

Université Bordeaux 1. Master d'informatique. Logique INF462

Décembre 2009

Sujet de M. Castéran Tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h30.
Les 3 exercices sont indépendants

À lire avant d'écrire quoi que ce soit *Le critère d'évaluation sera la qualité et la clarté de vos explications. Les commandes Coq non accompagnées d'explications ne seront pas prises en compte ; il vaut mieux expliquer simplement la structure de vos preuves ; par exemple vous pouvez donner des explications de la forme « En appliquant telle tactique, les nouveaux buts suivants sont engendrés ». Si vous oubliez la syntaxe précise d'une tactique, signalez-le,*

1 Exercice (4pts / 10)

Donner des preuves (sans utiliser de tactique automatique) des énoncés suivants :

Lemma L : forall P Q, $\sim(P \leftrightarrow Q) \rightarrow P \rightarrow \sim Q$.
Admitted.

Lemma L1 : forall (A:Type) (P Q: A->Prop),
(exists x, P x \rightarrow Q x) \rightarrow (forall x, \sim Q x) \rightarrow
exists x, \sim P x.

2 Exercice (3 pts / 10)

On définit le prédicat suivant :

Definition multiple_de_3 (n : nat) := exists p:nat, n = 3 * p.

On admet (sans démonstration) le lemme ci-dessous :

Lemma mult_dist : forall a b c:nat, a * (b+c) = a * b + a * c.

Comment terminer la preuve du lemme suivant ?

```

Lemma mult3_plus : forall n p, multiple_de_3 n ->
                        multiple_de_3 p ->
                        multiple_de_3 (n + p).
intros n p H H0;destruct H as [x Hx];destruct H0 as [y Hy].
(*
1 subgoal

n : nat
p : nat
x : nat
Hx : n = 3 * x
y : nat
Hy : p = 3 * y
=====
multiple_de_3 (n + p)
*)

```

3 Exercice (3 pts / 10)

On considère les deux définitions ci-dessous :

```

Fixpoint Le (n p:nat) : bool :=
  match n, p with 0, _ => true
                | S q, S r => Le q r
                | _, _ => false
end.

```

```

Fixpoint Lt (n p:nat) : bool :=
  match n, p with 0, S _ => true
                | S q, S r => Lt q r
                | _, _ => false
end.

```

On veut prouver que, si n et p sont deux entiers naturels, alors $n \leq p$ ou $p < n$.

1. Comment écrire ce résultat en *Coq* en utilisant ces définitions ?
2. En donner la structure de la preuve.