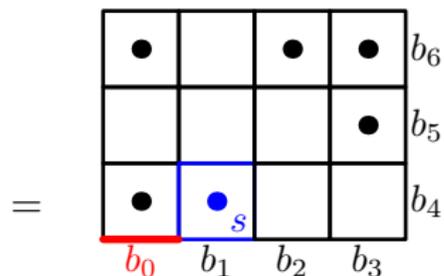
$$= \bullet 2 \bullet 6 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 4 \bullet$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3).(3, 4).(3, 5).(1, 6)$$

$$= \bullet 2 \bullet 6 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 4 \bullet$$



$(0, 7)$

Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(0, 2).(2, 3).(3, 4).(3, 5).(1, 6).(0, 7)$$

$$= \bullet 7 \bullet 2 \bullet 6 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 4 \bullet$$

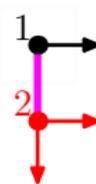
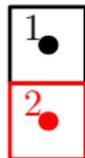
$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & & \bullet & \bullet & b_7 \\ \hline & & & \bullet & b_6 \\ \hline \bullet & \bullet & & & b_5 \\ \hline \bullet & & & & b_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$$

Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



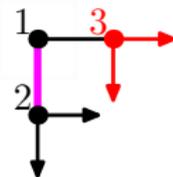
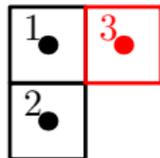
Extraction
→
de l'arbre

Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



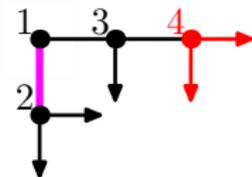
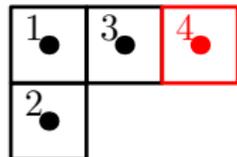
Extraction
→
de l'arbre

Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



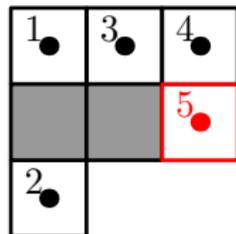
Extraction
→
de l'arbre

Croisements d'arêtes, rubans et feuilles

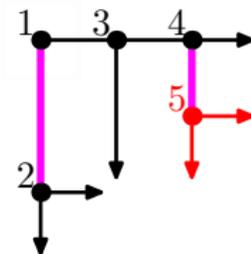


Extraction
de l'arbre

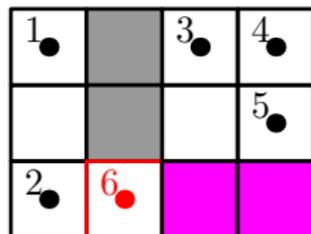
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



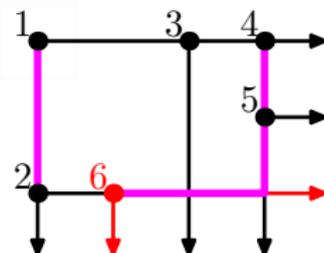
Extraction
de l'arbre



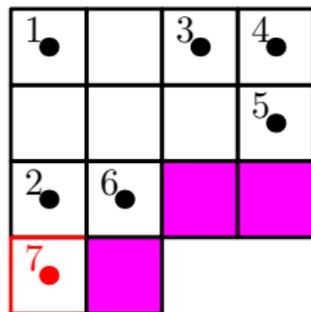
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



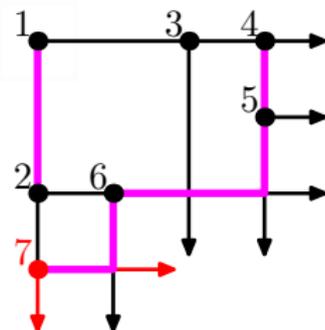
Extraction
→
de l'arbre



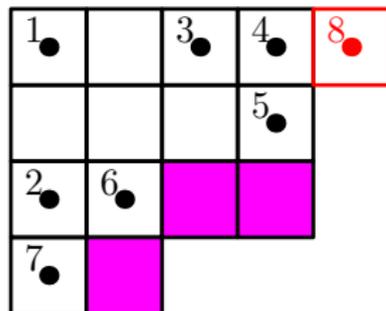
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



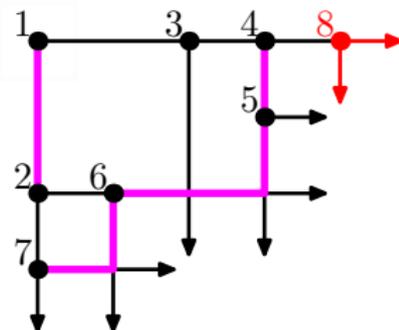
Extraction
de l'arbre →



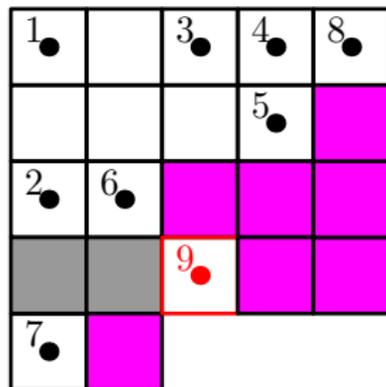
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



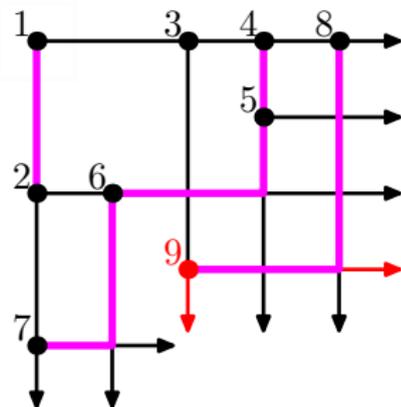
Extraction
de l'arbre



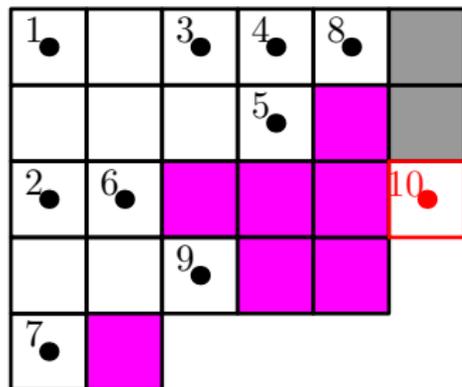
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



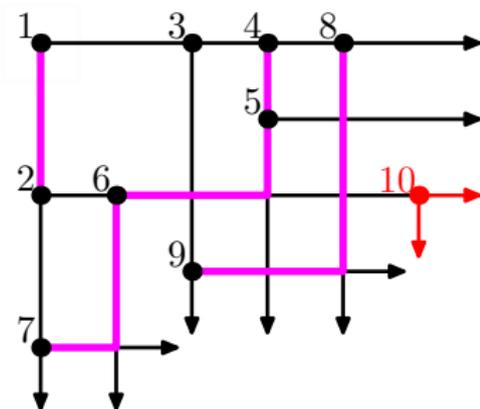
Extraction
de l'arbre →



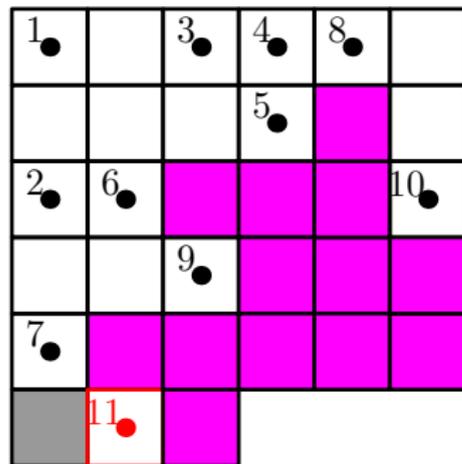
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



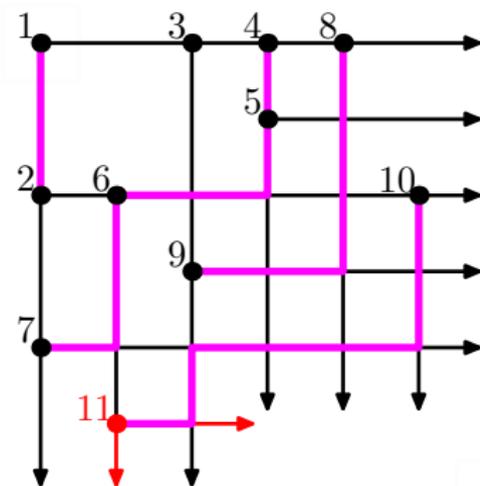
Extraction
de l'arbre



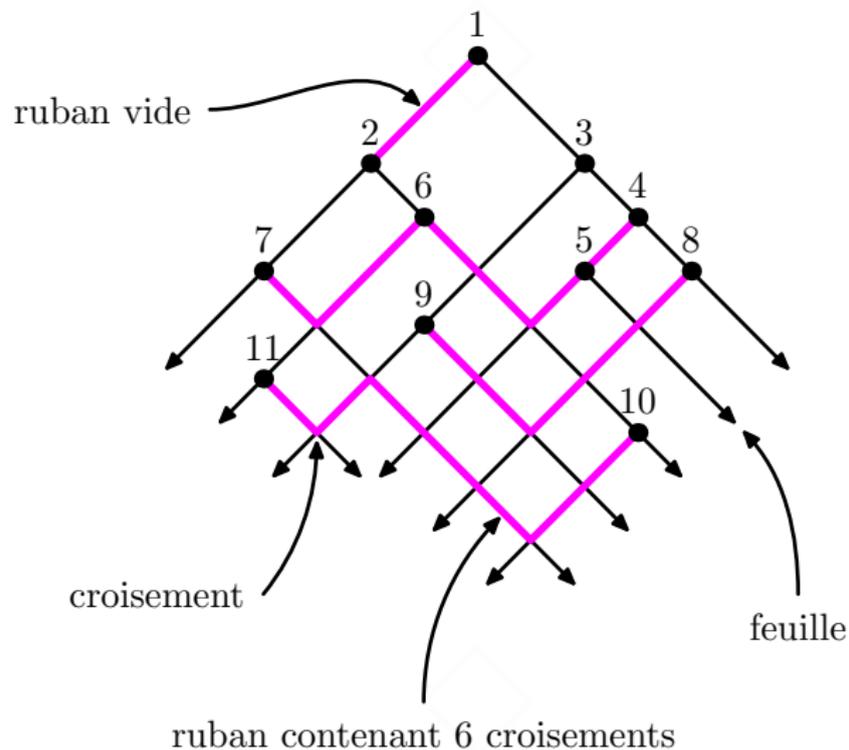
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



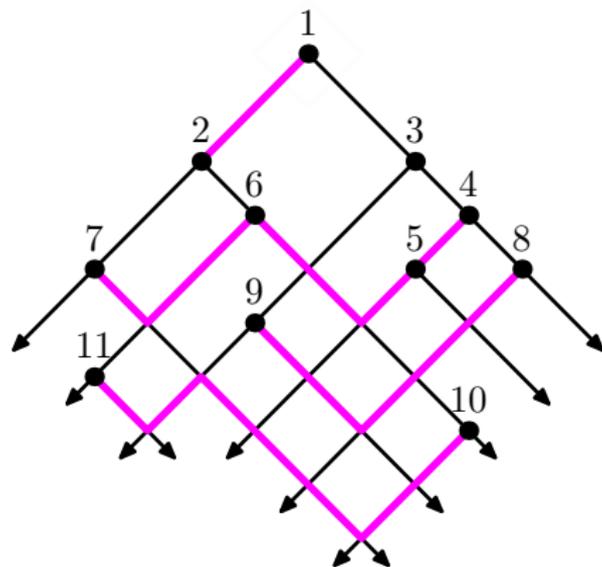
Extraction
de l'arbre →



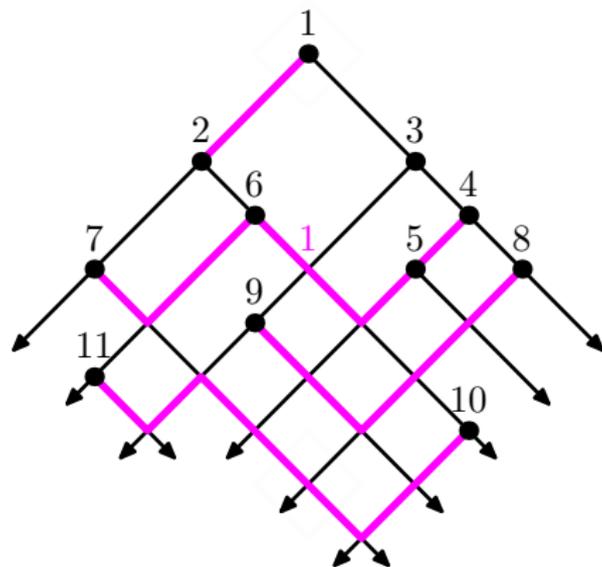
Croisements d'arêtes, rubans et feuilles



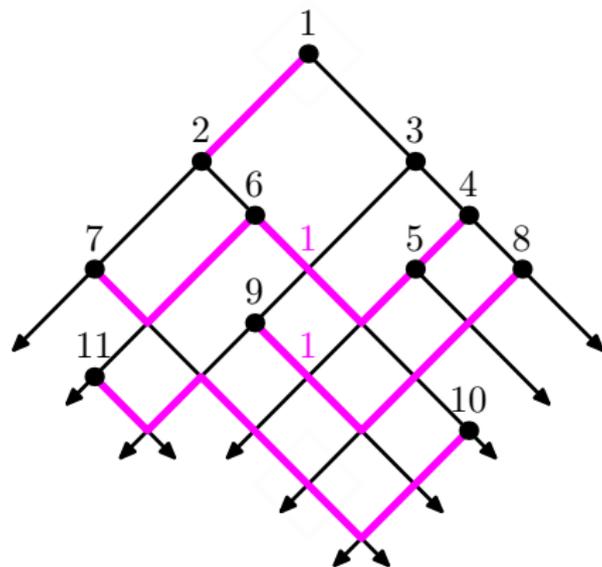
Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



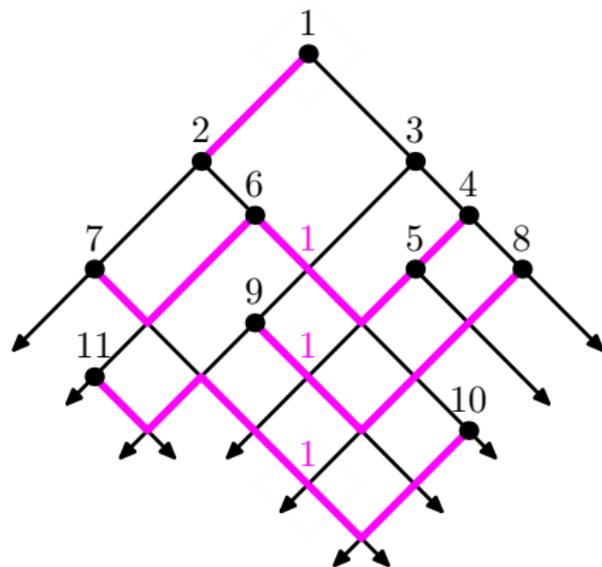
Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



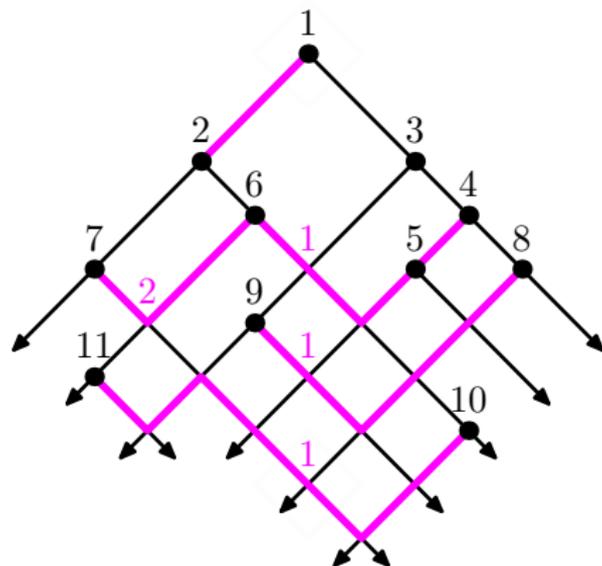
Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



