

# Université Bordeaux 1. Master d'informatique. Logique J1IN7M12

16 Décembre 2011, 8h30–11h30

Sujet de M. Castéran

Tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h30.

Ce sujet comporte deux pages. Les quatre exercices sont indépendants

**À lire avant d'écrire quoi que ce soit** *Le critère d'évaluation sera la qualité et la clarté de vos explications. Les commandes Coq non accompagnées d'explications ne seront pas prises en compte ; il vaut mieux expliquer simplement la structure de vos preuves ; par exemple vous pouvez donner des explications de la forme « En appliquant telle tactique, les nouveaux buts suivants sont engendrés ». Si vous oubliez la syntaxe précise d'une tactique, signalez-le. Les notations utilisées dans la première partie du cours assurée par M. Sénizergues sont acceptées, à condition qu'elles restent dans le cadre intuitionniste.*

## 1 Exercice (3pts / 10)

On considère trois variables  $P$ ,  $Q$  et  $R$  de type `Prop`. Donner des preuves (sans utiliser de tactique automatique) des énoncés suivants :

Lemma L1 :  $(P \vee (Q \rightarrow P)) \rightarrow Q \rightarrow P$ .

Lemma L2 :  $(P \rightarrow \sim P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ .

## 2 Exercice (2 pts / 10)

On considère les déclarations suivantes :

Section S2.

Variables  $A$   $B$  : Type.

Variable  $f$  :  $A \rightarrow B$ .

Variable  $P$  :  $A \rightarrow \text{Prop}$ .

Variable  $Q$  :  $B \rightarrow \text{Prop}$ .

Hypothesis H: forall x:A, P x  $\vee$  Q (f x).  
Hypothesis H0 : exists x:A,  $\sim$  P x.

## 2.1

Prouver le lemme suivant :

Lemma L3 : exists y:B, Q y.

## 3 Exercice (3 pts / 10)

On considère un type  $A$  quelconque et un prédicat  $P : A \rightarrow \text{Prop}$ . Définir les prédicats suivants sur `list A`.

- Tous les éléments de la liste  $l$  satisfont  $P$
- Il existe au moins un élément de  $l$  qui satisfait  $P$

## 4 Exercice (2 pts / 10)

On considère les déclarations suivantes :

Section S3.

Variable P : nat -> Prop.  
Variable p : nat -> bool.

Hypothesis p2P : forall n, p n = true -> P n.  
Hypothesis p\_false\_not\_P : forall n, p n = false ->  $\sim$  P n.

Montrer le lemme suivant :

Lemma P\_decidable : forall n, P n  $\vee$   $\sim$  P n.