

Université Bordeaux 1. Master d'informatique. Logique J1IN7M12

16 Décembre 2011, 8h30–11h30

Sujet de M. Castéran

Tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h30.

Ce sujet comporte deux pages. Les quatre exercices sont indépendants

À lire avant d'écrire quoi que ce soit *Le critère d'évaluation sera la qualité et la clarté de vos explications. Les commandes Coq non accompagnées d'explications ne seront pas prises en compte ; il vaut mieux expliquer simplement la structure de vos preuves ; par exemple vous pouvez donner des explications de la forme « En appliquant telle tactique, les nouveaux buts suivants sont engendrés ». Si vous oubliez la syntaxe précise d'une tactique, signalez-le. Les notations utilisées dans la première partie du cours assurée par M. Sénizergues sont acceptées, à condition qu'elles restent dans le cadre intuitionniste.*

1 Exercice (3pts / 10)

On considère trois variables P , Q et R de type `Prop`. Donner des preuves (sans utiliser de tactique automatique) des énoncés suivants :

Lemma L1 : $(P \vee (Q \rightarrow P)) \rightarrow Q \rightarrow P$.

Lemma L2 : $(P \rightarrow \sim P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$.

2 Exercice (2 pts / 10)

On considère les déclarations suivantes :

Section S2.

Variables $A B$: `Type`.

Variable f : $A \rightarrow B$.

Variable P : $A \rightarrow \text{Prop}$.

Variable Q : $B \rightarrow \text{Prop}$.

Hypothesis H: forall x:A, P x \vee Q (f x).
Hypothesis H0 : exists x:A, \sim P x.

2.1

Prouver le lemme suivant :

Lemma L3 : exists y:B, Q y.

3 Exercice (3 pts / 10)

On considère un type A quelconque et un prédicat $P : A \rightarrow \text{Prop}$. Définir les prédicats suivants sur `list A`.

- Tous les éléments de la liste l satisfont P
- Il existe au moins un élément de l qui satisfait P

4 Exercice (2 pts / 10)

On considère les déclarations suivantes :

Section S3.

Variable P : nat -> Prop.
Variable p : nat -> bool.

Hypothesis p2P : forall n, p n = true -> P n.
Hypothesis p_false_not_P : forall n, p n = false -> \sim P n.

Montrer le lemme suivant :

Lemma P_decidable : forall n, P n \vee \sim P n.