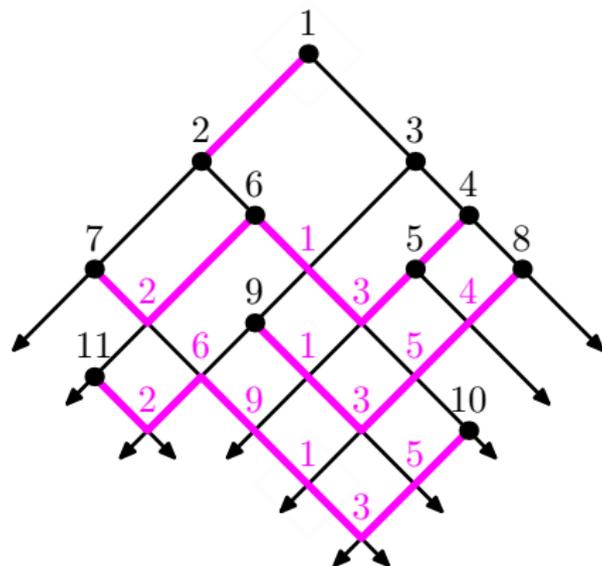
Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



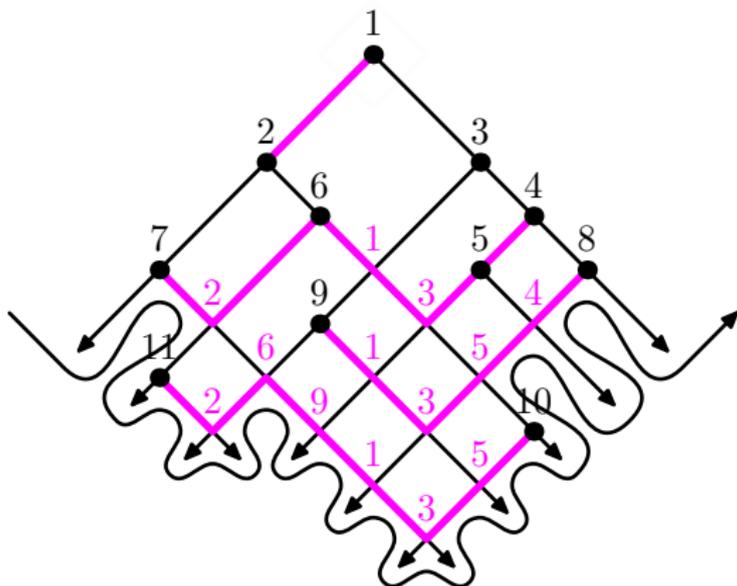
Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



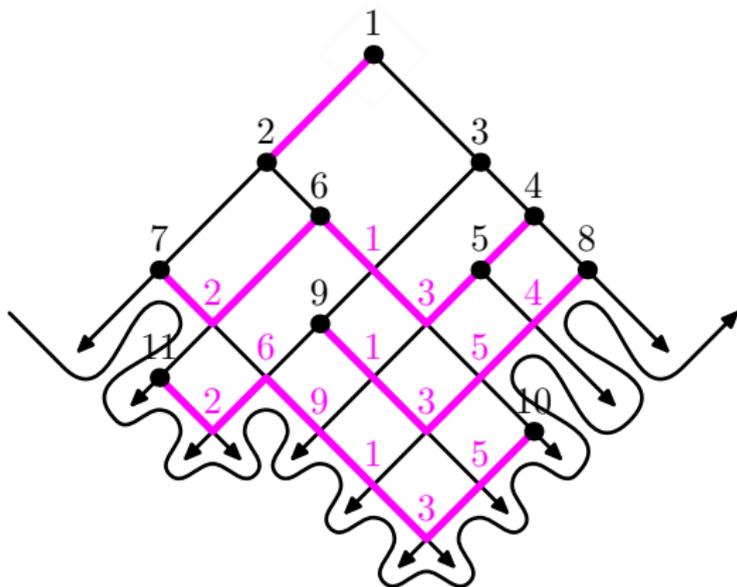
Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



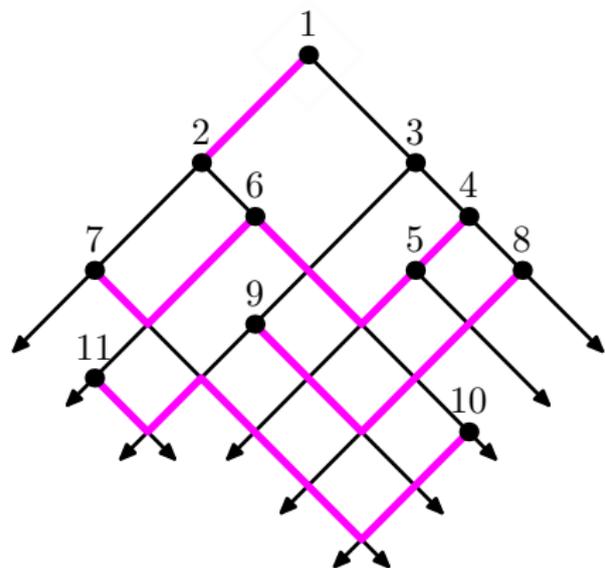
Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



$$\sigma = 7, 11, 2, 6, 9, 1, 3, 5, 10, 4, 8$$

Descentes d'une permutation

$$\text{inverse}(2^+1\dots 12) = 2 - \dots - 2 - 31$$

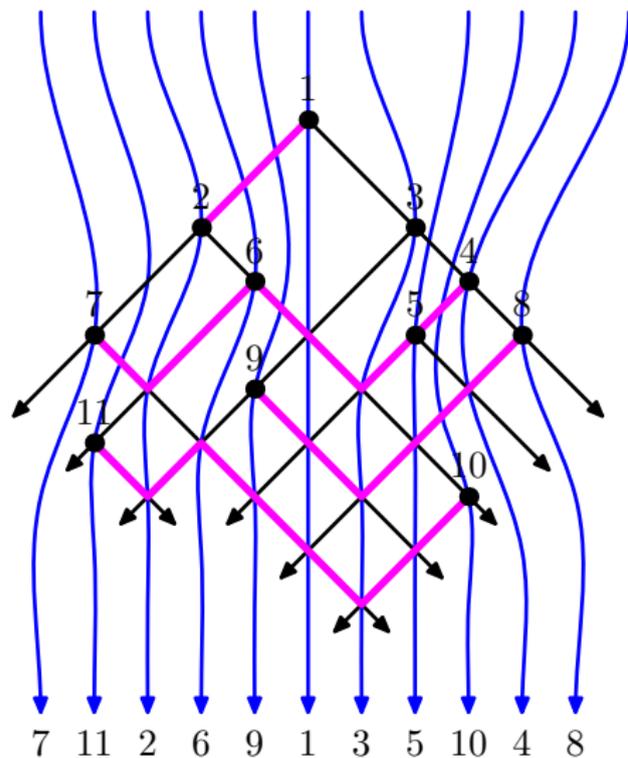


Dans la permutation inverse, les extrémités des rubans deviennent des descentes.

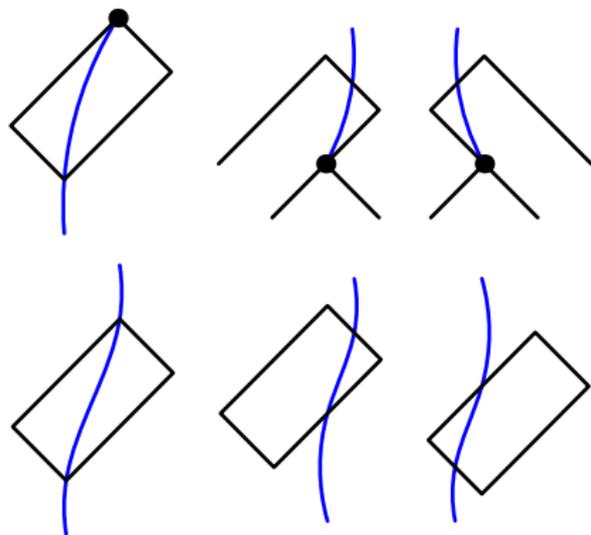
$$\text{inverse}(2^+2) = \text{descente}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & - & 2 & 3 & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 & 8 & - & 9 & 10 & - & 11 \\ 6 & & 3 & 7 & 10 & & 8 & & 4 & & 1 & 11 & & 5 & 9 & & 2 \end{pmatrix}$$

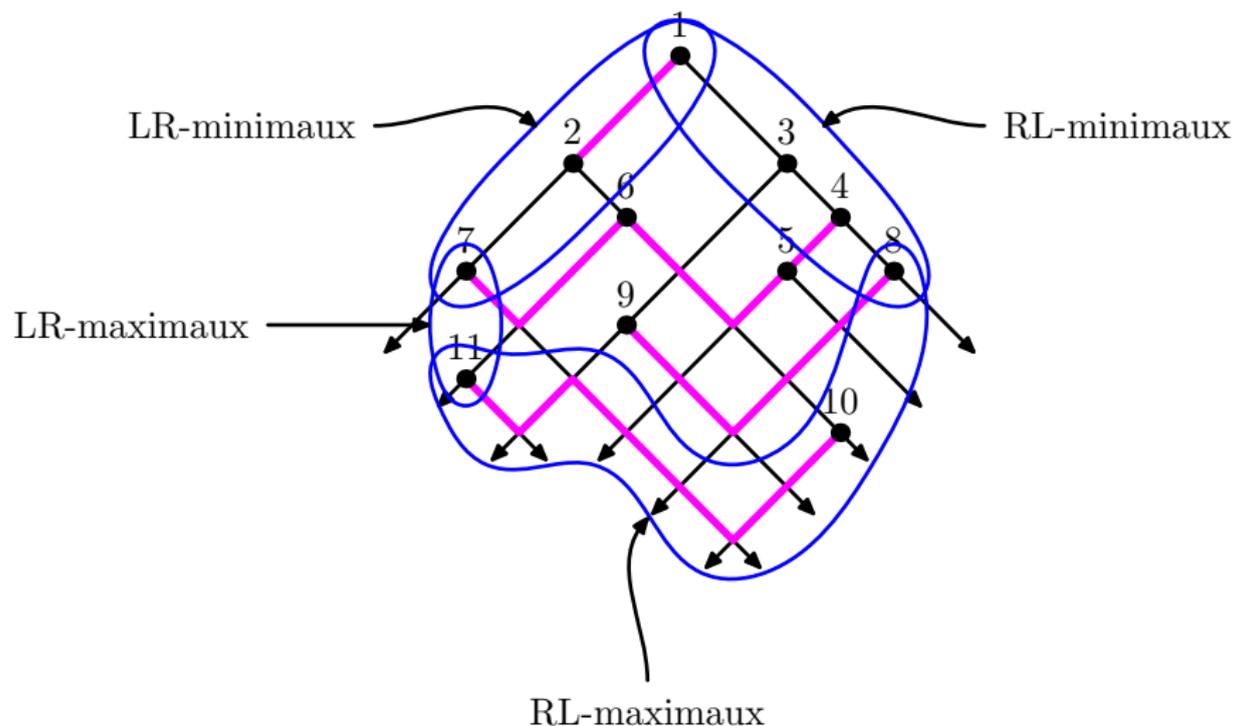
Écraser un arbre avec les iso-croisements



Règles



LR/RL-maximaux/minimaux



$$\sigma = 7, 11, 2, 6, 9, 1, 3, 5, 10, 4, 8$$

Bibliographie

La correspondance entre

- croisements et motifs 2^{+12}
- LR/RL-maximaux/minimaux et certains points des tableaux
avaient été mis à jour par Corteel et Nadeau en 2007 et 2009.

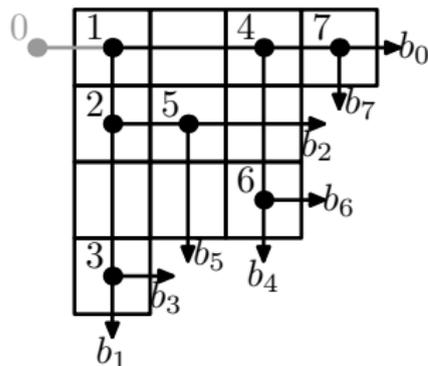
Les tableaux boisés simplifient considérablement la lecture de toutes ces statistiques et fournis des preuves simples.

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 **Bijections entre tableaux boisés et permutations**
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - **Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles**
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Mise en oeuvre du patron de bijections

- Numérotation choisie :



- Les bords (i, j) sont interprétés comme des transpositions avec la convention que $(0, j) = Id$.

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sigma = X_1 X_2 \dots X_n$$

avec

$$X_k = Id + (1, k) + \dots + (k-1, k)$$

Exemple

$$T = \emptyset$$

=



=



Exemple

$$T = \emptyset$$

=



(0, 1)

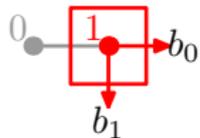
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1)$$

$$= (1)$$



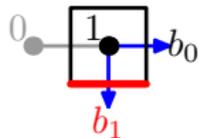
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1)$$

$$= (1)$$



(1, 2)

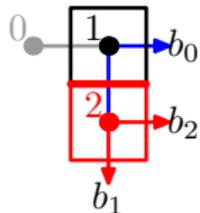
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1), (1, 2)$$

$$= (2, 1)$$



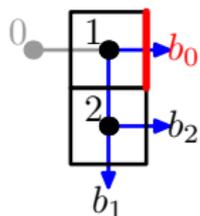
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2)$$

$$= (2, 1)$$



(0, 3)

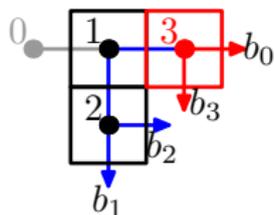
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3)$$

$$= (2, 1).(3)$$



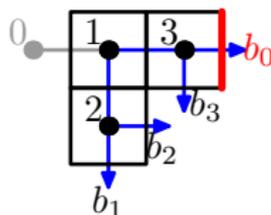
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3)$$

$$= (2, 1).(3)$$



(0, 4)

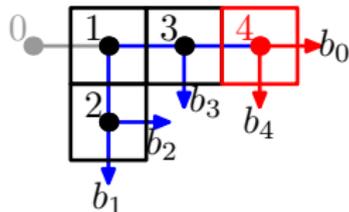
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4)$$

$$= (2, 1).(3).(4)$$



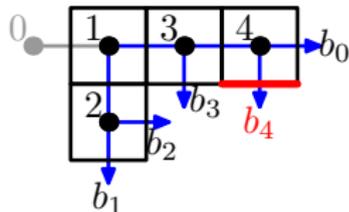
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4)$$

$$= (2, 1).(3).(4)$$



(4, 5)

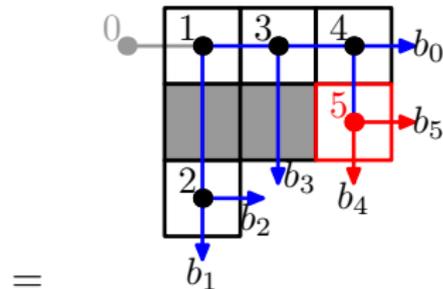
=



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5)$$

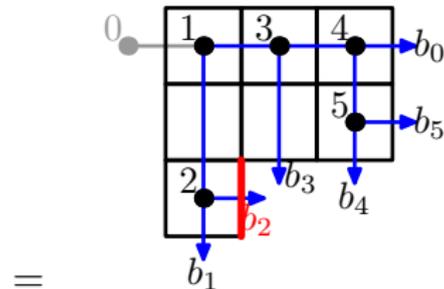
$$= (2, 1).(3).(5, 4)$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5)$$

$$= (2, 1).(3).(5, 4)$$



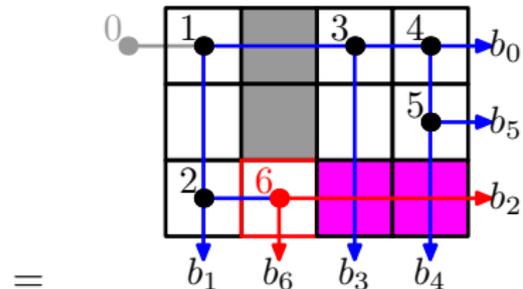
(2, 6)



