

Exploration de graphes

Frédéric Mazoit

École décompositions des graphes

Le problème (Breich 67, Parson 76)

Dans un graphe, on trouve :

- ▶ un voleur rapide ;
- ▶ des gendarmes qui veulent attraper le voleur.

But : trouver une stratégie qui utilise le moins de gendarmes possible.

Les mouvements

Le voleur

- ▶ peut se déplacer à condition de ne pas rencontrer de gendarmes.

Les gendarmes

- ▶ peuvent placer un nouveau gendarme sur un sommet ;
- ▶ retirer un gendarme d'un sommet.

Le jeu

se joue par tours

- ▶ Les gendarmes annoncent leur prochain mouvement ;
- ▶ Le voleur joue ;
- ▶ Les gendarmes effectuent le mouvement annoncé.

Le jeu

se joue par tours

- ▶ Les gendarmes annoncent leur prochain mouvement ;
- ▶ Le voleur joue ;
- ▶ Les gendarmes effectuent le mouvement annoncé.

Deux variantes principales

Les gendarmes

- ▶ voient le voleur : $vs(G)$ le nombre de gendarmes nécessaires.
- ▶ ne voient pas le voleur : $s(G)$ le nombre de gendarmes nécessaires.

► Les chemins :



► Les chemins :



► Les chemins :



► Les chemins :



► Les chemins :



► Les chemins :



► Les chemins :



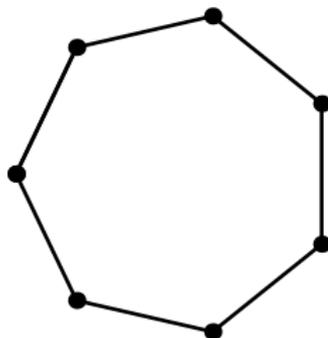
► Les chemins :



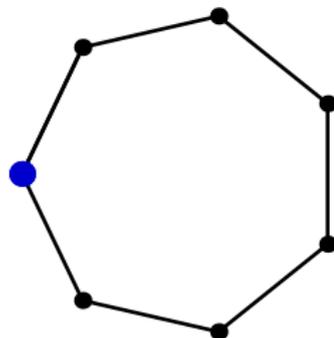
- Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$



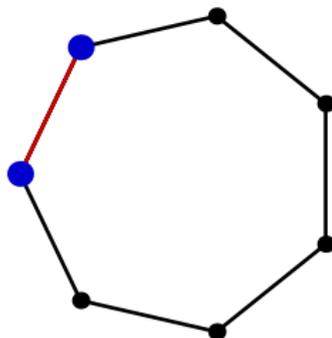
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



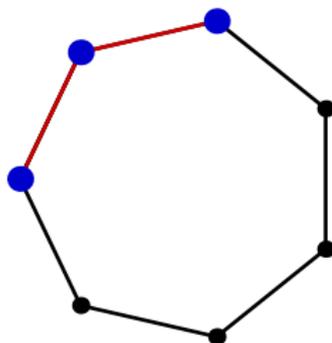
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



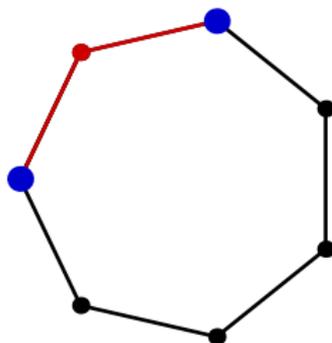
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



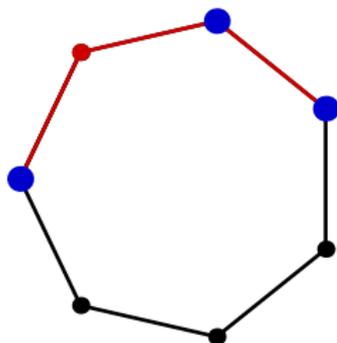
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



