

# Chapitre 1

## Logique Propositionnelle (intuitionniste, puis classique)

**Exercice 1.** Faire des recherches sur Internet sur les termes “*ex falso quodlibet sequitur*” et “*principle of explosion*”

**Exercice 2.** justifier (par une dérivation) la règle dérivée suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim B \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A} \text{ absurde}$$

**Exercice 3.** En utilisant la règle *absurde*, prouver le séquent

$$P \rightarrow Q, P \rightarrow \sim Q \vdash P \rightarrow S$$

.

**Exercice 4.** Prouver les règles dérivées suivantes (une fois prouvées, on pourra les utiliser dans tout raisonnement ultérieur)

$$\frac{\Gamma, B \vdash A \quad \Gamma \vdash \sim A}{\Gamma \vdash \sim B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \sim \sim A} \text{ double négation}_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sim \sim \sim A}{\Gamma \vdash \sim A} \text{ triple négation}_e$$

**Exercice 5.** On veut prouver que si l'on sait prouver la formule de Peirce, alors on sait prouver la formule  $\sim \sim P \rightarrow P$ , et réciproquement.

1. (a) Supposons qu'on sache prouver le séquent  $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ .

- (b) Montrer qu'on peut alors prouver  $\vdash (\sim P \rightarrow P) \rightarrow P$ .  
(c) En déduire qu'on peut prouver le séquent  $\vdash \sim \sim P \rightarrow P$ .
2. (a) Réciproquement, supposons que l'on sache prouver  $\vdash \sim \sim P \rightarrow P$ .  
(b) Prouver  $\vdash \sim \sim ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  (preuve pas trop facile).  
(c) En déduire qu'on peut prouver  $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ .

On s'efforcera de justifier chaque étape de votre raisonnement, soit en appliquant une règle (dérivée ou pas) de la logique intuitionniste, soit en appliquant un méta-théorème qu'il faudra alors citer.

**Exercice 6** (propriétés de la conjonction). Montrer les règles suivantes :

$$\frac{}{A \wedge B \vdash B \wedge A} \text{ commutativité de } \wedge$$

$$\frac{}{A \wedge B \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)} \text{ associativité de } \wedge$$

$$\frac{}{A \wedge \perp \vdash \perp} \text{ loi d'absorption de } \wedge$$

**Exercice 7.** Prouver les règles dérivées suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma \vdash \sim B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{}{\sim A \vee B \vdash A \rightarrow B}$$

$$\frac{}{\sim(A \vee B) \vdash \sim A \wedge \sim B} \text{ de Morgan}_1$$

**Exercice 8.** Montrer les jugements suivants (qu'on pourra par la suite utiliser comme règles dérivées) :

$$A \wedge \perp \equiv_J \perp \tag{1.1}$$

$$A \vee \perp \equiv_J A \tag{1.2}$$

$$A \vee B \equiv_J B \vee A \tag{1.3}$$

$$A \wedge B \equiv_J B \wedge A \tag{1.4}$$

$$A \vee (B \vee C) \equiv_J A \vee B \vee C \tag{1.5}$$

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv_J A \wedge B \wedge C \tag{1.6}$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv_J A \wedge B \vee A \wedge C \tag{1.7}$$

$$A \vee B \wedge C \equiv_J (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{1.8}$$

$$(A \wedge \sim B) \vdash_J \sim(A \rightarrow B) \tag{1.9}$$

$$\sim(A \vee B) \equiv_J \sim A \wedge \sim B \text{ [loi de De Morgan]} \tag{1.10}$$

$$A \rightarrow \sim A \vdash_J \sim A \text{ [reductio ad absurdum]} \tag{1.11}$$

$$\sim A \rightarrow A \vdash_J \sim \sim A \tag{1.12}$$

**Exercice 9.** L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? Pourquoi ?

“ Il n'existe aucun séquent  $\Gamma \vdash A$  tel qu'on ait à la fois  $\Gamma \vdash_J A$  et  $\Gamma \vdash_J \sim A$ .”

**Exercice 10.** On considère la variante suivante du théorème de remplacement :

**Méta-théorème 1.** Si  $\Delta \vdash_J A \leftrightarrow B$  et  $\Gamma \vdash_J C$ , avec  $\Delta \subseteq \Gamma$ , alors  $\Gamma \vdash_J D$ , où  $D$  est obtenue en remplaçant dans  $C$  et  $\Gamma$  une ou plusieurs occurrences de  $A$  par  $B$ .

Pouvez-vous justifier cette variante ?

Inventez un exemple où le non-respect de la condition  $\Delta \subseteq \Gamma$  entraîne la dérivation d'un séquent absurde.

**Exercice 11.** Prouver en **logique propositionnelle classique** les règles suivantes :

$$\sim\sim A \vdash A \text{ [élimination de la double négation]} \quad (1.13)$$

$$\vdash \sim(A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B \text{ [loi de de Morgan]} \quad (1.14)$$

$$\vdash \sim(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \sim B) \quad (1.15)$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow \sim A) \quad (1.16)$$

**Exercice 12.** Dériver la règle suivante (raisonnement par l'absurde en logique classique).

$$\frac{\Gamma, \sim A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ absurde}$$

**Exercice 13.** Dériver la règle suivante (élimination du tiers-exclu) en logique classique.

$$\frac{\Gamma, B \vdash A \quad \Gamma, \sim B \vdash A}{\Gamma \vdash A} \text{ } exm_e$$

**Exercice 14.** Montrer le théorème suivant :

**Méta-théorème 2.** Soient  $\Gamma$  un contexte et  $A$  une proposition, alors  $\Gamma \vdash_K A$  si et seulement si  $\Gamma \cup \{\sim A\}$  n'est pas satisfaisable.

**Exercice 15.** Prouver le jugement suivant

$$\sim A \rightarrow A \vdash_K A$$

**Aide :** On pourra d'abord prouver le jugement

$$\sim A \rightarrow A \vdash_J \sim\sim A$$

puis utiliser l'élimination de la double négation.

**Exercice 16.** Prouver le jugement suivant

$$\vdash_K (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

**Remarque :** Nous avons là un exemple de jugement prouvable en logique classique, donc valide, mais dont l'intuition nous échappe.

Que veut dire, et surtout comment utiliser l'instance suivante ?

$$\vdash_K (x = 2 \rightarrow x = 3) \vee (x = 3 \rightarrow x = 2)$$

**Exercice 17.** Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions atomiques.

1. Montrer l'équivalence  $(\sim P \rightarrow P) \equiv_J \sim \sim P$ .
2. En déduire l'équivalence  $(\sim P \rightarrow P) \rightarrow P \equiv_J \sim \sim P \rightarrow P$ .
3. (\*) En déduire que si la formule de Peirce était prouvable en logique intuitionniste, alors on pourrait prouver l'élimination de la double négation c'est à dire prouver tout jugement de la forme  $\sim \sim A \vdash_J A$ . On pourra utiliser le théorème de substitution uniforme.
4. Donner une preuve en logique classique de la formule de Peirce :

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$$

5. Donner une preuve en logique intuitionniste du séquent suivant :

$$P \vee \sim P \vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$$

6. (\*) Montrer que si l'on ajoute à la logique intuitionniste la règle d'élimination de la double négation :

$$\frac{\Gamma \vdash \sim \sim A}{\Gamma \vdash A} \text{ double negation}_e$$

Alors, on peut en dériver la règle du tiers exclu.

7. Que peut-on en conclure sur le tiers-exclu, la loi de la double négation et la formule de Peirce ?