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5).(2, 6)$$

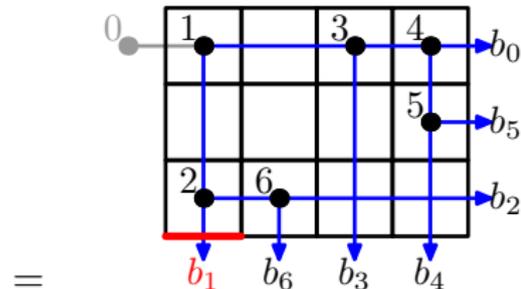
$$= (6, 2, 1).(3).(5, 4)$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5).(2, 6)$$

$$= (6, 2, 1).(3).(5, 4)$$



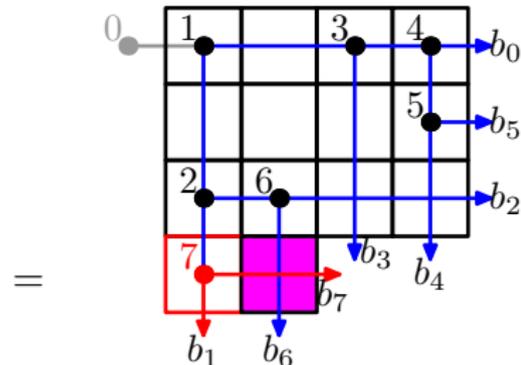
(1, 7)



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5).(2, 6).(1, 7)$$

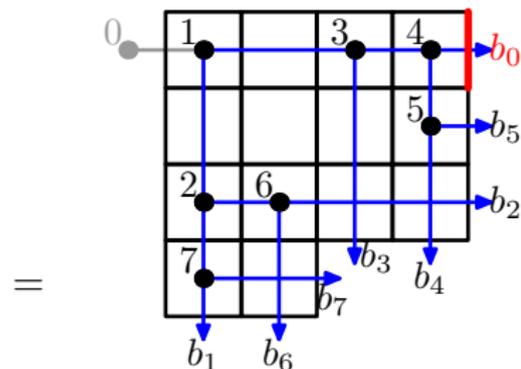
$$= (6, 2, 7, 1).(3).(5, 4)$$



Exemple

$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5).(2, 6).(1, 7)$$

$$= (6, 2, 7, 1).(3).(5, 4)$$



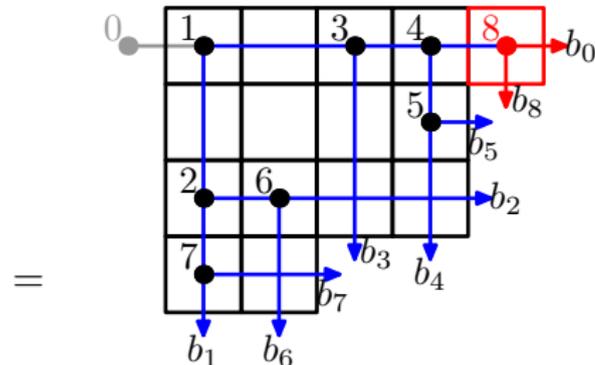
(0, 8)



Exemple

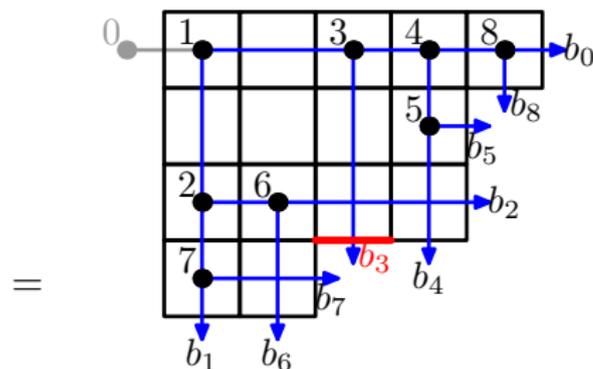
$$T = \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5).(2, 6).(1, 7).(0, 8)$$

$$= (6, 2, 7, 1).(3).(5, 4).(8)$$



Exemple

$$\begin{aligned} T &= \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5).(2, 6).(1, 7).(0, 8) \\ &= (6, 2, 7, 1).(3).(5, 4).(8) \end{aligned}$$

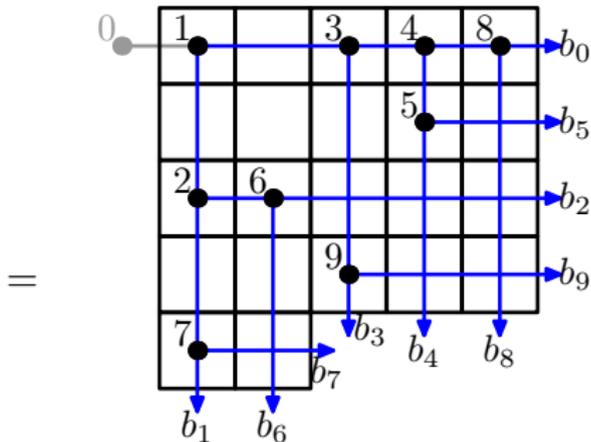


(3, 9)

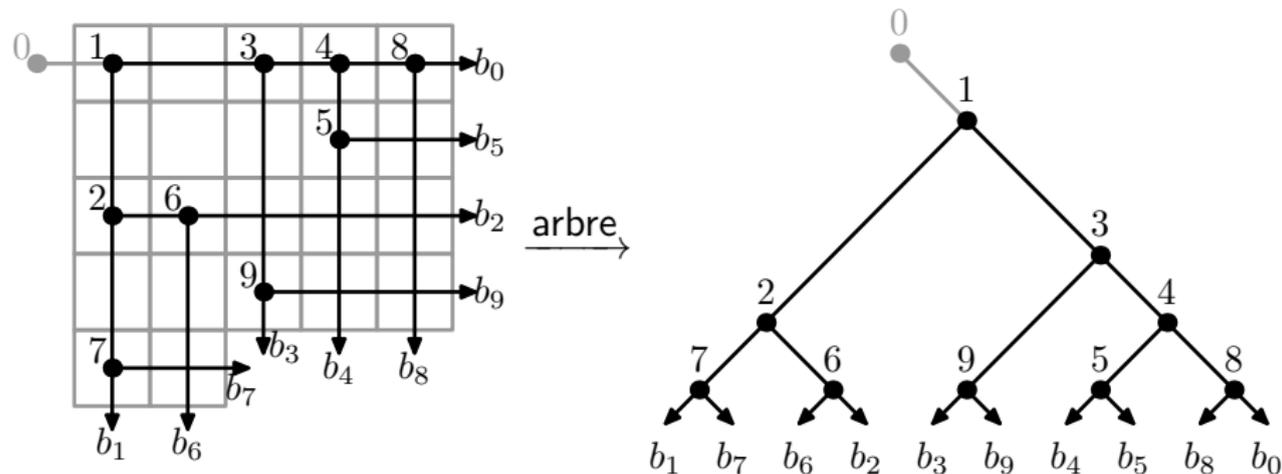


Exemple

$$\begin{aligned} T &= \emptyset.(0, 1).(1, 2).(0, 3).(0, 4).(4, 5).(2, 6).(1, 7).(0, 8).(3, 9) \\ &= (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8) \end{aligned}$$

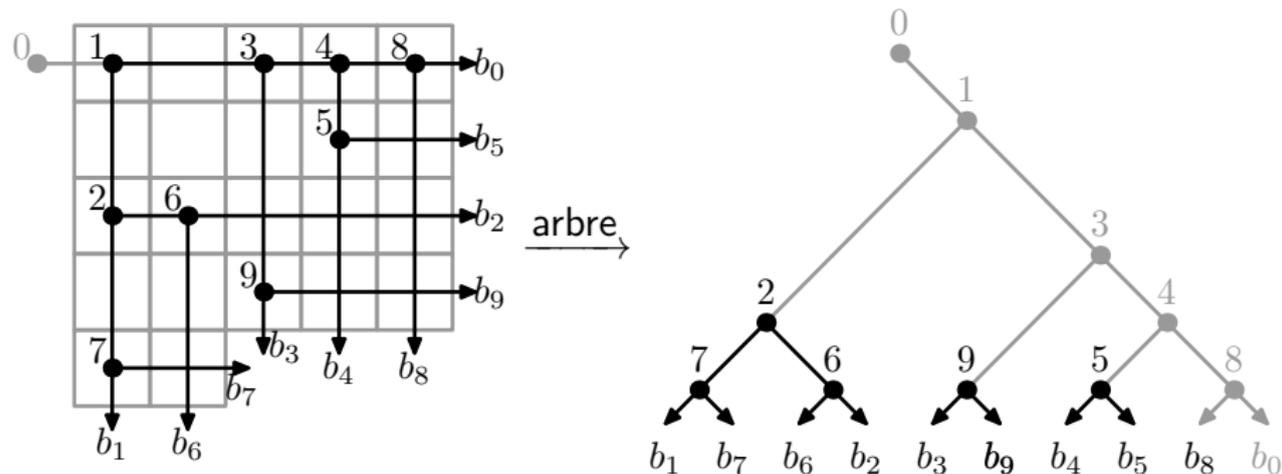


Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



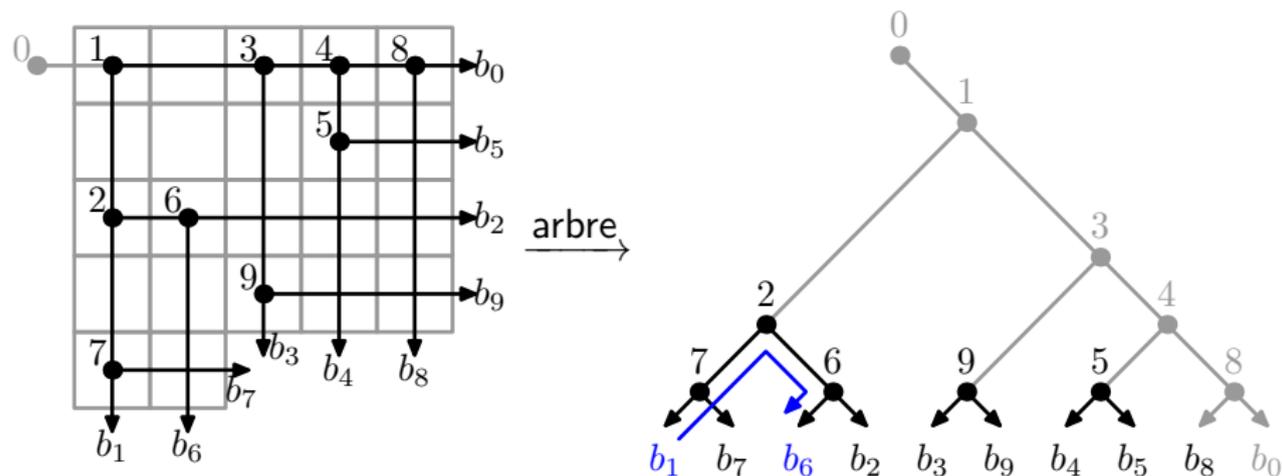
$$\sigma = ($$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



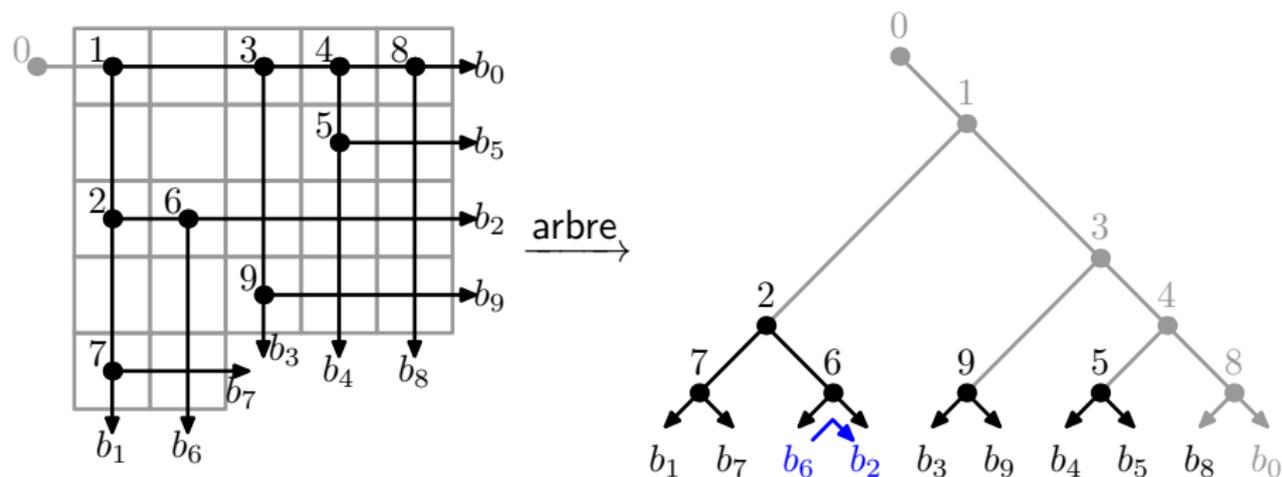
$$\sigma = ($$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



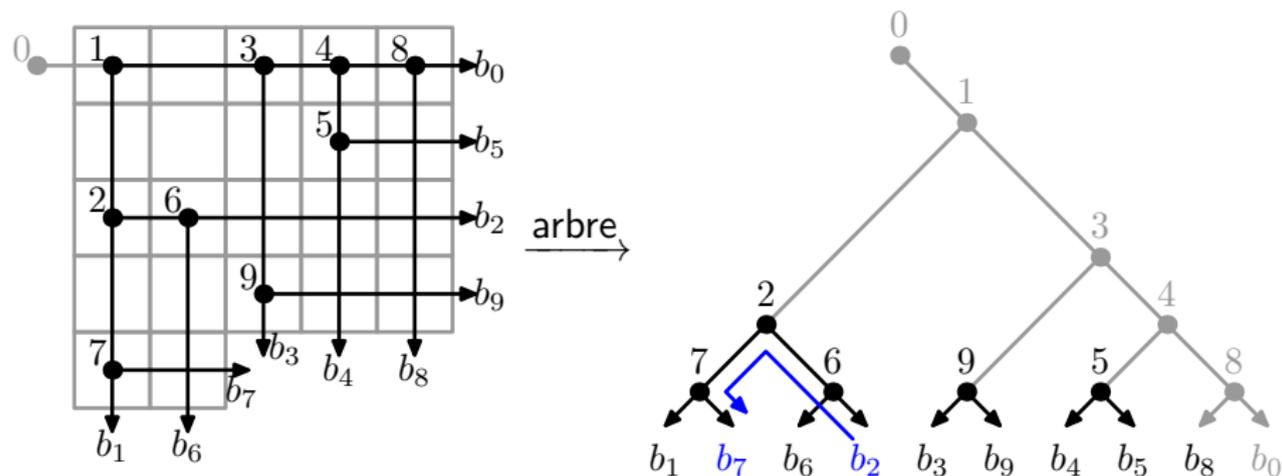
$$\sigma = (1, 6)$$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations

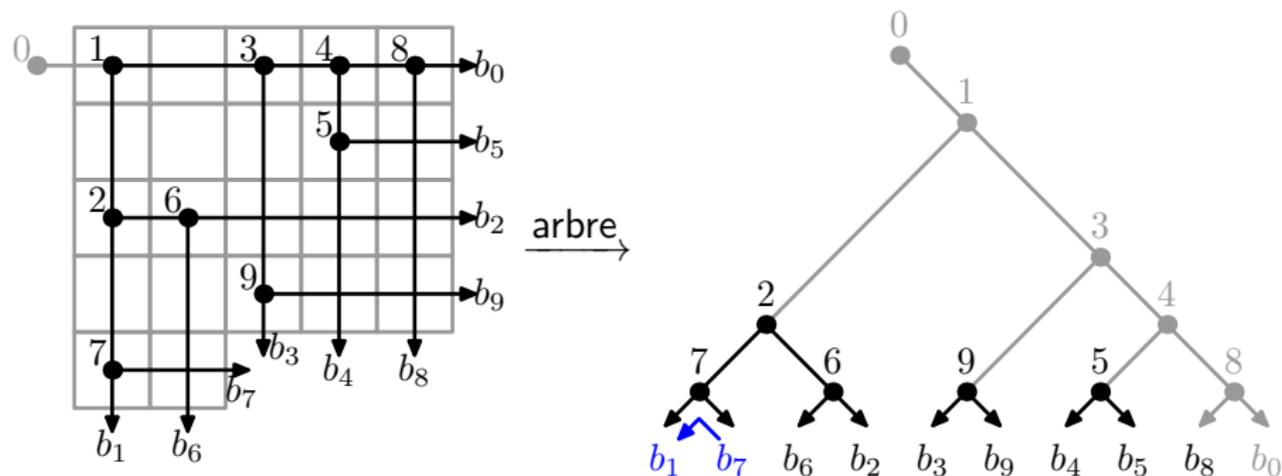


$$\sigma = (1, 6, 2)$$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations

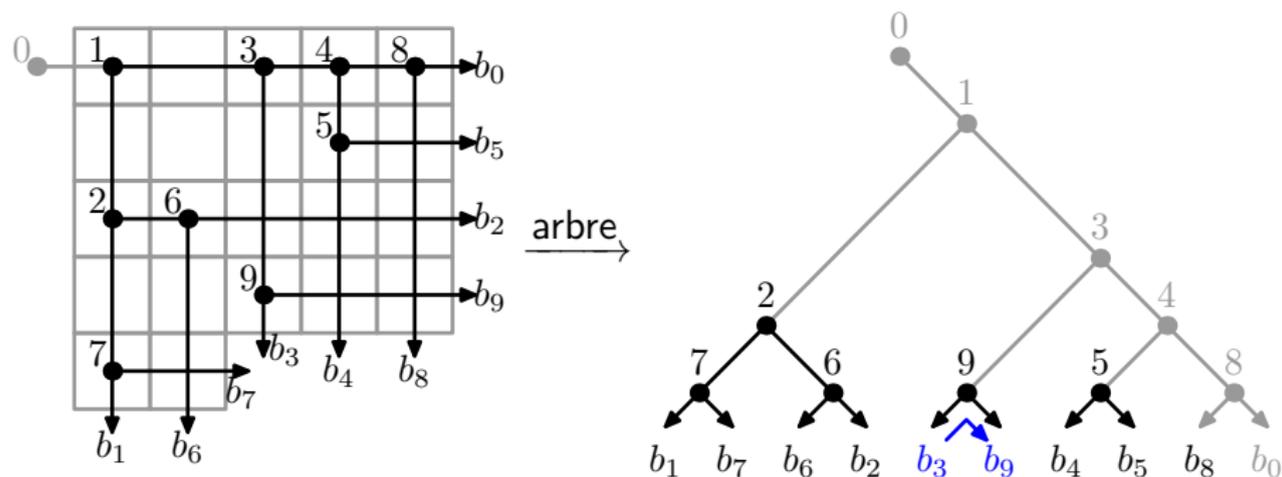


Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



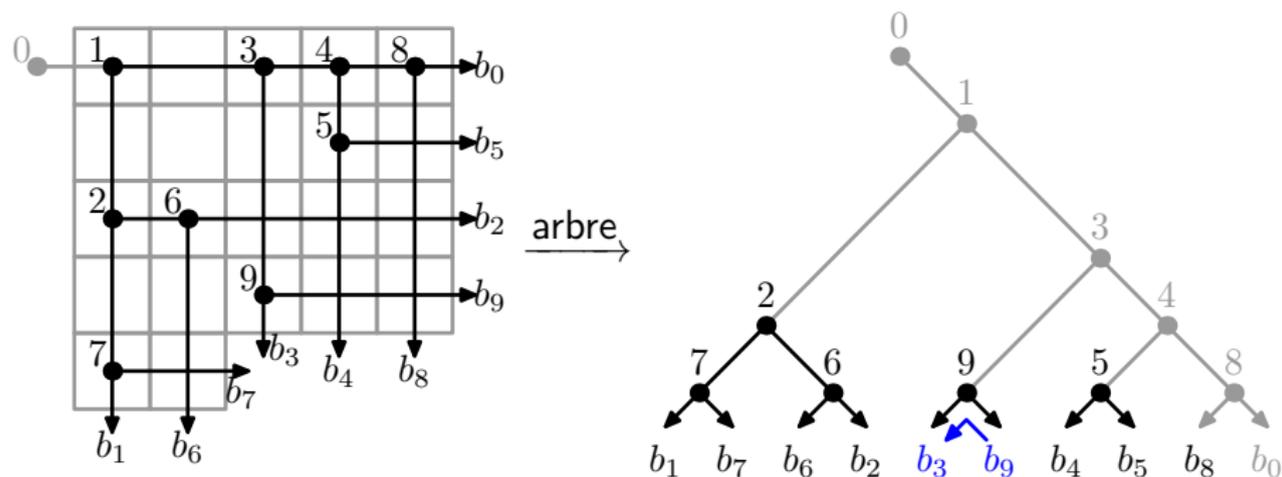
$$\sigma = (1, 6, 2, 7)$$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



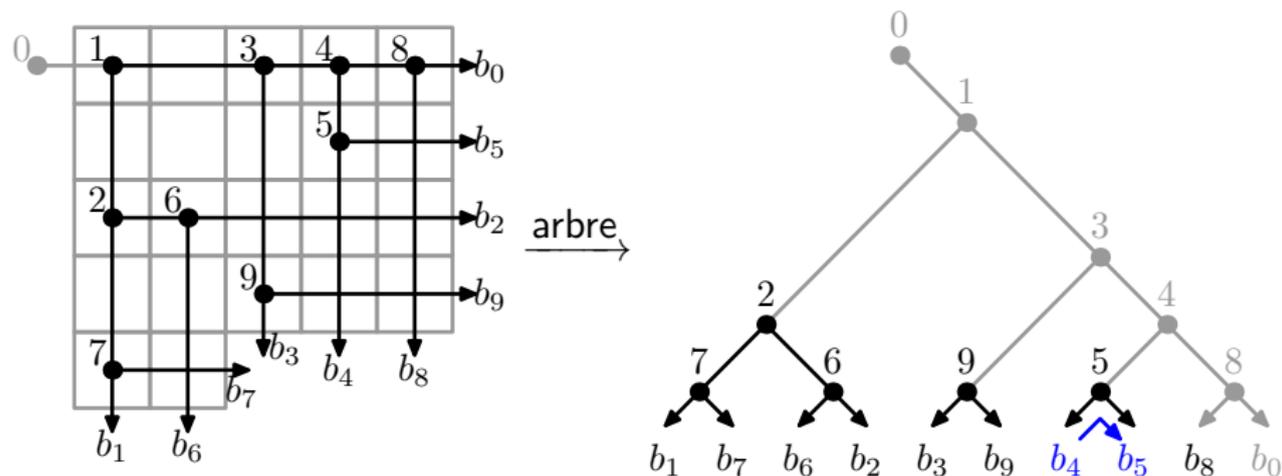
$$\sigma = (1, 5, 3, 6).(3, 9)$$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



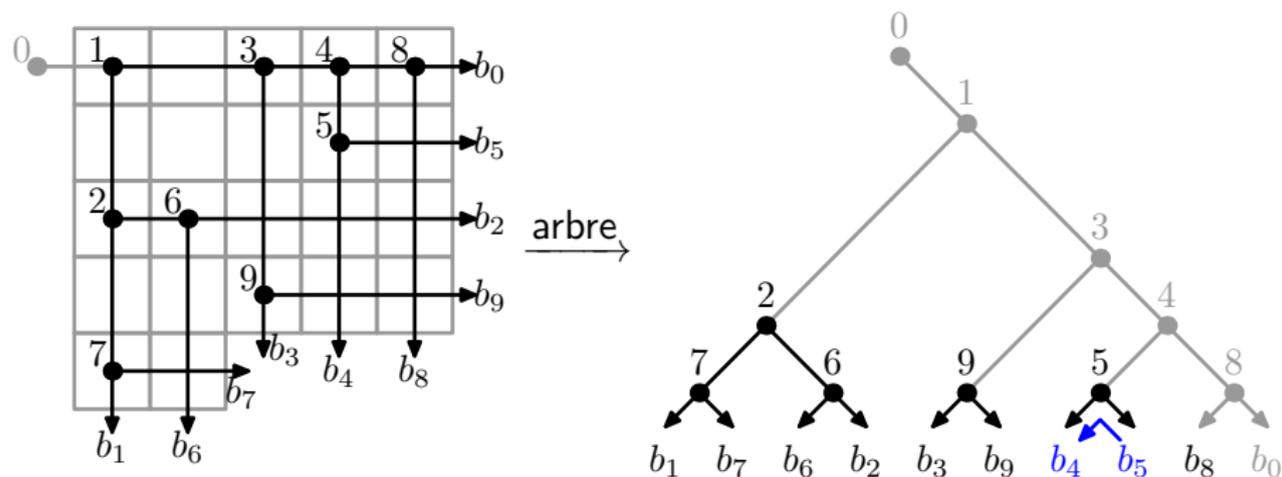
$$\sigma = (1, 5, 3, 6).(3, 9)$$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



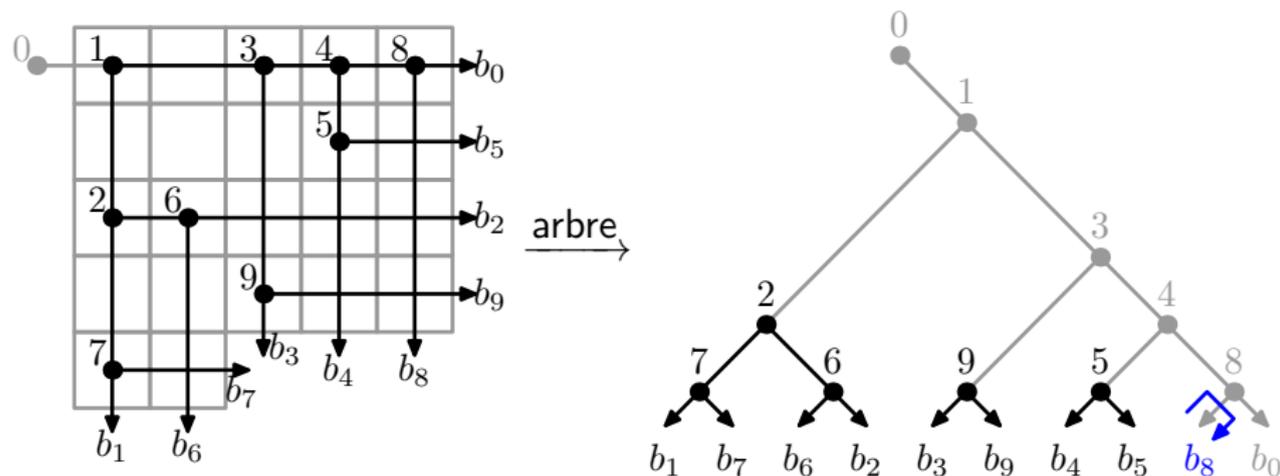
$$\sigma = (1, 5, 3, 6).(3, 9).(4, 5)$$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



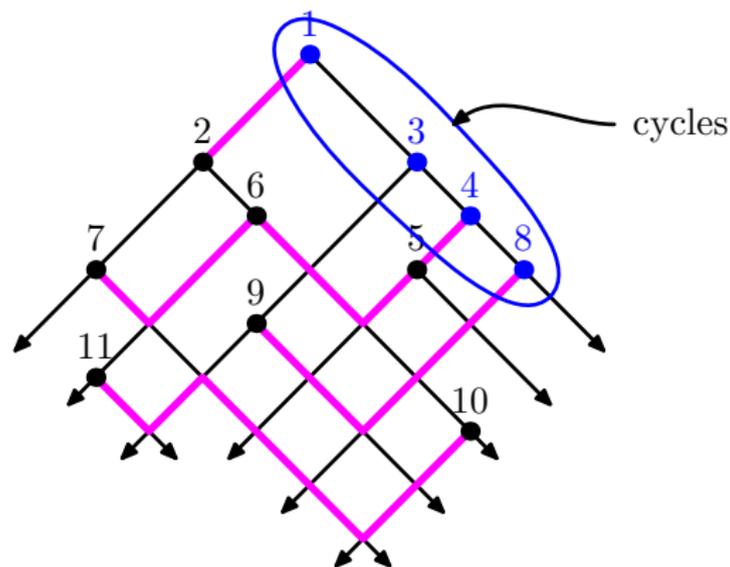
$$\sigma = (1, 5, 3, 6).(3, 9).(4, 5)$$

Bijection directe entre tableaux boisés et permutations



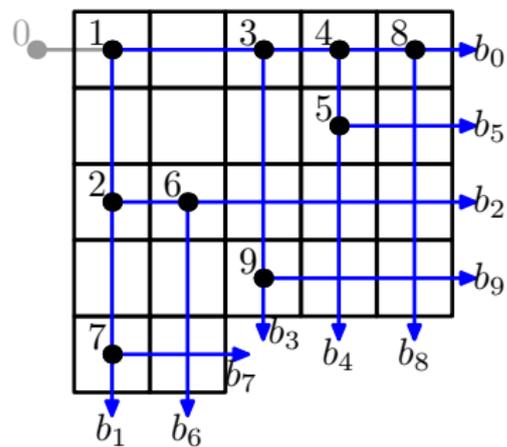
$$\sigma = (1, 5, 3, 6).(3, 9).(4, 5).(8)$$

Lecture des cycles d'une permutation

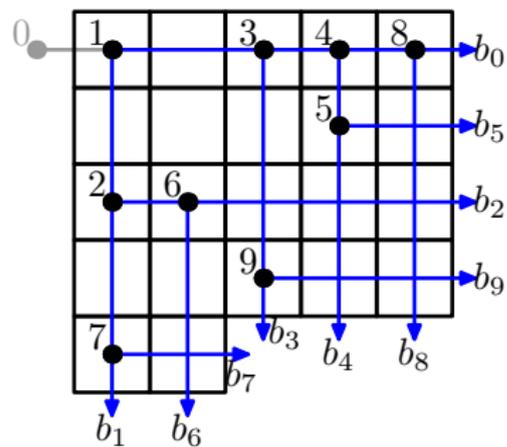


$$\sigma = (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8)$$

Lecture des excédences d'une permutation

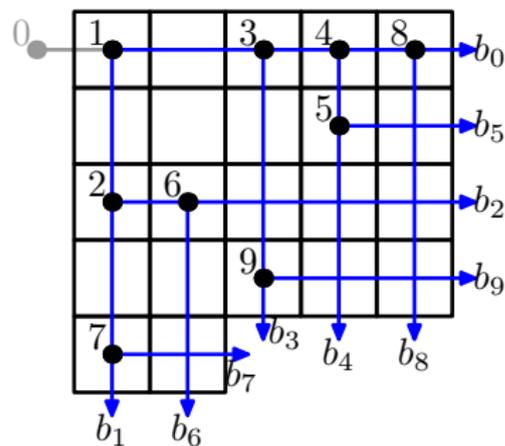


Lecture des excédences d'une permutation



- 1) Calculer la permutation σ d'un tableau boisé en utilisant les cycles;