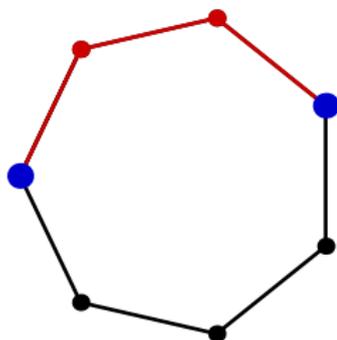
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



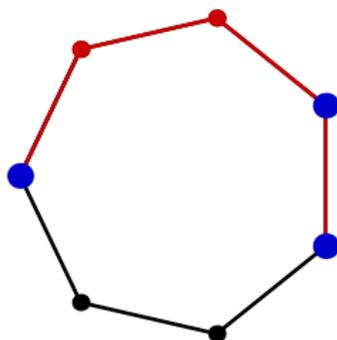
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



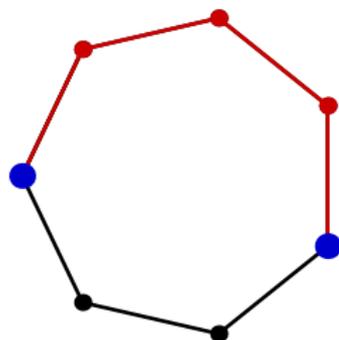
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



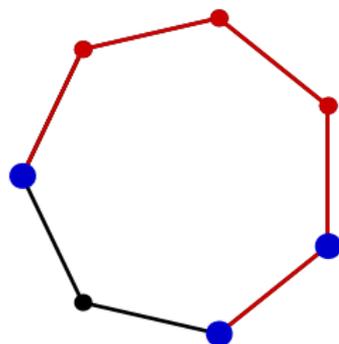
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



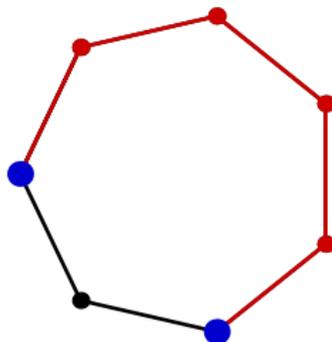
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



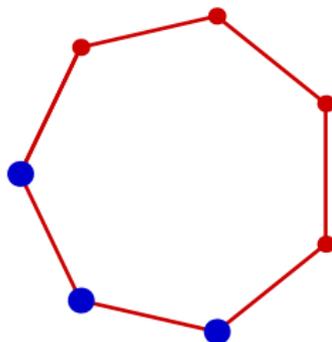
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



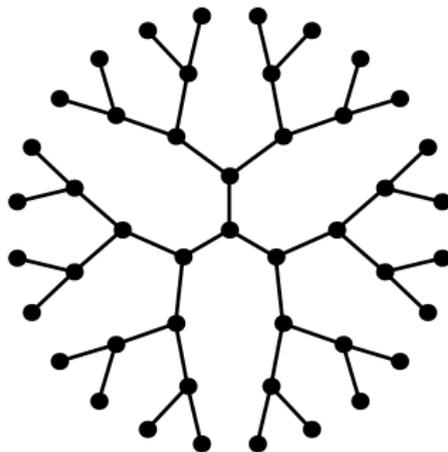
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles :



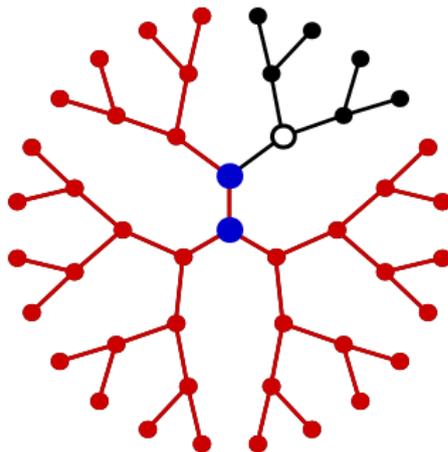
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$



