

## Exercices sur la Logique Minimale

**Exercice 1.** Dessiner la structure des formules suivantes :

1.  $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
2.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$
3.  $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow R$

**Exercice 2.** Prouver le séquent suivant (dans les deux formats)

$$P \rightarrow Q \rightarrow R, P \rightarrow Q, P \vdash R$$

(attention à l'associativité droite de  $\rightarrow$  !)

### Solution:

Soit  $\Gamma = \{P \rightarrow Q \rightarrow R, P \rightarrow Q, P\}$

Ci-dessous l'arbre de preuve du séquent :

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R} \text{hyp}}{\Gamma \vdash P \rightarrow Q} \text{hyp} \quad \frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash P \rightarrow Q} \text{hyp}}{\Gamma \vdash Q} \text{mp} \quad \frac{\frac{}{\Gamma \vdash P} \text{hyp}}{\Gamma \vdash P} \text{mp}}{\Gamma \vdash R} \text{mp}}{\Gamma \vdash R} \text{mp}}$$

Dans un autre format :

- 1 Supposons  $P \rightarrow Q \rightarrow R$
- 2 Supposons  $P \rightarrow Q$
- 3 Supposons  $P$
- 4  $Q$  [mp, 2,3]
- 5  $R$  [mp, 1,3,4]

**Exercice 3.** Prouver les séquents suivants (si possible dans les deux formats de preuve).

$$\vdash P \rightarrow P.$$

$$\vdash (P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P)$$

$$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$$

$$P \rightarrow Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow P \rightarrow R$$

$P \rightarrow R \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R$

$P \rightarrow P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$

$P \rightarrow Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \rightarrow T \vdash P \rightarrow T$

### Solution:

**1**

$$\frac{\overline{P \vdash P} \text{ hyp}}{\vdash P \rightarrow P} \rightarrow_i$$

1 { Supposons P  
2 P [hyp, 1]  
3 }  
4  $P \rightarrow P$  [ $\rightarrow_i, 1, 2$ ]

**2**

$$\frac{\overline{P \rightarrow P \vdash P \rightarrow P} \text{ hyp}}{\vdash (P \rightarrow P) \rightarrow P \rightarrow P} \rightarrow_i$$

1 { Supposons  $P \rightarrow P$   
2  $P \rightarrow P$  [hyp, 1]  
3 }  
4  $(P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow P)$  [ $\rightarrow_i, 1, 2$ ]

**3**

1 { Supposons  $P \rightarrow Q$   
2 Supposons  $Q \rightarrow R$   
3 Supposons P  
4 Q [mp, 1, 3]  
5 R [mp, 2, 4]  
6 }  
7  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$  [ $\rightarrow_i, 1, 2, 3, 5$ ]

4

1 Supposons  $P \rightarrow Q \rightarrow R$   
2 { Supposons  $Q$   
3   Supposons  $P$   
4      $R$  [mp, 1,3,2]  
5 }  
6  $Q \rightarrow P \rightarrow R$  [ $\rightarrow_i$ , 2, 3, 4]

5

$$\frac{\frac{P \rightarrow R, P, Q \vdash P \rightarrow R \text{ hyp} \quad P \rightarrow R, P, Q \vdash P \text{ hyp}}{P \rightarrow R, P, Q \vdash R} \text{ mp}}{P \rightarrow R \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R} \rightarrow_i$$

6

1 Supposons  $P \rightarrow P \rightarrow Q$   
2 { Supposons  $P$   
3    $Q$  [mp, 1, 2, 2]  
4 }  
5  $P \rightarrow Q$  [ $\rightarrow_i$ , 2-3]

7

1 Supposons  $P \rightarrow Q$   
2 Supposons  $P \rightarrow R$   
3 Supposons  $Q \rightarrow R \rightarrow T$   
4 { Supposons  $P$   
5    $Q$  [mp, 1, 4]  
6    $R$  [mp, 2, 4]  
7    $T$  [mp, 3,5,6]  
8 }  
9  $P \rightarrow T$  [ $\rightarrow_i$ , 4-7]

**Exercice 4.** (\*) Montrer que la règle d'affaiblissement est bien une règle dérivée.  
On pourra procéder par récurrence sur [la taille de] la preuve de  $\Gamma \vdash A$

### Solution:

Rappelons que les preuves en logique minimale sont des arbres dont chaque noeud est étiqueté par une application correcte d'une des trois règles d'inférence de la logique minimale.

Montrons que pour toute preuve  $\pi$  en logique minimale, on peut transformer  $\pi$  en une preuve du séquent  $\Delta \vdash A$ , où  $\Gamma \vdash A$  est le séquent prouvé par  $\pi$  et  $\Delta$  n'importe quel contexte tel que  $\Gamma \subseteq \Delta$ .

— Si  $\pi$  est de la forme suivante :

$$\frac{}{\Gamma \vdash A} \text{ hyp}$$

Il est clair que  $A \in \Gamma$ , donc  $A \in \Delta$ , et la preuve  $\pi'$  est la suivante :

$$\frac{}{\Delta \vdash A} \text{ hyp}$$

— Si  $\pi$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{}{\Gamma \vdash B \rightarrow A} \pi_1 \quad \frac{}{\Gamma \vdash B} \pi_2}{\Gamma \vdash A} \text{ mp}$$

Soit  $\Delta$  un contexte tel que  $\Gamma \subseteq \Delta$ . On suppose (hypothèses de récurrence) qu'il existe une preuve  $\pi'_1$  de  $\Delta \vdash B \rightarrow A$  et une preuve  $\pi'_2$  de  $\Delta \vdash B$ . Alors nous pouvons construire une preuve de  $\Delta \vdash A$  :

$$\frac{\frac{}{\Delta \vdash B \rightarrow A} \pi'_1 \quad \frac{}{\Delta \vdash B} \pi'_2}{\Delta \vdash A} \text{ mp}$$

— Si  $\pi$  est de la forme suivante :

$$\frac{\frac{}{\Gamma, A \vdash B} \pi_1}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

Soit  $\Delta$  un contexte tel que  $\Gamma \subseteq \Delta$ . On suppose (hypothèse de récurrence) qu'il existe une preuve  $\pi'_1$  de  $\Delta, A \vdash B$ . Alors nous pouvons construire une preuve de  $\Delta \vdash A \rightarrow B$  :

$$\frac{\frac{}{\Delta, A \vdash B} \pi'_1}{\Delta \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

**Exercice 5.** On considère la Formule de Peirce :  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ .

Montrer que la formule de Peirce est une tautologie (autrement dit, le séquent  $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  est valide).

### Solution:

Soit  $\nu$  une valuation.

— Si  $\nu(P) = \mathbf{v}$  alors la valeur de vérité de  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  est trivialement  $\mathbf{v}$ ,

— Si  $\nu(P) = \mathbf{f}$ , alors la valeur de vérité de  $(P \rightarrow Q)$  est  $\mathbf{v}$ , la valeur de vérité de  $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$  est  $\mathbf{f}$ , et par conséquent celle de la formule entière  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  est  $\mathbf{v}$ .

Notons que nous n'avons pas eu à considérer la valuation de  $Q$  dans cette preuve.