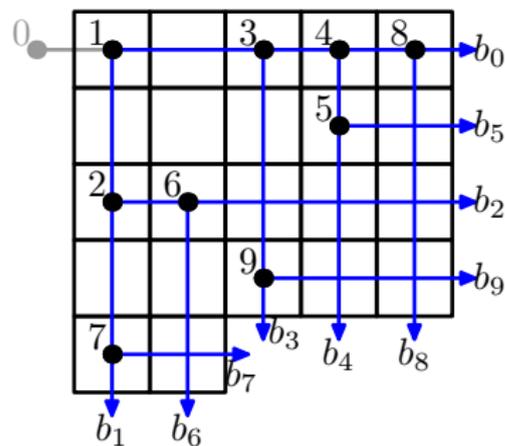
Lecture des excédences d'une permutation



- 1) Calculer la permutation σ d'un tableau boisé en utilisant les cycles;

$$\sigma = (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8)$$

Lecture des excédences d'une permutation

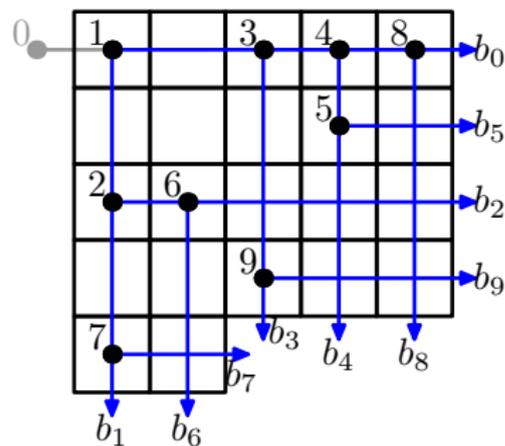


- 1) Calculer la permutation σ d'un tableau boisé en utilisant les cycles;
- 2) définir une nouvelle permutation μ définie par :

$$\mu(x) := \text{bord}_{\text{code}}^{-1}(\text{bord}_{\text{cycle}}(T, x)) + 1$$

$$\sigma = (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8)$$

Lecture des excédences d'une permutation



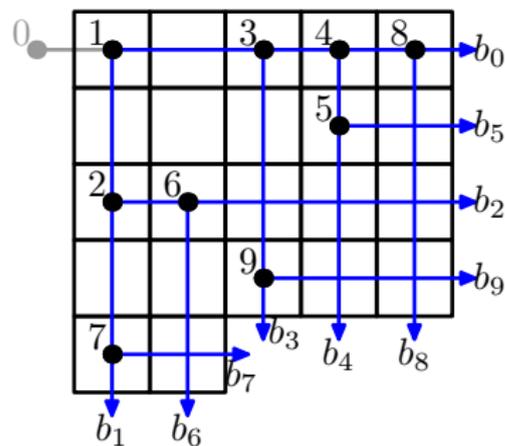
- 1) Calculer la permutation σ d'un tableau boisé en utilisant les cycles;
- 2) définir une nouvelle permutation μ définie par :

$$\mu(x) := \text{bord}_{\text{code}}^{-1}(\text{bord}_{\text{cycle}}(T, x)) + 1$$

$$\sigma = (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8)$$

$$\mu = 184592367$$

Lecture des excédences d'une permutation



$$\sigma = (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8)$$

$$\mu = 184592367$$

1) Calculer la permutation σ d'un tableau boisé en utilisant les cycles;

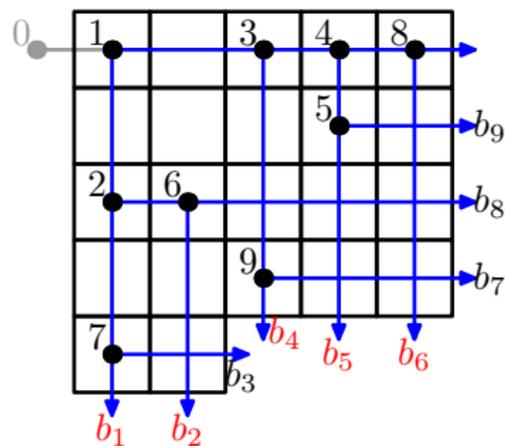
2) définir une nouvelle permutation μ définie par :

$$\mu(x) := \text{bord}_{\text{code}}^{-1}(\text{bord}_{\text{cycle}}(T, x)) + 1$$

3) conjuguer σ avec μ :

$$\mu \cdot \sigma \cdot \mu^{-1}.$$

Lecture des excédences d'une permutation



$$\sigma = (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8)$$

$$\mu = 184592367$$

$$\mu.\sigma.\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 7 & 9 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la permutation σ d'un tableau boisé en utilisant les cycles;

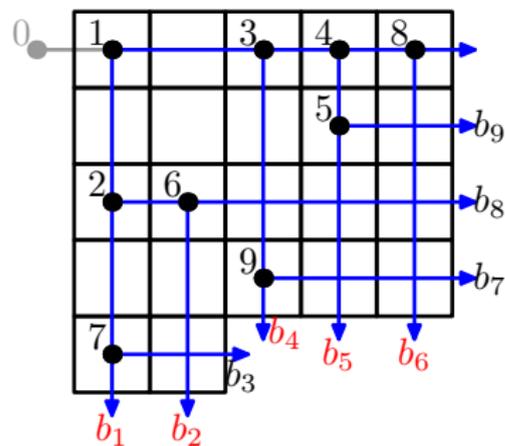
2) définir une nouvelle permutation μ définie par :

$$\mu(x) := \text{bord}_{\text{code}}^{-1}(\text{bord}_{\text{cycle}}(T, x)) + 1$$

3) conjuguer σ avec μ :

$$\mu.\sigma.\mu^{-1}.$$

Lecture des excédences d'une permutation



$$\sigma = (6, 2, 7, 1).(9, 3).(5, 4).(8)$$

$$\mu = 184592367$$

$$\mu.\sigma.\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 7 & 9 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la permutation σ d'un tableau boisé en utilisant les cycles;

2) définir une nouvelle permutation μ définie par :

$$\mu(x) := \text{bord}_{code}^{-1}(\text{bord}_{cycle}(T, x)) + 1$$

3) conjuguer σ avec μ :

$$\mu.\sigma.\mu^{-1}.$$

Il s'agit de la bijection de Burstein (2007), inspirée par celle de Steingrímsson et Williams (2007).

Questions ouvertes

Que représentent :

- les croisements dans cette bijection ?
- les points de la première colonne ?
- les feuilles qui jouent le rôle des RL/LR-maximaux dans la bijection avec le code ?

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Série génératrice des tableaux boisés selon le nombre de points sur la première ligne et la première colonne

D'après le patron de bijections, on a :

$$\sum_{T \in \text{tableaux boisés}} T = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

avec

$$X_k = (0, k) + (1, k) + \dots + (k-2, k) + (k-1, k).$$

Série génératrice des tableaux boisés selon le nombre de points sur la première ligne et la première colonne

D'après le patron de bijections, on a :

$$\sum_{T \in \text{tableaux boisés}} T = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

avec

$$X_k = (0, k) + (1, k) + \dots + (k-2, k) + (k-1, k).$$

Si on remplace X_k par

$$X_k \rightarrow u + 1 + \dots + 1 + t$$

Série génératrice des tableaux boisés selon le nombre de points sur la première ligne et la première colonne

D'après le patron de bijections, on a :

$$\sum_{T \in \text{tableaux boisés}} T = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

avec

$$X_k = (0, k) + (1, k) + \dots + (k-2, k) + (k-1, k).$$

Si on remplace X_k par

$$X_k \rightarrow u + 1 + \dots + 1 + t$$

on obtient

$$\sum_{T \in \text{tableaux boisés}} u^{l(T)} t^{r(T)} = ut \cdot (u+t) \cdot (u+1+t) \cdot \dots \cdot (u+n-2+t).$$

Série génératrice des tableaux boisés selon le nombre de points sur la première ligne et la première colonne

D'après le patron de bijections, on a :

$$\sum_{T \in \text{tableaux boisés}} T = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

avec

$$X_k = (0, k) + (1, k) + \dots + (k-2, k) + (k-1, k).$$

Si on remplace X_k par

$$X_k \rightarrow u + 1 + \dots + 1 + t$$

on obtient

$$\sum_{T \in \text{tableaux boisés}} u^{l(T)} t^{r(T)} = ut \cdot (u+t) \cdot (u+1+t) \cdot \dots \cdot (u+n-2+t).$$

Ce résultat a été trouvé et prouvé par Corteel et Nadeau en 2009. La preuve ici est beaucoup plus simple.

Compter le nombre de tableaux boisés ayant k colonnes

$$S_{k,n} := \sum \text{tableaux boisés de hauteur } k$$

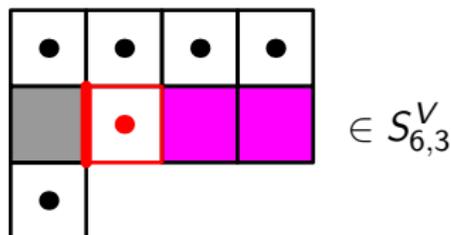
$$A_{k,n} := \# \quad \text{————}$$

$$S_{k,n}^H := \sum \text{tableaux boisés de hauteur } k \text{ où la dernière case a été insérée sur un bord horizontal}$$

$$A_{k,n}^H := \# \quad \text{————}$$

$$S_{k,n}^V := \sum \text{tableaux boisés de hauteur } k \text{ où la dernière case a été insérée sur un bord vertical}$$

$$A_{k,n}^V := \# \quad \text{————}$$



Compter le nombre de tableaux boisés ayant k colonnes

$$T.[i,j] := T. ((i, |T| + 1) + (i + 1, |T| + 1) + \dots + (j, |T| + 1))$$

Compter le nombre de tableaux boisés ayant k colonnes

$$T.[i,j] := T. ((i, |T| + 1) + (i + 1, |T| + 1) + \dots + (j, |T| + 1))$$

Numérotation : On commence par les bords horizontaux, puis les verticaux.

Compter le nombre de tableaux boisés ayant k colonnes

$$T.[i, j] := T. \left((i, |T| + 1) + (i + 1, |T| + 1) + \dots + (j, |T| + 1) \right)$$

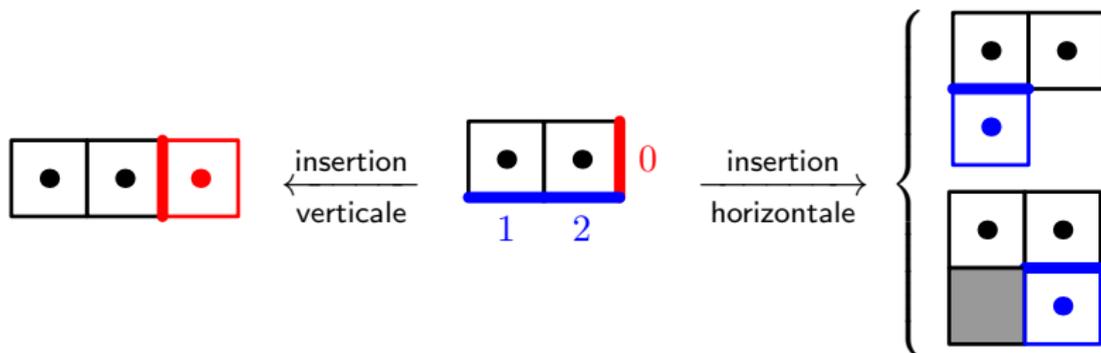
Numérotation : On commence par les bords horizontaux, puis les verticaux.

Algorithme d'insertion :

$$S_{n,k}.[0, k - 1] = S_{n+1,k}^V$$

et

$$S_{n,k}.[k, n] = S_{n+1,k+1}^H$$



Compter le nombre de tableaux boisés ayant k colonnes

$$T.[i, j] := T. ((i, |T| + 1) + (i + 1, |T| + 1) + \dots + (j, |T| + 1))$$

Numérotation : On commence par les bords horizontaux, puis les verticaux.

Algorithme d'insertion :

$$S_{n,k}.[0, k - 1] = S_{n+1,k}^V \quad \text{et} \quad S_{n,k}.[k, n] = S_{n+1,k+1}^H$$

Formule d'énumération :

$$\begin{aligned} S_{n+1,k} &= S_{n+1,k}^V + S_{n+1,k}^H \\ &= S_{n,k}.[0, k - 1] + S_{n,k-1}.[k - 1, n] \end{aligned}$$

Compter le nombre de tableaux boisés ayant k colonnes

$$T.[i, j] := T. ((i, |T| + 1) + (i + 1, |T| + 1) + \dots + (j, |T| + 1))$$

Numérotation : On commence par les bords horizontaux, puis les verticaux.

Algorithme d'insertion :

$$S_{n,k}.[0, k - 1] = S_{n+1,k}^V \quad \text{et} \quad S_{n,k}.[k, n] = S_{n+1,k+1}^H$$

Formule d'énumération :

$$\begin{aligned} S_{n+1,k} &= S_{n+1,k}^V + S_{n+1,k}^H \\ &= S_{n,k}.[0, k - 1] + S_{n,k-1}.[k - 1, n] \\ A_{n+1,k} &= k.A_{n,k} + (n - k + 2).A_{n,k-1} \end{aligned}$$

Compter le nombre de tableaux boisés ayant k colonnes

$$T.[i, j] := T. \left((i, |T| + 1) + (i + 1, |T| + 1) + \dots + (j, |T| + 1) \right)$$

Numérotation : On commence par les bords horizontaux, puis les verticaux.

Algorithme d'insertion :

$$S_{n,k}.[0, k - 1] = S_{n+1,k}^V \quad \text{et} \quad S_{n,k}.[k, n] = S_{n+1,k+1}^H$$

Formule d'énumération :

$$\begin{aligned} S_{n+1,k} &= S_{n+1,k}^V + S_{n+1,k}^H \\ &= S_{n,k}.[0, k - 1] + S_{n,k-1}.[k - 1, n] \end{aligned}$$

$$A_{n+1,k} = k.A_{n,k} + (n - k + 2).A_{n,k-1}$$

Il s'agit des nombres Eulériens : $[(1), (1, 1), (1, 4, 1), (1, 11, 11, 1), \dots]$.

Polynômes Eulériens

$$A_n(t) := \sum_{k=1}^n A_{n,k} t^k$$

$$A_{n+1}(t) := (n+1)tA_n(t) + t(1-t)A'_n(t), \quad \text{avec } A_0(t) = 1$$

Nombre moyen de croisements et de cases dans un tableau boisé

$Y_n =$ nb moyen de cases

$C_n =$ nb moyen de croisements

$$Y_n = \frac{(n+1)(5n+6)}{24}$$

$$C_n = \frac{(n-1)(n-2)}{12}$$

Ces résultats apparaissent dans le travail de Corteel et Hitczenko en 2007.

Plan

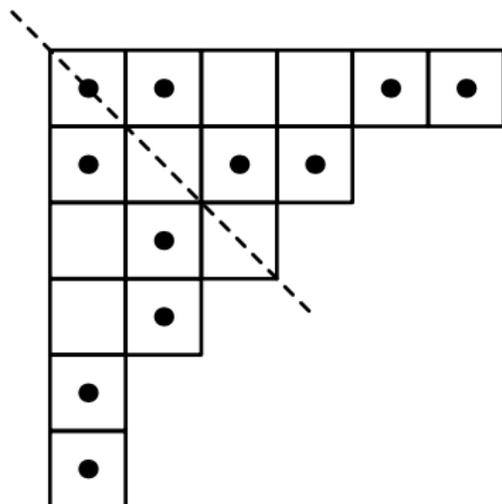
- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - **Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B**
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Tableaux boisés symétriques

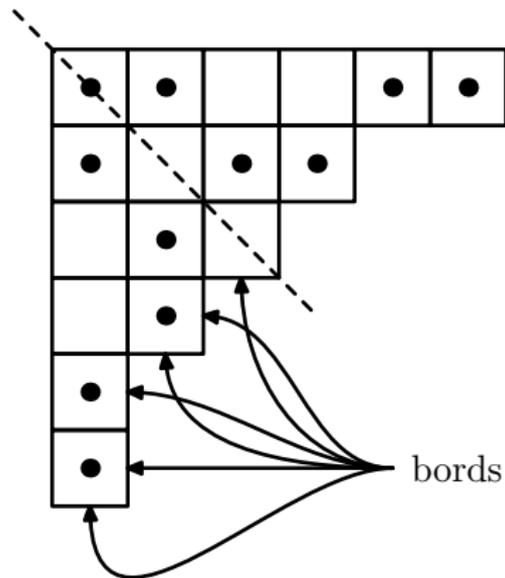
Un tableau boisé de type B est un tableau boisé symétrique suivant l'axe $y = -x$.