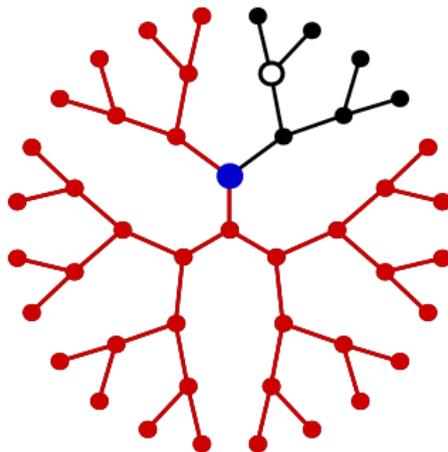
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres :



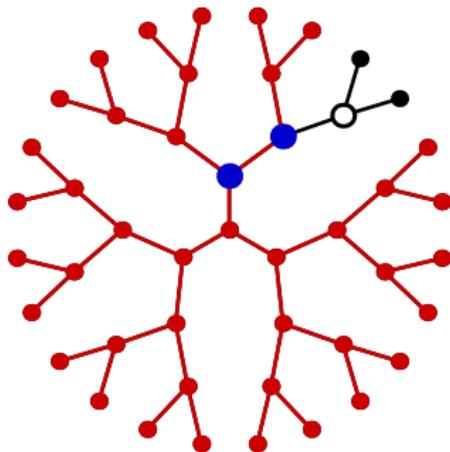
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres :



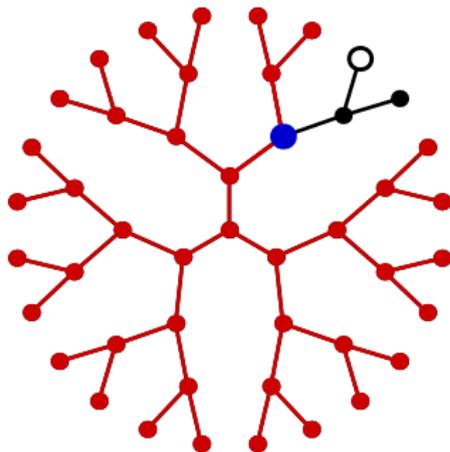
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres :



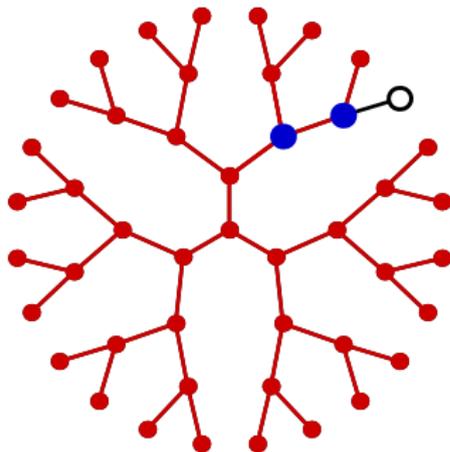
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres :



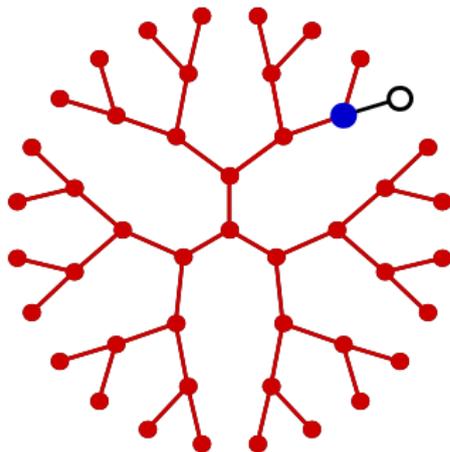
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres :



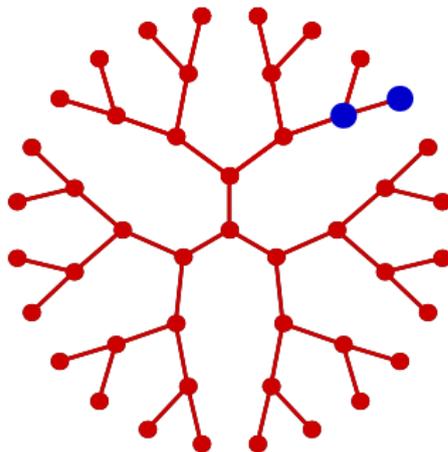
- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres :



- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(P_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres :



