

Logique du 1^{er} ordre¹

La logique du 1^{er} ordre (ou calcul des prédicats) est un système formel, c'est-à-dire une syntaxe associée à une interprétation.

Syntaxe

1. Un alphabet qui comporte
 - Les signes de quantification \forall, \exists , les connecteurs propositionnels $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ et quelques autres symboles spéciaux comme les parenthèses, virgules, etc.
 - Les variables $x, y, z \dots$
 - Les symboles de fonctions f, g, \dots . Les fonctions sans arguments sont des constantes.
 - Les symboles de prédicats P, Q, \dots . Les prédicats sans arguments sont les propositions.
2. Des termes qui sont soit des variables, soit des constantes, soit de la forme $t(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ où t est un symbole de fonction à k arguments et où les α_i sont des termes.
3. Des formules atomiques qui sont soit des symboles de proposition, soit de la forme $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$ où P est un symbole de prédicat à k arguments et où les t_i sont des termes.
4. Des formules complexes de la forme
 - $\neg A$
 - $(A \vee B)$
 - $(A \wedge B)$
 - $(A \Rightarrow B)$
 - $(A \Leftrightarrow B)$Où A et B sont des formules.

Exemples

$$\forall x, \forall y, \exists q, \exists r, x = qy + r$$
$$\forall x, \exists y, y > x \wedge P(x) \Rightarrow P(y)$$

1. M. Condillac « Prolog », Dunod Paris, 1986

Interprétation

Les symboles de variables et de constantes sont interprétés comme des valeurs prises dans un domaine D . Les symboles de fonctions à k arguments sont interprétés comme des fonctions de D^k dans D . Les symboles de prédicats à k arguments sont interprétés comme des relations sur D^k .

Une formule A est **satisfaite** si la valeur de son interprétation est **vrai**. Cette *satisfaction* est étendue à toutes les interprétations possibles dans le cas où la formule contient des variables.

Par exemple la formule suivante est **satisfaite**

$$\forall x, \forall y, P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(y))$$

Une formule A résulte logiquement d'un ensemble de formules S si toute interprétation qui satisfait S satisfait également A . On note $S \models A$.