Ces tableaux ont pour équivalant les tableaux de permutations symétriques et les tableaux alternatifs symétriques. Les propriétés des ces objets ont largement été étudiées par Williams (2008) et Nadeau (2009), Corteel and Kim (2010).

Taille d'un tableau boisé de type B

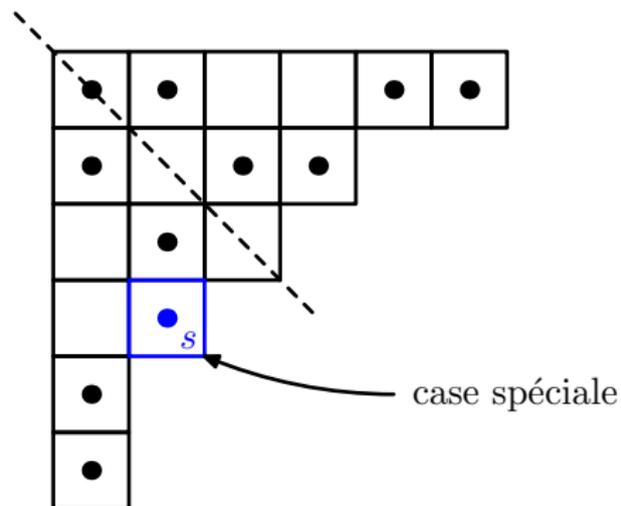
$$2 \times \text{taille}(\text{tableau boisé type B}) + 1 = \text{nb points}$$



$$\text{taille}(T) = 9$$

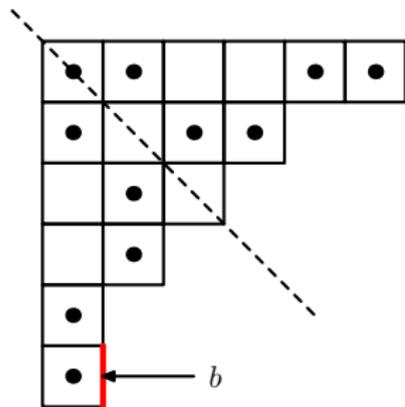
Il y a $\text{taille}(T) + 1$ bords.

Case spéciale d'un tableau boisé de type B

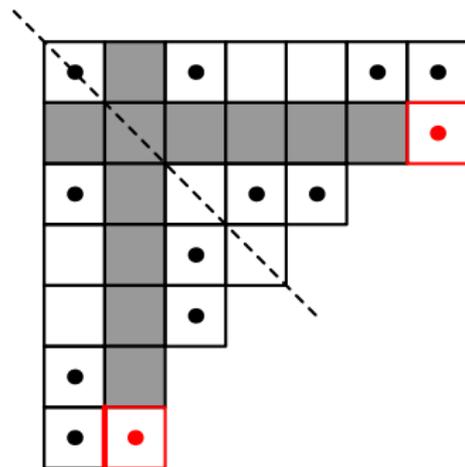


La case spéciale est la case contenant un point, située la plus à droite, qui ne possède pas de case en dessous de lui et qui est en dessous de l'axe de symétrie.

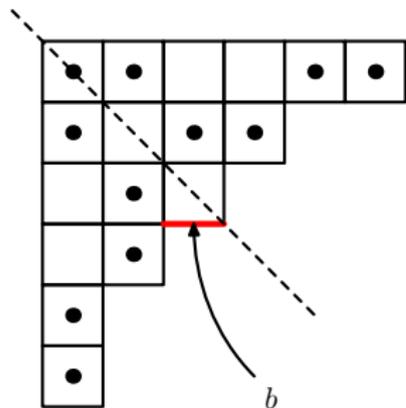
Ajout d'une case sur un bord vertical



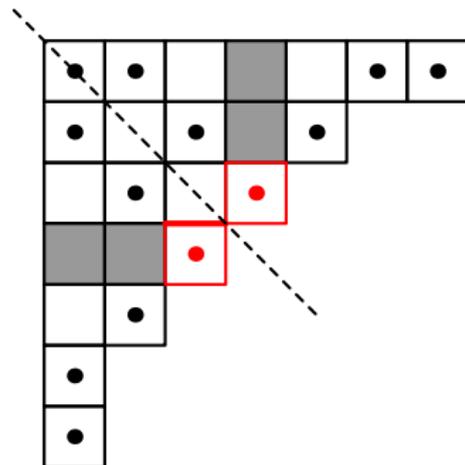
Ajout d'une case
sur le bord b →



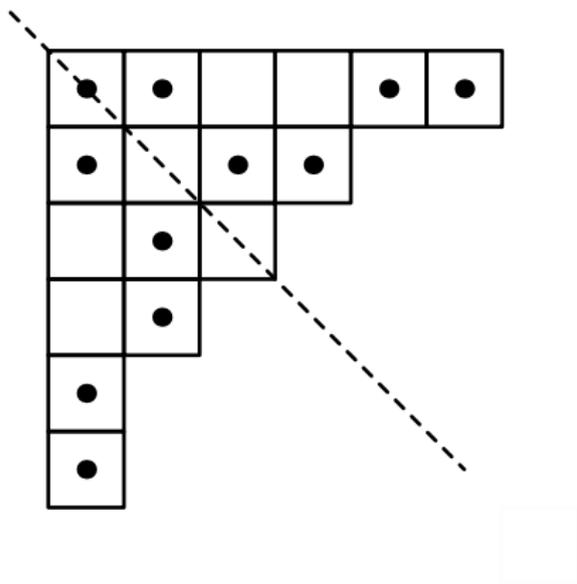
Ajout d'une case sur un bord horizontal



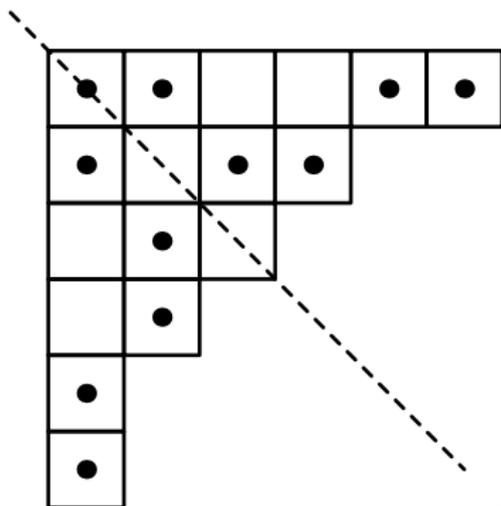
Ajout d'une case
sur le bord b



Algorithme d'insertion de type B



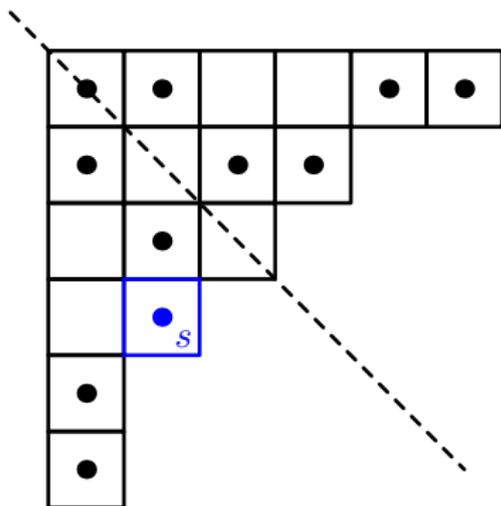
Algorithme d'insertion de type B



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;

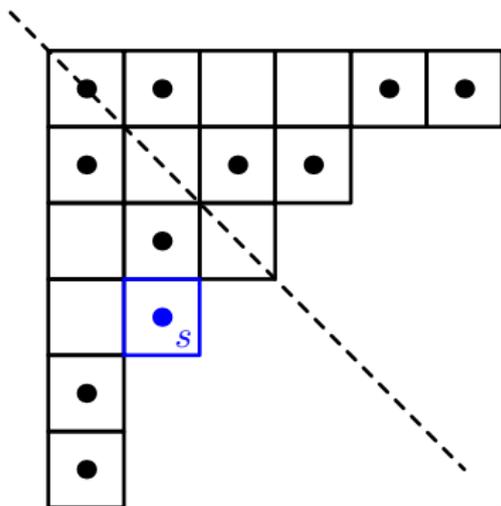


Algorithme d'insertion de type B



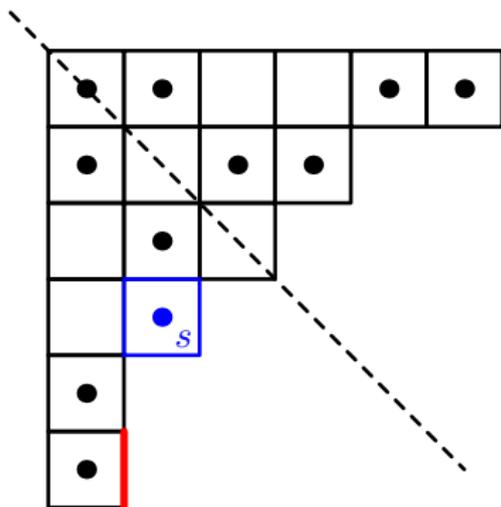
- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;

Algorithme d'insertion de type B



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b et un signe;

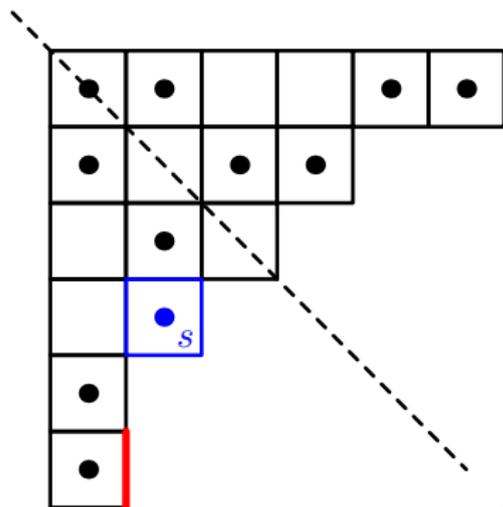
Algorithme d'insertion de type B



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b et un signe;

signe : +

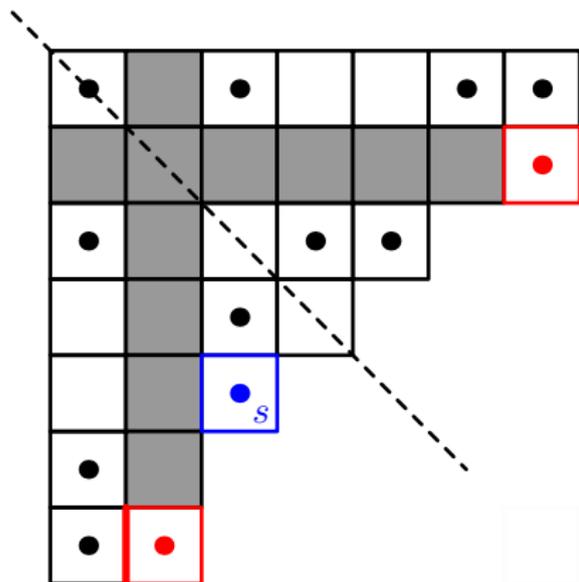
Algorithme d'insertion de type B



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b et un signe;
- 3) on ajoute la ligne et la colonne correspondant au bord b ;

signe : +

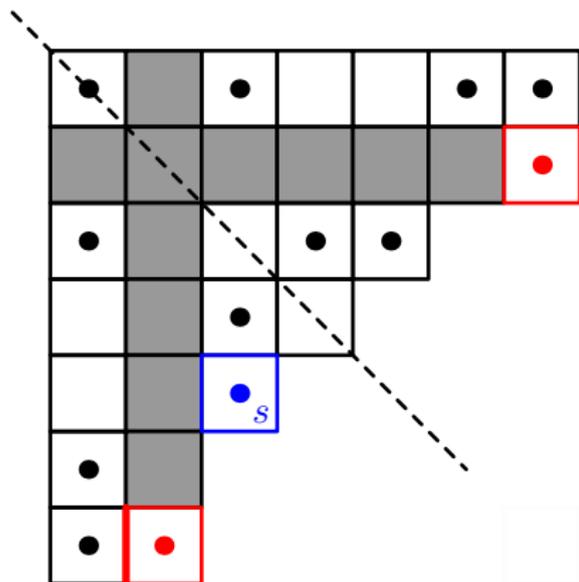
Algorithme d'insertion de type B



- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b et un signe;
- 3) on ajoute la ligne et la colonne correspondant au bord b ;

signe : +

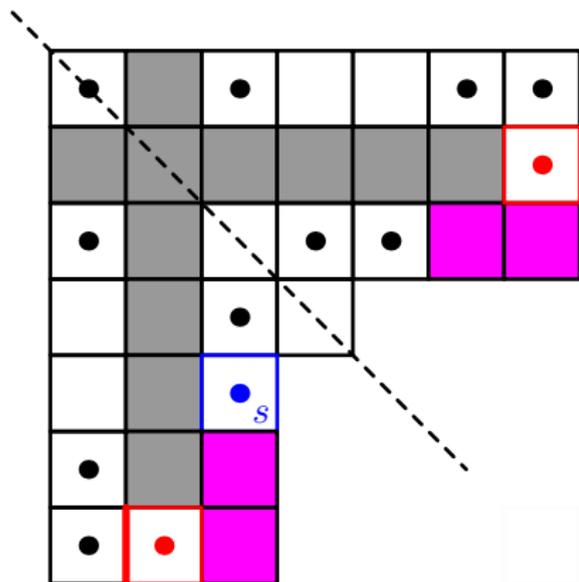
Algorithme d'insertion de type B



signe : +

- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b et un signe;
- 3) on ajoute la ligne et la colonne correspondant au bord b ;
- 4)
 - ▶ si le signe est négatif, on ajoute un ruban entre les deux nouvelles cases.
 - ▶ si le signe est positif et que la nouvelle case est située à gauche de la case spéciale, on ajoute un ruban entre la nouvelle case et la case spéciale.
 - ▶ sinon on ne fait rien.

Algorithme d'insertion de type B



signe : +

- 1) On repère la case spéciale du tableau que l'on note s ;
- 2) on choisit un bord b et un signe;
- 3) on ajoute la ligne et la colonne correspondant au bord b ;
- 4)
 - ▶ si le signe est négatif, on ajoute un ruban entre les deux nouvelles cases.
 - ▶ si le signe est positif et que la nouvelle case est située à gauche de la case spéciale, on ajoute un ruban entre la nouvelle case et la case spéciale.
 - ▶ sinon on ne fait rien.

Nombre de tableaux boisés symétriques

$$2^n n!$$

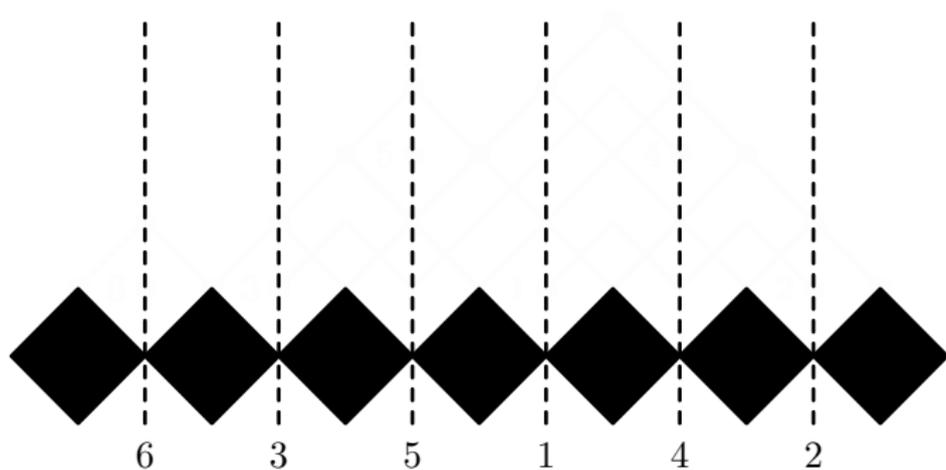
Preuve :

À un tableau boisé symétrique de taille k , on construit $2(k + 1)$ tableaux boisés symétriques différents de taille $k + 1$.