- ▶ Les chemins : $vs(P_n) = s(P_n) = 2$
- ▶ Les cycles : $vs(C_n) = s(C_n) = 3$
- ▶ Les arbres : $vs(T) = 2$



Définition (Décomposition arborescente)

Une **décomposition arborescente** de G est un couple (T, τ) avec T un arbre et $\tau : V(T) \rightarrow 2^{V(G)}$ tel que :

1. $\forall x \in V(G) \quad \tau^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset ;$
2. $\forall xy \in E(G) \quad \tau^{-1}(\{x\}) \cap \tau^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset ;$
3. $\forall x \in V(G) \quad T[\tau^{-1}(\{x\})]$ est un sous-arbre de $T ;$

Définition (Décomposition arborescente)

Une **décomposition arborescente** de G est un couple (T, τ) avec T un arbre et $\tau : V(T) \rightarrow 2^{V(G)}$ tel que :

1. $\forall x \in V(G) \quad \tau^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset ;$
2. $\forall xy \in E(G) \quad \tau^{-1}(\{x\}) \cap \tau^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset ;$
3. $\forall x \in V(G) \quad T[\tau^{-1}(\{x\})]$ est un sous-arbre de $T ;$

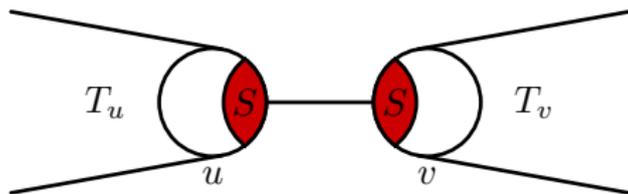
Lemme

Soit $X \subseteq V$. Si $G[X]$ est connexe, $T[\tau^{-1}(X)]$ un sous-arbre de T .

Corollaire

Soient uv une arête de T , $S = \tau(u) \cap \tau(v)$ et T_u et T_v les composantes connexes de $T \setminus uv$ contenant respectivement u et v .

L'ensemble S déconnecte $\tau(T_u) \setminus S$ et $\tau(T_v) \setminus S$.



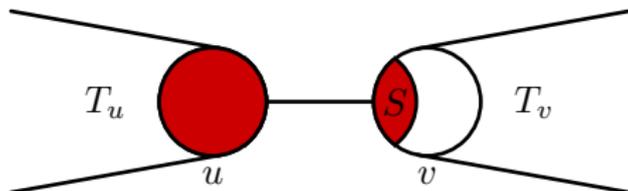
Une stratégie d'encerclément

Si (T, τ) est une décomposition de G , on reproduit la stratégie pour les arbres.

Une stratégie d'encerclément

Si (T, τ) est une décomposition de G , on reproduit la stratégie pour les arbres.

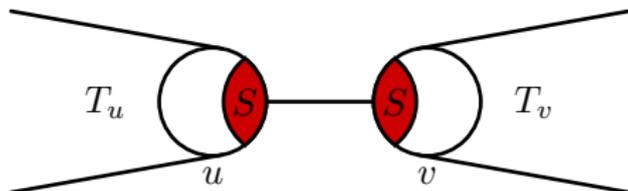
- ▶ On place les gendarmes sur un nœud u .



Une stratégie d'encerclément

Si (T, τ) est une décomposition de G , on reproduit la stratégie pour les arbres.

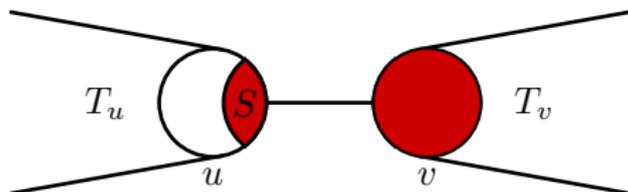
- ▶ On place les gendarmes sur un nœud u .
- ▶ On retire les gendarmes de $\tau(u) \setminus S$.



Une stratégie d'encerclément

Si (T, τ) est une décomposition de G , on reproduit la stratégie pour les arbres.

- ▶ On place les gendarmes sur un nœud u .
- ▶ On retire les gendarmes de $\tau(u) \setminus S$.
- ▶ On place des gendarmes sur $\tau(v) \setminus S$.



Une stratégie d'encerclément

Si (T, τ) est une décomposition de G , on reproduit la stratégie pour les arbres.

- ▶ On place les gendarmes sur un nœud u .
- ▶ On retire les gendarmes de $\tau(u) \setminus S$.
- ▶ On place des gendarmes sur $\tau(v) \setminus S$.

Proposition

Pour tout graphe $vs(G) \leq tw(G) + 1$.

Plus précisément,

Théorème

pour tout graphe G ,

▶ $s(G) = \text{pw}(G) + 1$

▶ $\text{vs}(G) = \text{tw}(G) + 1$

[Kirousis/Papadimitriou 86]

[Seymour/Thomas 93]

Définition (Enchevêtrement/bramble)

un **enchevêtrement** est une partie $\mathcal{B} \subseteq 2^{V(G)}$ telle que :

- ▶ $\forall X \in \mathcal{B}$ $G[X]$ est connexe ;
- ▶ $\forall X, Y \in \mathcal{B}$
 - ▶ soit $X \cap Y \neq \emptyset$
 - ▶ soit $\exists xy \in E(G)$ $x \in X, y \in Y$.

(X et Y se touchent).

L'**ordre** de \mathcal{B} est la taille minimale $\beta(G)$ d'un transversal de \mathcal{B} .

Définition (Enchevêtrement/bramble)

un **enchevêtrement** est une partie $\mathcal{B} \subseteq 2^{V(G)}$ telle que :

- ▶ $\forall X \in \mathcal{B}$ $G[X]$ est connexe ;
- ▶ $\forall X, Y \in \mathcal{B}$
 - ▶ soit $X \cap Y \neq \emptyset$
 - ▶ soit $\exists xy \in E(G)$ $x \in X, y \in Y$.

(X et Y se touchent).

L'**ordre** de \mathcal{B} est la taille minimale $\beta(G)$ d'un transversal de \mathcal{B} .

Supposons qu'il y a k gendarmes et que $\beta(\mathcal{B}) \geq k + 1$.

\forall position S des gendarmes, $\exists f(S) \in \mathcal{B}$ $f(S) \cap S = \emptyset$.

Définition (Enchevêtrement/bramble)

un **enchevêtrement** est une partie $\mathcal{B} \subseteq 2^{V(G)}$ telle que :

- ▶ $\forall X \in \mathcal{B}$ $G[X]$ est connexe ;
 - ▶ $\forall X, Y \in \mathcal{B}$
 - ▶ soit $X \cap Y \neq \emptyset$
 - ▶ soit $\exists xy \in E(G)$ $x \in X, y \in Y$.
- (X et Y se touchent).

L'**ordre** de \mathcal{B} est la taille minimale $\beta(G)$ d'un transversal de \mathcal{B} .

Supposons qu'il y a k gendarmes et que $\beta(\mathcal{B}) \geq k + 1$.

\forall position S des gendarmes, $\exists f(S) \in \mathcal{B}$ $f(S) \cap S = \emptyset$.

Le voleur reste toujours dans $f(S)$.

Si les gendarmes passent de S à S' , le voleur peut passer de $f(S)$ à $f(S')$.

Lemme

Pour tout graphe G , $\text{tw}(G) + 1 \geq \beta(G)$.

Preuve.

Par l'absurde (T, τ) de largeur k et \mathcal{B} d'ordre $k + 2$.

Lemme

Pour tout graphe G , $\text{tw}(G) + 1 \geq \beta(G)$.

Preuve.

Par l'absurde (T, τ) de largeur k et \mathcal{B} d'ordre $k + 2$.

$\forall u \in V(T)$, $\tau(u)$ n'est pas un transversal de \mathcal{B} donc $f(\tau(u))$ est "dans une composante" T_v de $T \setminus u$.

Lemme

Pour tout graphe G , $\text{tw}(G) + 1 \geq \beta(G)$.

Preuve.

Par l'absurde (T, τ) de largeur k et \mathcal{B} d'ordre $k + 2$.