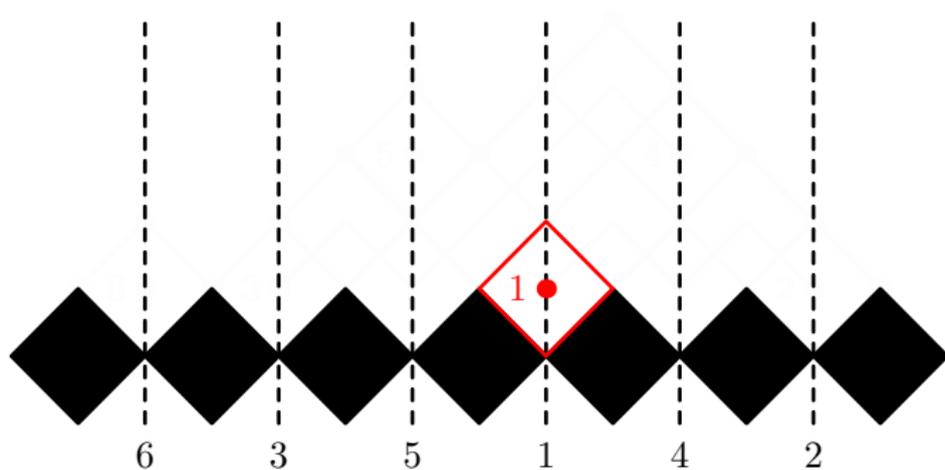
Plan

- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

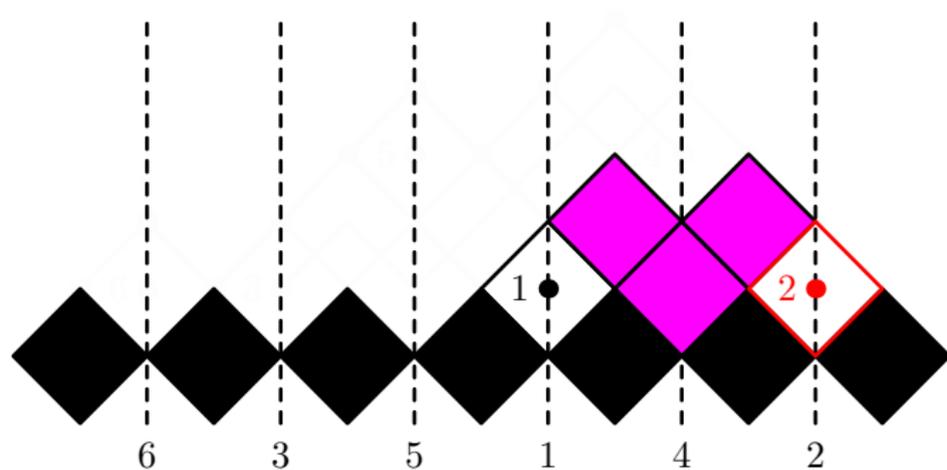
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



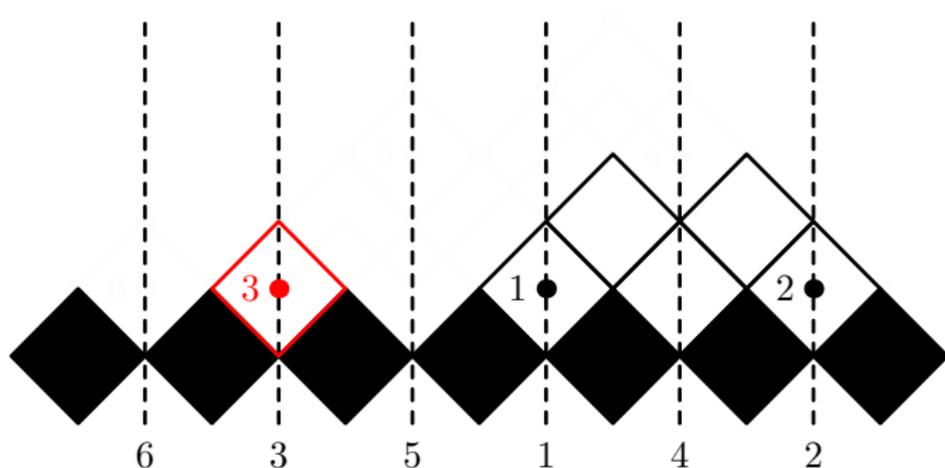
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



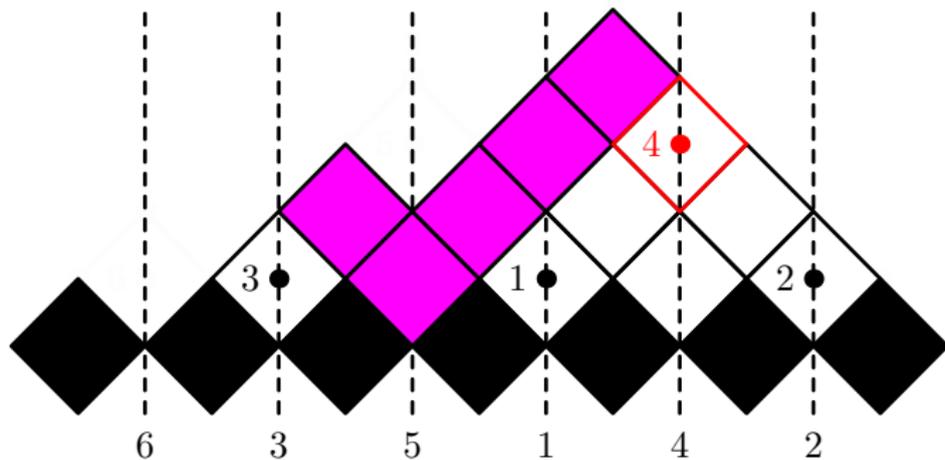
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



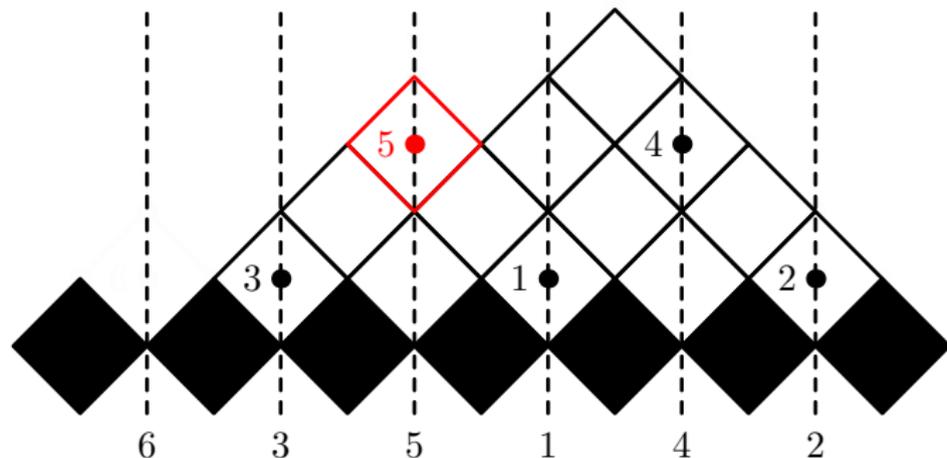
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



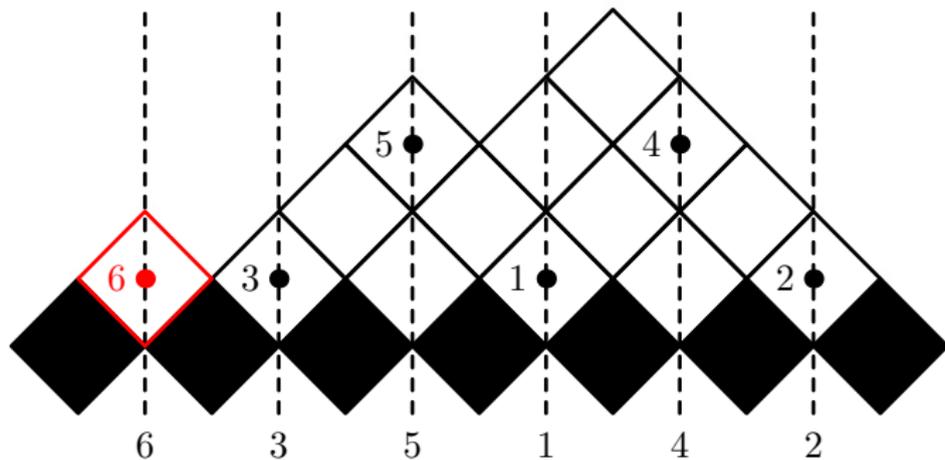
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



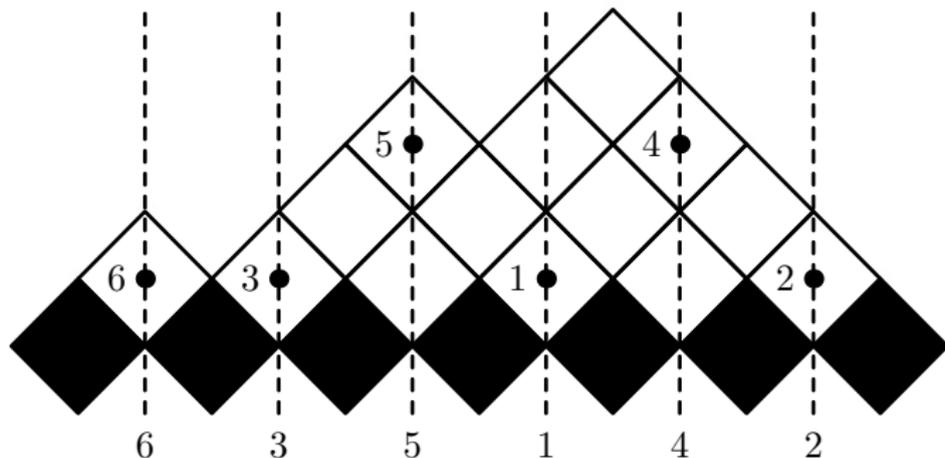
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



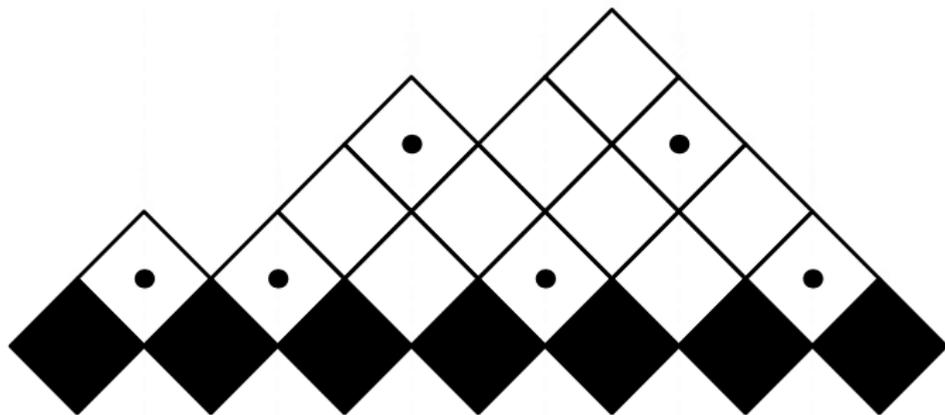
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



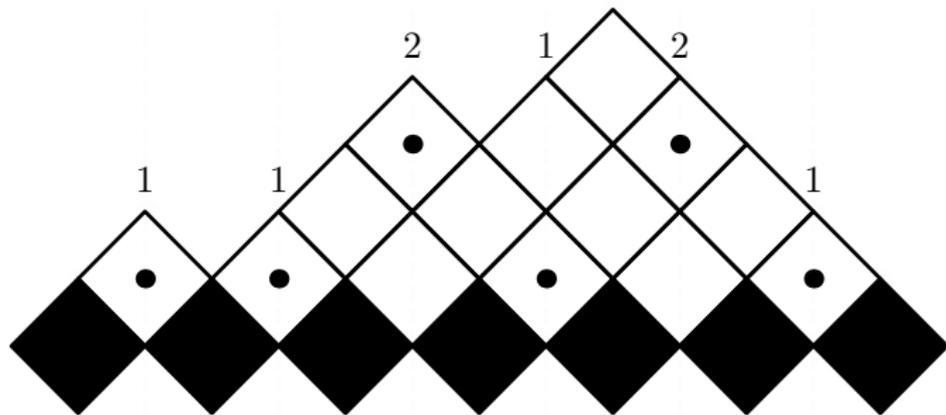
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



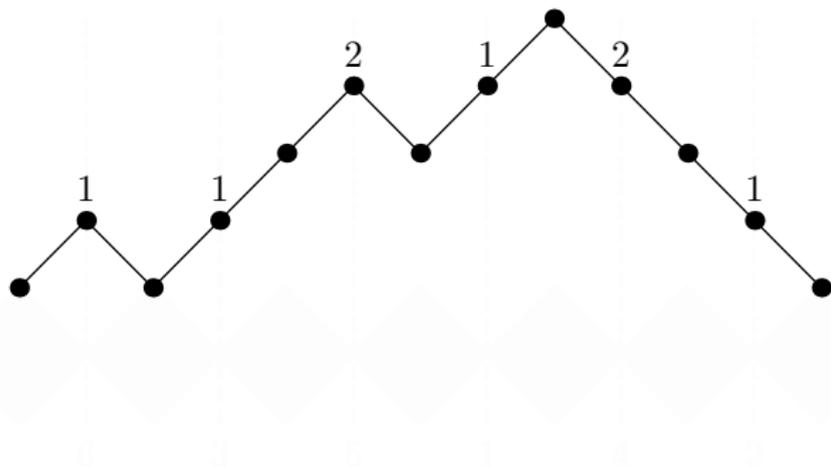
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



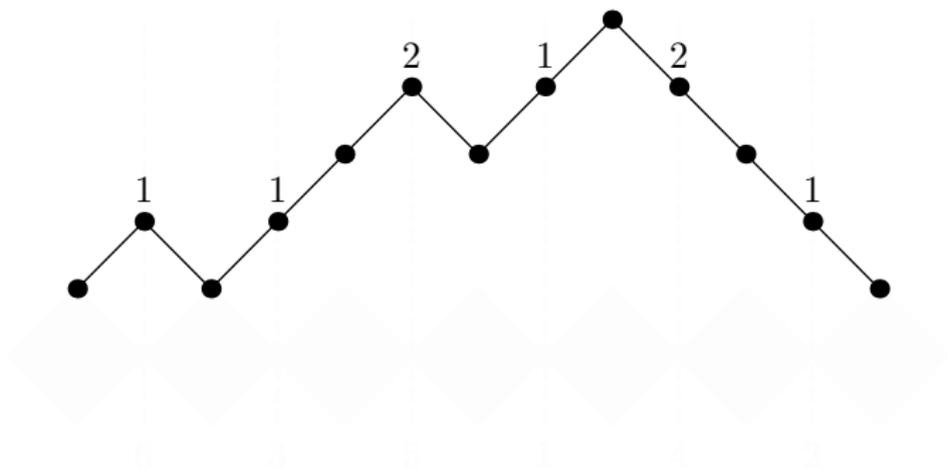
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