$\forall u \in V(T)$, $\tau(u)$ n'est pas un transversal de \mathcal{B} donc $f(\tau(u))$ est "dans une composante" T_v de $T \setminus u$. On oriente uv de u vers v .

Lemme

Pour tout graphe G , $\text{tw}(G) + 1 \geq \beta(G)$.

Preuve.

Par l'absurde (T, τ) de largeur k et \mathcal{B} d'ordre $k + 2$.

$\forall u \in V(T)$, $\tau(u)$ n'est pas un transversal de \mathcal{B} donc $f(\tau(u))$ est "dans une composante" T_v de $T \setminus u$. On oriente uv de u vers v .

Comme $|E(T)| < |V(T)|$, $\exists uv$ avec deux orientations.

Lemme

Pour tout graphe G , $\text{tw}(G) + 1 \geq \beta(G)$.

Preuve.

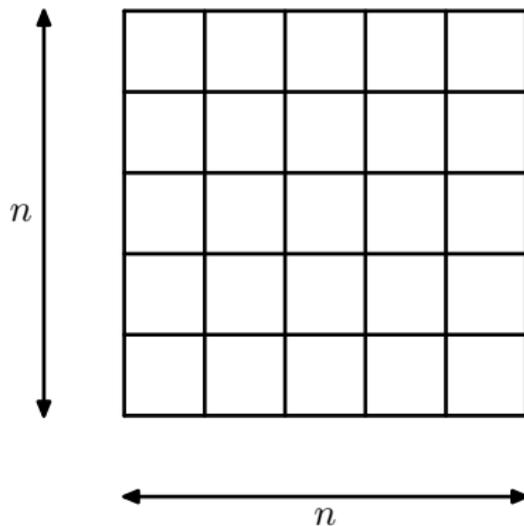
Par l'absurde (T, τ) de largeur k et \mathcal{B} d'ordre $k + 2$.

$\forall u \in V(T)$, $\tau(u)$ n'est pas un transversal de \mathcal{B} donc $f(\tau(u))$ est "dans une composante" T_v de $T \setminus u$. On oriente uv de u vers v .

Comme $|E(T)| < |V(T)|$, $\exists uv$ avec deux orientations.

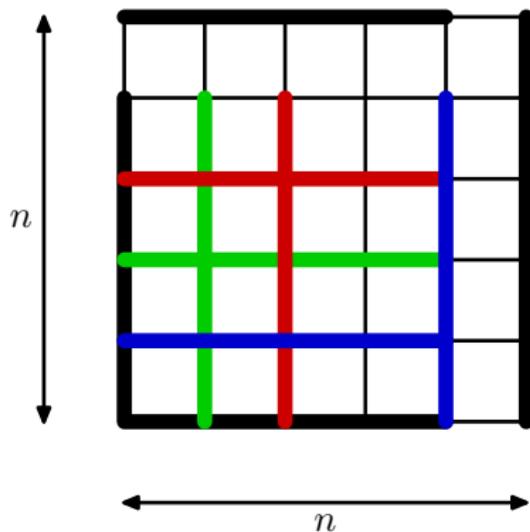
Mais alors $f(\tau(u))$ ne touche pas $f(\tau(v))$. Absurde.

Un enchevêtrement pour la grille $n \times n$ d'ordre $n + 1$



Un enchevêtrement pour la grille $n \times n$ d'ordre $n + 1$

- ▶ Toutes les croix $(n - 1) \times (n - 1)$.
- ▶ Les segments $[(0, n); (n - 1, n)]$ et $[(n, 0); (n, n)]$.



Un enchevêtrement pour la grille $n \times n$ d'ordre $n + 1$

- ▶ Toutes les croix $(n - 1) \times (n - 1)$.
- ▶ Les segments $[(0, n); (n - 1, n)]$ et $[(n, 0); (n, n)]$.

Proposition

La largeur arborescente de la grille $n \times n$ est n .

Plus généralement, on a

Théorème (Seymour/Thomas 93)

Pour tout graphe, $\text{tw}(G) + 1 = \beta(G)$.