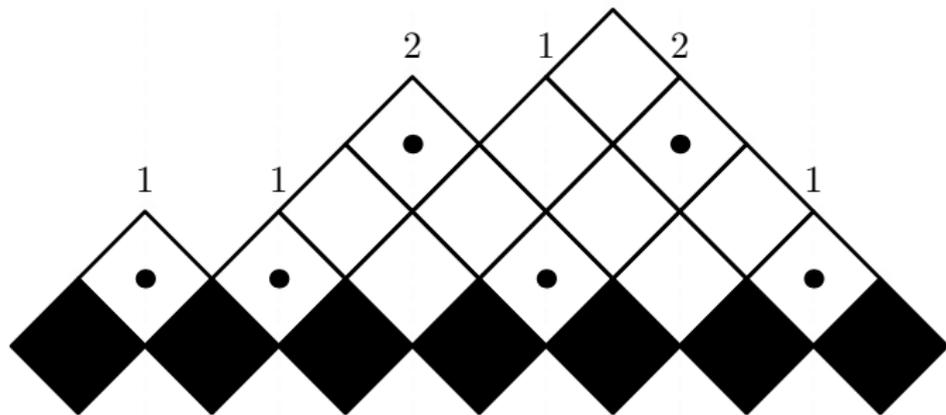
Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués



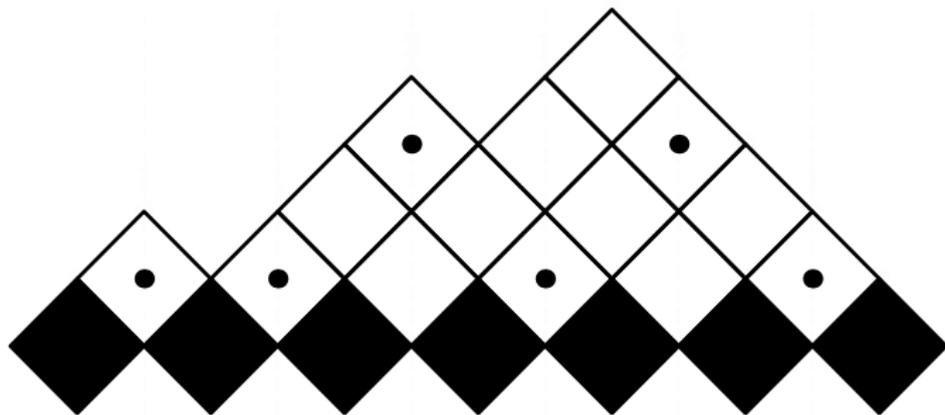
Algo. d'insertion inverse pour les chemins de Dyck valués



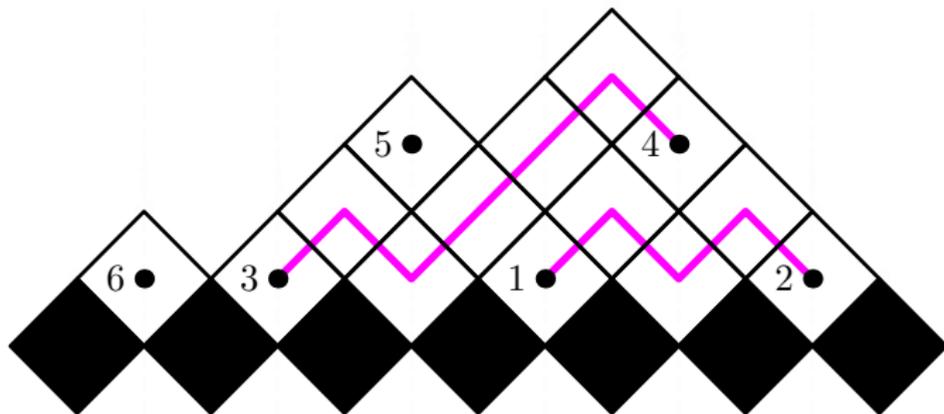
Algo. d'insertion inverse pour les chemins de Dyck valués



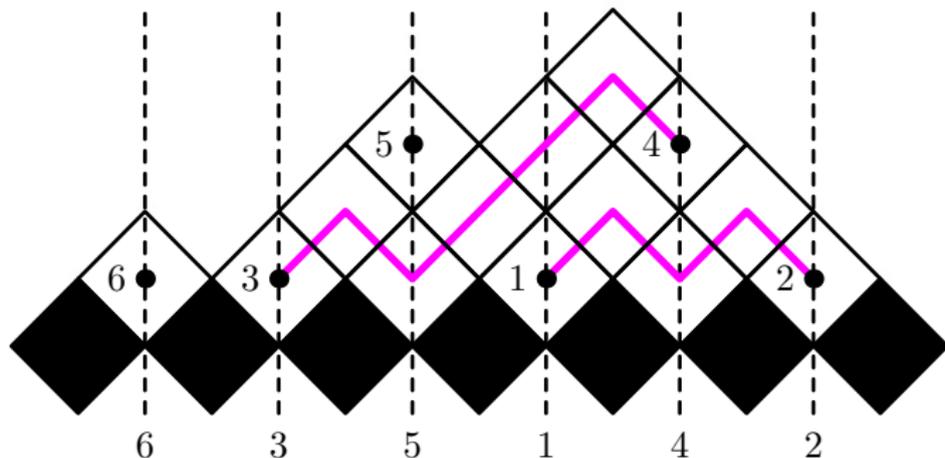
Algo. d'insertion inverse pour les chemins de Dyck valués



Algo. d'insertion inverse pour les chemins de Dyck valués



Algo. d'insertion inverse pour les chemins de Dyck valués

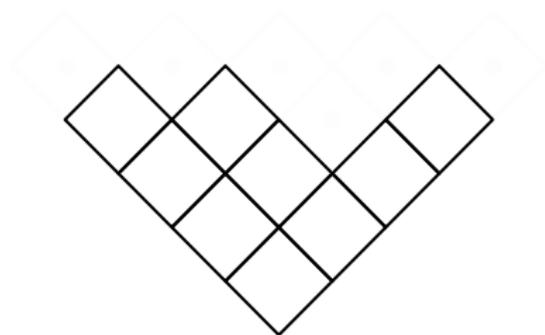


Plan

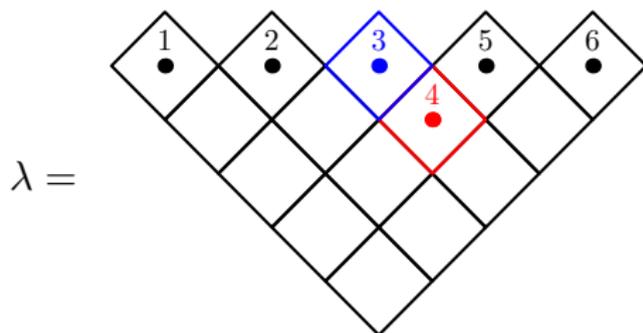
- 1 Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés et algorithme d'insertion
 - Une structure d'arbre sous-jacente
 - Liens avec les tableaux de permutations et les tableaux alternatifs
- 2 Bijections entre tableaux boisés et permutations
 - Un patron de bijections
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant le code
 - Bijection entre tableaux boisés et permutations en utilisant les cycles
- 3 Séries génératrices et énumération des tableaux boisés
- 4 Variations autour de l'algorithme d'insertion
 - Tableaux boisés symétriques et algorithme d'insertion de type B
 - Algorithme d'insertion pour les chemins de Dyck valués
 - Partitions gauches d'une partition donnée

Nombre de partitions gauches d'une partition donnée

$\lambda =$



Nombre de partitions gauches d'une partition donnée

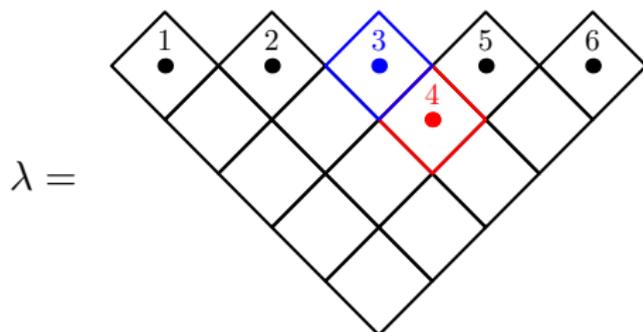


$$M_\lambda = \{3\}$$

$$D_\lambda = \{4\}$$

Nombre de partitions gauches d'une partition donnée

Les partitions gauches de λ sont en bijection avec les permutations de taille n qui évitent le motif 2 – 31 et qui possèdent les montées M_λ et les descentes D_λ .

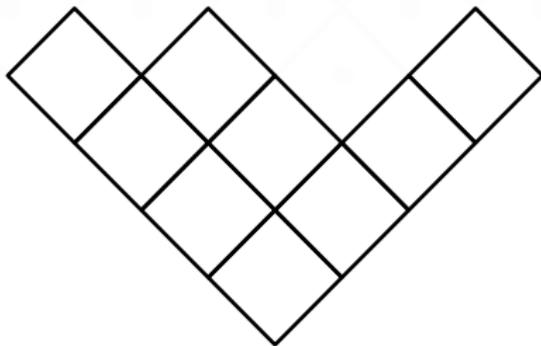


$$M_\lambda = \{3\}$$

$$D_\lambda = \{4\}$$

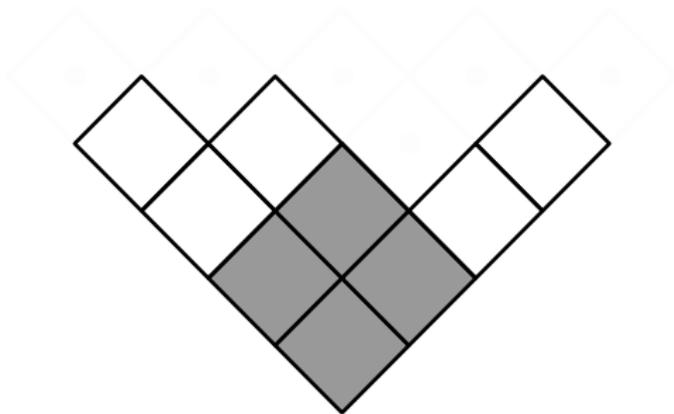
Bijection entre partitions gauches et certaines permutations

$\lambda =$

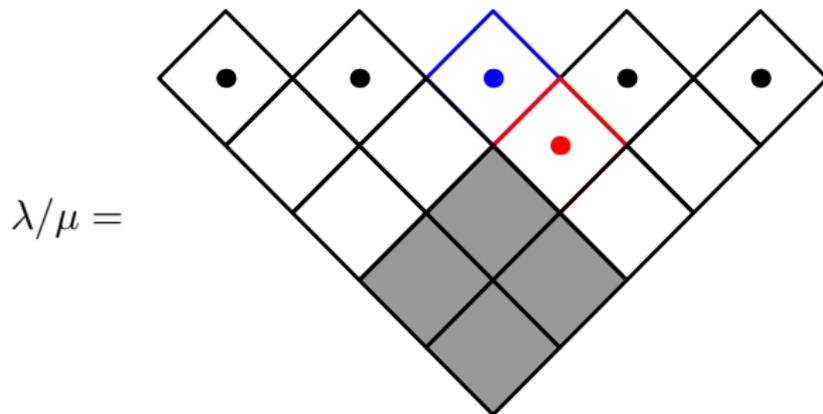


Bijection entre partitions gauches et certaines permutations

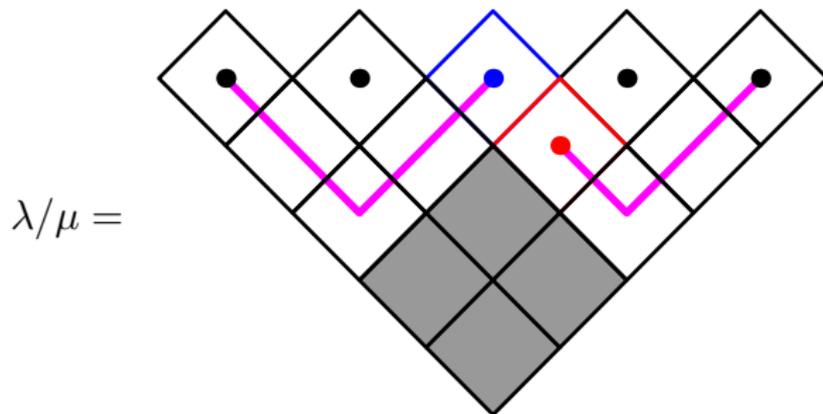
$\lambda/\mu =$



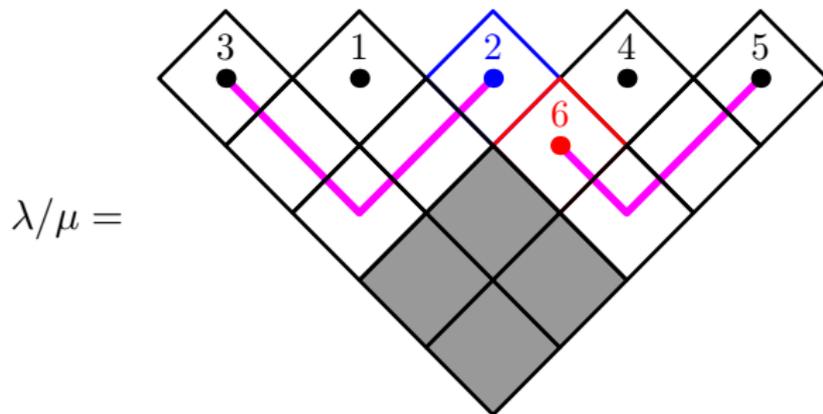
Bijection entre partitions gauches et certaines permutations



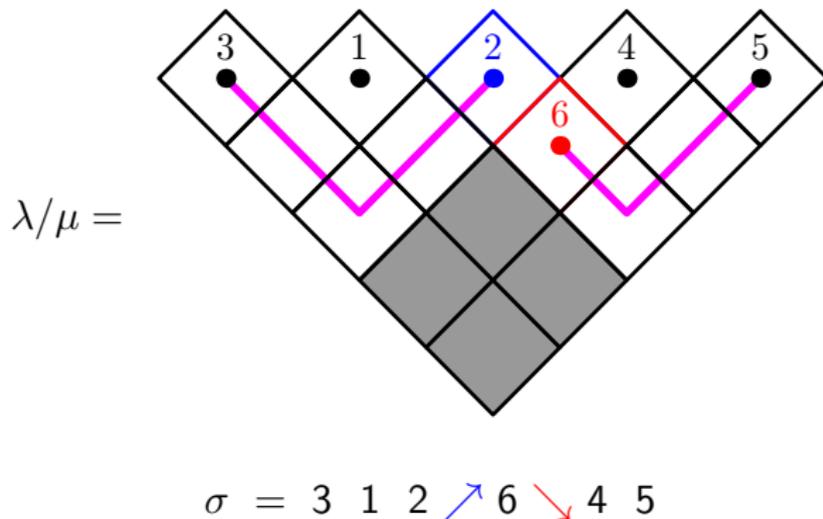
Bijection entre partitions gauches et certaines permutations



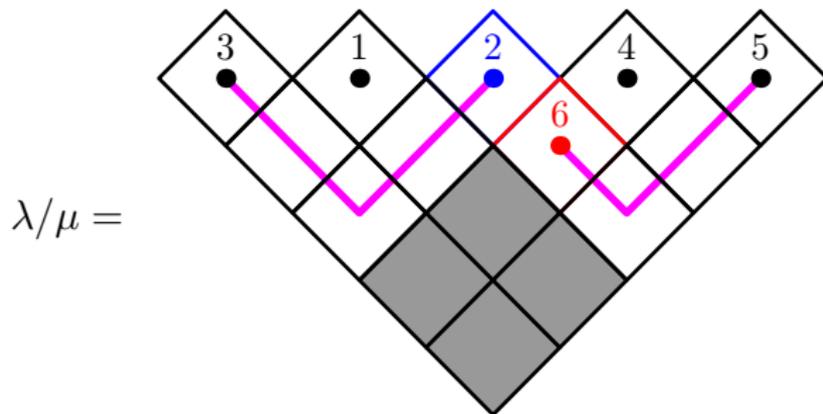
Bijection entre partitions gauches et certaines permutations



Bijection entre partitions gauches et certaines permutations



Bijection entre partitions gauches et certaines permutations



$$\sigma = 3 \ 1 \ 2 \ \nearrow 6 \ \searrow 4 \ 5$$

σ évite le motif 2 – 31

Merci de votre attention